femmes & maths




N°2, Supplément

Premier Forum des Jeunes Mathématiciennes

Novembre 1996

Sommaire


Revue de l'association *femmes et mathématiques*

Institut
Henri Poincarré
11 rue Pierre
et Marie Curie
75231 PARIS
cedex 05

PINA

BAUSCH

Delahaye
Bärenreiter 1989

Editorial

Ce supplément au numéro 2 de la revue *femmes & math* est consacré entièrement au compte-rendu du premier forum des jeunes mathématiciennes organisé à Paris à l'IHP le samedi 18 janvier 1996.

Cette initiative de l'association *femmes et mathématiques* était motivée par une double conviction : il y a dans notre pays de nombreuses jeunes mathématiciennes talentueuses et enthousiastes, et, paradoxalement, les difficultés rencontrées par les jeunes mathématiciennes à s'insérer dans le milieu mathématique vont croissant. Les statistiques sont inquiétantes : alors que la proportion actuelle de maîtres de conférences femmes en mathématiques est autour de 25 %, leur taux de recrutement ces dernières années est tombé à environ 17 %, à l'Université comme au CNRS. On risque donc de s'acheminer vers une baisse de la proportion des femmes présentes dans l'enseignement supérieur et la recherche en mathématiques.

Face à ce danger, notre réponse est la suivante : rendre plus visibles et mieux faire connaître les contributions des femmes aux mathématiques, encourager les jeunes mathématiciennes à avoir confiance en elles-mêmes et à se sentir chez elles dans la communauté mathématique.

Ce forum des jeunes mathématiciennes a répondu à notre attente : une trentaine de participantes, dix-sept exposés, de nombreux débats, discussions et prises de contact. Jeunesse, fraîcheur, décontraction, amour des mathématiques, plaisir de les comprendre et de les communiquer furent les traits marquants de cette rencontre. Un point faible a été toutefois souligné : la quasi-absence de mathématiciennes plus expérimentées.

Nous souhaitons remercier les formations doctorales qui ont dans de nombreux cas pris en charge le déplacement des jeunes mathématiciennes pour leur participation au forum.

Merci surtout aux participantes, à celles qui ont exposé puis rédigé et à celles qui les ont écoutées.

Colette Guillopé, Marie-Françoise Roy

Modèles markoviens de transfert de charges
dans les réseaux informatiques.

Maryse Béguin

Le problème du transfert de charge dans un réseau informatique, est un problème complexe ayant donné lieu à de nombreux travaux de recherche. Un tour d'horizon peut être trouvé dans [3]. L'étude présentée ici modélise un transfert de charge sur un réseau de n processeurs totalement connectés. Chaque processeur peut accueillir au plus K tàches. Les performances du système sont évaluées par les indices suivants : (cf. [4]) probabilité stationnaire pour un processeur d'accueillir i tàches, notée $P_i(\lambda)$, probabilité de rejet, notée $Prjt$, nombre moyen de tàches traitées par unité de temps, noté $Ttsk$, temps moyen de réponse noté Mrt. Les derniers indices sont reliés par la formule de Little [2]. Le but de cette étude est de mesurer les répercussions du transfert de charge en comparant les valeurs des indices obtenues avec transfert avec celles obtenues sans transfert. En particulier, le comportement asymptotique pour des systèmes massivement parallèles peut être étudié et interprété. Ces comparaisons permettent d'obtenir des bornes supérieures sur les bénéfices que l'on peut attendre d'un réel transfert. Elles permettent également d'étudier l'opportunité du transfert selon les valeurs des paramètres du système.

Dans cette étude, les hypothèses supplémentaires sont les suivantes.

Chaque processeur génère des tàches, et le temps séparant deux générations est un temps aléatoire modélisé par une distribution exponentielle de paramètre λ. Le temps de service de chaque tâche sur un processeur est modélisé par un temps aléatoire de distribution exponentielle de paramètre μ.

Deux processeurs se transfèrent instantanément des tâches dans les deux situations suivantes. Quand une tâche arrive sur un processeur dont la charge devient j, cette tâche est transférée sur un processeur de charge $j-2$ s'il existe. Parmi les processeurs de charge $j-2$, le processeur qui reÃ§oit la tâche supplémentaire est choisi au hasard. Quand une tâche se termine sur un processeur dont la charge devient j, une tâche en provenance d'un processeur de charge $j-2$ est transférée. Parmi les processeurs de charge $j+2$, celui qui transfère sa dernière tàche arrivée est choisi au hasard.
Il n'y a pas de file d'attente partagée par l'ensemble des processeurs et un processeur de charge K ne génère plus de nouvelles tàches.

Le processus étudié est le processus $\{X_t, t \geq 0\}$, qui à chaque instant fait correspondre le n-uplet dont la i-ème coordonnée représente la charge du i-ème processeur. Ces hypothèses de modélisation conduisent à un processus de Markov traduisant l'évolution de la charge de l'ensemble des processeurs au cours du temps.

Dans la situation sans transfert, les n processeurs se comportent comme n files indépendantes $M/M/1/K$ de taux d'arrivée λ, et de taux de service μ.

Pour étudier le système avec transfert, il est opportun d'utiliser les procédés d'agrégation [5]. L'observation clé est de constater que le nombre total de tâches présentes dans le système évolue comme un processus de naissance et de mort ([1]) sur $\{0, \ldots, Kn\}$ (pour $\mu = 1$) avec
des taux de naissance (de j à $j+1$)

$$\lambda(j) = \begin{cases} n\lambda & \text{pour } j = 0, \cdots, (K-1)n \\ (Kn-j)\lambda & \text{pour } j = (K-1)n, \cdots, Kn-1 \end{cases}$$

et des taux de mort (de j à $j-1$)

$$\mu(j) = \begin{cases} j & \text{pour } j = 1, \cdots, n \\ n & \text{pour } k = n+1, \cdots, Kn \end{cases}$$

Soit $(p_i)_{j=0 \ldots Kn}$ la mesure stationnaire de ce prooessus de naissance et de mort.

Proposition 1 *Les probabilités $P_j(\lambda)$ sont reliées à ces quantités de la façon suivante :*

$$P_0(\lambda) = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{n-i}{n} p_i \quad , \quad P_K(\lambda) = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{n-i}{n} p_{Kn-i}$$

$$\forall 0 < j < K, \quad P_j(\lambda) = \sum_{i=0}^{n} \frac{i}{n} p_{(j-1)n+i} + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{n-i}{n} p_{jn+i}$$

Par suite, tous les indices de performance peuvent s'exprimer en fonction des paramètres λ et n.
Posons

$$\rho = p_{Kn} \frac{1}{\lambda^{K_p}} = \lambda^{Kp} p_0.$$

$$G(n, \lambda) = \sum_{j=0}^{n-2} \frac{n^j}{j!} \left(\frac{1}{\lambda}\right)^{Kp-j},$$

$$F(n, \lambda) = \sum_{j=n-1}^{Kp-1} \frac{1}{\lambda^{Kp-j}},$$

$$H(n, \lambda) = \frac{1}{n} \left(\sum_{j=n}^{K_{p-1}} \frac{j}{\lambda^{K_{p-j}}} + (Kn-j)\lambda^{K_{p-j}} \right).$$

On obtient,

Théorème 1 *Pour le modèle n processeurs avec transfert, les valeurs des autres indices de performance sont les suivantes*

$$
\begin{aligned}
Prjt &= \left[G\left(n, \frac{1}{\lambda}\right) \left(1 - \frac{1}{\lambda}\right) + \frac{n^n}{n!} \lambda^{Kp-n+1} \right] \rho \quad , \\
Ttsk &= n\lambda(1 - Prjt) \quad , \\
Nprt &= \rho n \left[G\left(n, \frac{1}{\lambda}\right) \left(K - \frac{1}{\lambda}\right) + \frac{n^n}{n!} \left(\frac{K}{2} + K\lambda^{Kp-(n-1)} \right) + H(n, \lambda) \right] \quad , \\
Mrt &= \frac{\lambda G(n,\lambda) + G\left(n, \frac{1}{\lambda}\right)\left(K - \frac{1}{\lambda}\right) + \frac{n^n}{n!}\left(K\lambda^{Kp-n-1} + \frac{K}{2} + H(n,\lambda)\right)}{\lambda G(n,\lambda) + G\left(n, \frac{1}{\lambda}\right) + \frac{n^n}{n!}\left(1 + F(n,\lambda) + F\left(n, \frac{1}{\lambda}\right) - \lambda^{Kp-n+1}\right)} \quad .
\end{aligned}
$$

Théorème 2 *Pour n grand, le système avec transfert, présente trois types de comportement*
Système non saturé : $\lambda < 1$

$$\lim_{n\to+\infty} Prjt = 0$$

$$\lim_{n\to+\infty} Mrt = 1$$

Valeur critique : $\lambda = 1$

$$\lim_{n\to+\infty} Prjt = 0$$

$$\lim_{n\to+\infty} Mrt = \frac{K}{2}$$

Système saturé : $\lambda > 1$

$$\lim_{n\to+\infty} Prjt = 1 - \frac{1}{\lambda}$$

$$\lim_{n\to+\infty} Mrt = K - \frac{1}{\lambda}$$

Des preuves numériques montrent que la convergence est extrêmement rapide. Seuls les principaux resultats mathématiques ont été rapportés ici, et il convient de faire une étude comparative plus détaillée des résultats avec et sans transfert pour approfondir le sujet ([?]).

Bibliographie

[1] *Barusha-Reid A. T.*, Elements of the theory of Markov Processes, Mc Graw-Hill, New-York,1960

[2] *Béguin M.*, Transfert de charge dans un réseau de processeurs totalement conectés, Rapport technique MAI-IMAG, Grenoble, no 28, (1996).

[3] *Béguin M. f Vincent J.M.* , *Ycart B.*, Markovian models for load transferring, Rapport technique MAI-IMAG, Grenoble, no 14, (1995).

[4] *Bertzekas D.P.*; *Tsitsiklis, J.N.*, Parallel and distributed computation, Prentice-Hall,New York,(1989).

[5] *Little J.D.C.*, A proof of the queueing formula $L = \lambda W$, Oper. Res., no 9, 383-387, (1961)

[6] *Rosenblatt M.*, Functions of a Markov process that are Markovian, Journal of Mathematics and Mechanics, 4, 585-596, vol8, (1959).

U.F.R. Mathématiques et Informatique
LMC-IMAG B.P. 53, 38041 Grenoble Cedex
Maryse.Beguin@imag.fr

Algèbres duales et classes $\mathbb{A}_{n,m}$

Isabelle Chalendar

Soit $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert complexe séparable de dimension infinie et soit $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ l'algèbre des opérateurs linéaires bornés sur $\mathcal{H}$. La question de savoir si pour tout $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$, il existe un sous-espaoe (fermé) $\mathcal{M}$ non trivial de $\mathcal{H}$ invariant pour T ($i.e.(0) \neq \mathcal{M} \neq \mathcal{H}$ et $T\mathcal{M} \subset \mathcal{M}$) est connue sous le nom de *problème du sous-espace invariant* et est toujours ouverte. Rappelons que pour le problème analogue sur un espace de Banach il existe des exemples dus à Enflo [7], Beauzamy [9], et Read [9], d'opérateurs dépourvus de sous-espaces invariants non triviaux (s.e.i.n.t).

En 1978, Scott Brown démontrait que tout opérateur sous-normal (c'est-à-dire un opérateur admettant une extension normale) possède un s.e.i.n.t. Ce résultat, dans un domaine qui était l'objet d'actives recherches depuis le début des années 50 et le lieu d'interférence de la théorie des fonctions et de la théorie géométrique des opérateurs, était certes très important en lui-même. Il devait se révéler l'être encore beaucoup plus par la méthode introduite qui fut presque immédiatement étendue à d'autres classes d'opérateurs.

Le point de départ de S.Brown réside dans la remarque suivante : si $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ et s'il existe x et y vecteurs de $\mathcal{H}$ vérifiant $(p(T)x, y) = p(0)$ pour tout polynôme p, alors T a un s.e.i.n.t.

L'outil principal introduit par S.Brown pour mettre en oeuvre la remarque précédente est le concept *d'algèbre duale* sur un espace de Hilbert. Il est bien connu qu'en tant qu'espace de Banach, $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ est le dual de l'espace de Banach (et idéal de $\mathcal{L}(\mathcal{H}))C^1(\mathcal{H})$ des opérateurs à trace finie. Plus précisément $C^1(\mathcal{H})$ est défini par $\mathrm{C}^1(\mathcal{H}) = \{L = \Sigma_{n\geq 1} x_n \otimes y_n,\ (x_n)_n,\ (y_n)_n \in l^2(\mathcal{H})\}$ où $x \otimes y \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$, avec $x \otimes y(u) = (u, y)x$. Cette dualité est régie par la forme trace : $< L, T >= trace(LT)$ où $L \in C^1(\mathcal{H})$, $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ ($trace(L) = \sum_{n\geq 1}(x_n, y_n)$ si $L = \sum_{n\geq 1} x_n \otimes y_n$). La dualité $\mathcal{L}(H) = (C^1(\mathcal{H}))^*$ permet de doter $\mathcal{L}(H)$ d'une topologie faible* (w*) , également appelée topologie ultrafaible. Cette topologie peut @e définir grâce à la famille de semi-normes

$$(p_L)_{L\in C^1(\mathcal{H})} \text{ où } p_L(T) = |trace(LT)|.$$

Définition 1 *On appelle algèbre duale sur $\mathcal{H}$ toute sous-algèbre unitaire $\mathcal{A}$ ultrafaiblement fermée de $\mathcal{L}(\mathcal{H})$.*

La terminologie *algèbre duale* se justifie par le fait que $A = (Q_A)^*$ avec $QA = C^1(H)/\perp A$ où$^\perp A = \{L \in C^1(H); \forall T \in A,\ < T,\ L >= 0\}$. Tout élément $[L]$ de QA peut s'écrire $[L] = \Sigma_{i\geq 1}[x_i \otimes y_i]$ où $(x_i)_i, (y_i)_i \in t^2('H)$. En adaptant la remarque précédente on montre que s'il existe φ un caractère faible$*$ continu sur A tel que $\varphi = [x \otimes y]$, alors 1'algèbre duale A a un s.e.i.n.t. Ceci donna 1'idée naturelle d'introduire la propriété (A_1) :

$$\forall [L] \in \mathcal{Q}_{\mathcal{A}},\ \exists (x, y) \in \mathcal{H}^2;\ [L] = [x \otimes y].$$

A présent, considérons le cas où $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$, contraction absolument continue, a un calcul fonctionnel de Nagy-Foias, Φ_T, isométrique (cf. [10]). Soit $\mathcal{A}_T$ l'algèbre duale engendrée par T (i.e $\mathcal{A}_T$ est la fermeture pour la topologie faible* de l'algèbre des polynômes en T) et soit φ_T le faible* homéomorphisme défini de $\mathcal{Q}_{\mathcal{A}_T}$ dans le prédual de H^∞ (cf. théorème 4.1 de [3]). On note $\varphi_T([x \otimes y]) = x \overset{T}{\square} y$ et on désigne par $\mathbb{A}$ la classe des contractions absolument continues ayant un calcul fonctionnel de Nagy-Foias isométrique. On définit alors les classes $\mathbb{A}_{n,m}(1 \leq n, m \leq \aleph_0)$ de la façon suivante :

Definition 2 *La classe* $\mathbb{A}_{n,m}(1 \leq n, m \leq \aleph_0)$ *est l'ensemble des contractions* $T \in \mathbb{A}$ *telles que pour toute famille* $\{f_{i,j},\ 0 \leq i < n,\ 0 \leq j < m\}$, *il existe deux familles de vecteurs de* $\mathcal{H}, \{x_i,\ 0 \leq i < n\}$ *et* $\{y_j,\ 0 \leq j < m\}$ *satisfaisant* $[f_{i,j}] = x_i \overset{T}{\square} y_j$.

L'appartenance à ces classes permet de préciser l'existence et la richesse des s.e.i.n.t. Cependant il est en géneral difficile de vérifier l'appartenance à ces ensembles. Suite aux travaux présentés dans [4], [6] et [8], nous nous sommes intéressés à une caractérisation différente des classes $\mathbb{A}_{n,m}$.

Les résultats présentés dans ce qui suit ont été obtenus en collaboration avec Frédéric Jaeck, étudiant en thèse de B. Chevreau à Bordeaux I. Nous avons obtenu des conditions suffisantes d'appartenance aux classes $\mathbb{A}_{n,m}$. Avant d'énoncer nos résultats, nous rappelons la notion de multiplicité d'un opérateur unitaire absolument continu ainsi que la définition d'un *ensemble frontière* qui joue un rôle essentiel.

Définition 3 *Soit* $R \in \mathcal{L}(\mathcal{R})$ *un opérateur unitaire absolument continu et soit* σ *un borélien de* T (*le tore*). *On dit que* R *est de multiplicité supérieure ou égale à* n *sur* σ *et on note mult* $(R) \geq n$ *sur* σ_f *s'it existe* $\mathcal{R}_0$, *un sous-espace réduisant pour* R *tel que* $R_{|\mathcal{R}_0}$ *soit unitairement équivalent à* $\underbrace{M_\sigma \oplus \cdots \oplus M_\sigma}_{n}$ *sur* $\underbrace{L^2(\sigma) \oplus \cdots \oplus L^2(\sigma)}_{n}$ *où* M_σ *est défini par :* $(M_\sigma x)(e^{it}) = e^{it} x(e^{it})$, $x \in L^2(\sigma)n, e^{it} \in \sigma$.

Definition 4 *On appelle* X_T *le borélien maximd* (*pour l'inclusion*) *du tore pour la propriété* (*P*) *définie comme suit : un borélien* σ *a la propn·été* (*P*) *si* $\forall f \in L^1(\sigma)$, $||f||_1 \leq 1$, *il existe deux suites* $(x_n)_n, (y_n)_n$ *dans la boule unité de* $\mathcal{H}$ *telles que :*

$$\begin{cases} \lim_{n\to\infty} ||\ [f] - x_n \overset{T}{\square} y_n|| = 0 & \\ \lim_{n\to\infty} ||\ x_n \overset{T}{\square} w|| = 0 & \forall w \in \mathcal{H} \\ \lim_{n\to\infty} ||\ w \overset{T}{\square} y_n|| = 0 & \forall w \in \mathcal{H} \end{cases}$$

Soit $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ une contraction absolument continue. On désigne par $U+$ (resp. B) sa dilatation isométrique minimale (d.i.m) (resp. son extension coisométrique minimale (e.c.i.m)) ($cf.$[10]) . D'aprés le théorème de décomposition de Wold, $U_+ = S_* \oplus R, B = S^* \oplus R_*$ où R et R_* sont des opérateurs unitaires absolument continus dont les supports des mesures spectrales associés seront notés Σ_T et Σ_{*T} respectivement.

Nous rappelons enfin la décomposition canonique de Nagy-Foias d'une contraction $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ (cf. p73 dans [10]), à savoir : $T = \begin{pmatrix} T_0 & * \\ 0 & T_1 \end{pmatrix}$ relativement à la décomposition orthogonale $\mathcal{H} = \mathcal{H}_0 \oplus \mathcal{H}_1$ où $\mathcal{H}_0$ est défini par $\mathcal{H}_0 = \{x \in \mathcal{H};\ \lim\limits_{n\to\infty} ||T^n x|| = 0\}$. On notera $R^{\mathcal{H}_0}$ la partie unitaire de la d.i.m de T_0 et $R_*^{\mathcal{H}_1}$ la partie unitaire de l'e.c.i.m de T_1.

Théorème 1 *Soit $T \in \mathbb{A}$ et soit un entier n tel que $1 \leq n \leq \aleph_0$. Si mult $(R^{\mathcal{H}_0}) \geq n$ sur $\mathbb{T}\backslash(X_T \cup \Sigma_{*T})$, alors $T \in \mathbb{A}_{1,n}$.*

Théorème 2 *Soit $T \in \mathbb{A}$ et soit un entier k tel que $1 \leq k \leq \aleph_0$. Si mult $(R_*^{\mathcal{H}_1}) \geq k$ sur $\mathbb{T}\backslash(X_{T_0} \cup \Sigma_{T_0})$, alors $T \in \mathbb{A}_{k,1}$.*

Théorème 3 *Soit $T \in \mathbb{A}$ et soient k, n des entiers tels que $1 \leq k, n \leq \aleph_0$. Si l'on a mult $(R^{\mathcal{H}_0}) \geq n$ sur $\sigma_0 \subset \Sigma_{T_0}\backslash X_T$ et mult $(R_*^{\mathcal{H}_1}) \geq k$ sur $\sigma_1 \subset \Sigma_{*T_1}\backslash X_T$ avec $\sigma_0 \cup \sigma_1 \cup X_T = \mathbb{T}$, alors $T \in \mathbb{A}_{k,n}$.*

Remarque : Nous obtenons en particulier les deux implications suivantes :
- si *mult* $(R^{\mathcal{H}0}) \geq n$ sur $\mathbb{T}\backslash(X_T \cup \Sigma_{*T})$ et si *mult* $(R_*^{\mathcal{H}_1}) \geq k$ sur $\Sigma_{*1}\backslash X_T$, alors $T \in \mathbb{A}_{k,n}$.
- si $mult(R^{\mathcal{H}_0}) \geq n$ sur $X_{T_0} \cup \Sigma_{T_0}\backslash X_T$ et si *mult* $(R_*^{\mathcal{H}_1}) \geq k$ sur $\mathbb{T}\backslash(X_T \cup \Sigma_{T_0})$, alors $T \in \mathbb{A}_{k,\iota}$.

Bibliographie

[1] *B. Beauzamy.* Un opérateur sans sous-espace invariant : simplification de l'exemple de P. Enflo. Acta-Math., 144 :65-82, 1980.

[2] *H. Bercovici.* Factorization theorems and the structure of operators on Hilbert space. Ann. of Math., 128 :399-413, 1988.

[3] *H. Bercovici, C. Foias, and C. Pearcy.* Dual algebras with applications to invariant subspaces and dilation theory. In CBMS Regional conference series in mathematics, number 56. A.M.S., Providence, 1985.

[4] *B. Chevreau, G. Exner, and C. Pearcy.* Boundary sets for a contraction. J. Operator Theory, 34 :347-380, 1995.

[5] *B. Chevreau.* Survey of the class *Ambb*. preprint.

[6] *G.R. Exnerf Young Soo Jo, Il Bong Jung.* C_0 contractions : Dual operators algebra, Jordan models and multiplicity. to appear.

[7] *P. Enflo.* On the invariant subspace problem in Banach spaces. Acta-Math.

[8] *M. Ouannasser.* Sur les contractions dans la classe $Ambb_n$. J. Operator Theory, 28 :105-120, 1992.

[9] *C. Read.* A solution to the invariant subspace problem. Bulletin London Mathematical Society, 16 :337-401, 1984.

[10] *B. Sz-Nagy and C. Foias.* Harmonic analysis of operators on Hilbert space. North Holland, Amsterdam, 1970.

U.F.R. Mathématiques et Informatique
Université Bordeaux I
351, cours de la Libération
33405 Talence Cedex
chalenda@math.u-bordeaux.fr

Automorphismes de $\check{U}_q(\mathcal{B}^+)$

Odile Fleury

La recherche des automorphismes de certaines algèbres n'est en géneral pas aisée. Le cas de l'espace affine A^n en est un exemple : seul le cas du plan a été traité entièrement dans [8] et déjà le cas $n = 3$ paraît présenter des automorphismes "sauvages" ([5]).

En ce qui concerne $U(\mathcal{G})$, algèbre enveloppante d'une algèbre de Lie, M.K.Smith a traité le cas de certaines algèbres de Lie résolubles ([7]).

Le passage à la quantification a d'ores et déjà permis la détermination des automorphismes de $U_q(sl(2))$ ([1]) alors que le cas $U(sl(2))$ reste encore complexe ([4]). Il semble, d'après cet exemple, que la quantification rigidifie les structures au point de réduire sensiblement le groupe d'automorphismes d'algèbre dans le passage du cas classique au cas quantique.

Dans [2] sont décrits les automorphismes d'algèbre de $U_q^+(sl(3))$. L'étude des automorphismes d'algèbre de $U_q^+(\mathcal{G})$ où $\mathcal{G}$ est semi-simple paraît difficile et c'est pourquoi nous avons étudié l'algèbre enveloppante quantifiée de la sous-algèbre borélienne $\mathcal{B}^+, U_q(\mathcal{B}^+)$, ou plutôt sa forme augmentée $\check{U}_q(\mathcal{B}^+)$.

La notation q désignera un élément non nul de $\mathbb{C}$, non racine de l'unité. Soient $\mathcal{G}$ une algèbre de Lie semi-simple de rang $n, (a_{ij})$ sa matrice de Cartan. Soient $d_1, \ldots, d_n$ les entiers naturels, premiers entre eux dans leur ensemble, tels que $(d_i a_{ij})$ soit symétrique.
Pour $k, j \in \mathbb{N}$ et $d \in \mathbb{N}^*$, posons :
$[k]_d = \frac{q^{dk} - q^{-dk}}{q^d - q^{-d}}$; $[k]_d! = [1]_d[2]_d \ldots [k]_d$; $\left[\begin{array}{c} k \\ j \end{array} \right]_d = [k]_d \ldots [k-j+1]_d/[j]_d!$
Alors $\check{U}_q(\mathcal{B}^+)$ est la $\mathbb{C}$ - algèbre engendrée par les éléments $\check{K}_i$ et $x_i (i = 1, \ldots, n)$ avec :

$$\check{K}_i x_j = q^{\delta_{ij} d_i} x_j \check{K}_i$$

et les relations de Serre quantiques :

$$\sum_{m=0}^{1-a_{ij}} (-1)^m \left[\begin{array}{c} 1-a_{ij} \\ m \end{array} \right]_{d_i} x_i^{1-a_{ij}-m} x_j x_i^m = 0, \quad \forall i \neq j = 1, \ldots, n.$$

On montre que $\check{U}_q(\mathcal{B}^+)$ est une algèbre de Hopf avec la structure donnée par :

$$\Delta x_i = x_i \otimes 1 + K_i \otimes x_i, \quad \Delta \check{K}_i = \check{K}_i \otimes \vec{K}_i,$$

$$S x_i = -K_i^{-1} x_i, \quad S \check{K}_i = \check{K}_i^{-1}, \quad \varepsilon(x_i) = 0, \quad \varepsilon\left(\check{K}_i\right) = 1.$$

On démontre alors le théorème suivant :

Théorème 1 *Soit $\theta \in Aut(\check{U}_q(\mathcal{B}^+)$. Alors, pour tout i,*

$$\theta\left(\check{K}_i\right) = a_i \check{K}_{\sigma(i)} \quad \text{et} \quad \theta\left(x_i\right) = \gamma_i \check{K}_1^{b_{1i}} \ldots \check{K}_n^{b_{ni}} x_{\sigma(i)},$$

où $a_i, \gamma_i \in \mathbb{C}^\star, \sigma$ est un automorphisme du graphe de Dynkin et $(b_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$ avec $d_i b_{\sigma(i)j} = d_j b_{\sigma(j)i}$.

Le théorème obtenu aboutit à une structure simple du groupe des automorphismes d'algèbre. Il est en effet paramétré par le groupe (fini) Γ des automorphismes du graphe de Dynkin, par $(\mathbb{C}^\star)^{2n}$, et par un sous-groupe S de matrices vérifiant une identité les liant aux entiers d_i qui symétrisent la matrice de Cartan.
Plus précisément, on a :

Théorème 2

$$Aut\left(\check{U}_q\left(\mathcal{B}^+\right)\right) \simeq (\Gamma \propto \mathcal{S}) \propto \left((\mathbb{C}^\star)^{2n}\right.$$

où $\propto$ deśigne le produit semi-direct, et S est le sous-groupe additif des matrices symétrisables par les entiers d_i.

Enfin, comme corollaire, on obtient les automorphismes d'algèbre de Hopf de $\check{U}_q(B^+)$:
Proposition 1 *Soit $\theta \in Aut_{Hopf}(\check{U}_q(\mathcal{B}^+))$. Alors, pour tout i,*

$$\theta\left(\check{K}_i\right) = \check{K}_{\sigma(i)} \text{ et } \theta\left(x_i\right) = \gamma_i x_{\sigma(i)}$$

i.e.

$$Aut_{Hopf}\left(\check{U}_q\left(\mathcal{B}^+\right)\right) \simeq \Gamma \propto (\mathbb{C}^\star)^n$$

Bibliographie

[1] *J. Alev, M. Chamarie*, Dérivations et automorphismes de quelques algèbres quantiques, Communications in Algebra (1992) 20, 1787-1802.

[2] *J. Alev, F. Dumas*, Rigidité des plongements des quotients primitifs minimaux de $U_q(sl(2))$ dans l'algèbre quantique de Weyl-Hayashi, Prépublication de l'Université de Reims, Département de Mathématiques, 94.7.

[3] *P. Caldero*, Algèbres enveloppantes quantifiées : Action adjointe et représentations, Université de Paris VI, Thèse de Doctorat, 1993.

[4] *A. Joseph*, A wild automorphism of $U(sl(2))$, Math. Proc. Camb. Phil. Soc., (1976), 80, 61-65.

[5] *M. Nagata*, On the automorphism group of k[X, Y], Kyoto Univ. Lectures in Math. 5, Kyoto University, Kinokuniya - Tokyo, 1972.

[6] *P. Polo*, Dynkin diagrams and enveloping algebras of semisimple Lie algebras, Prépublication.

[7] *M. K. Smith*, Automorphisms of Enveloping algebras, Communications in Algebra, Vol.**11**, No 16, 1983.

[8] *W. van der Kulk*, On polynomial rings in two variables, Nieuw Archief voor Wiskunde, **3** (1953), No. 1,33-41.

Université de Reims
Département de Mathématiques, U.R.A 1870
Moulin de la Housse. B.P. 1039
51687 REIMS Cedex 2
odile.fleury@univ-reims.fr

Modèles markoviens de ressources partagées.

Florence Forbes

Les systèmes de ressources partagées sont constitués d'agents et de ressources en quantité insuffisante. Les agents sont en compétition pour l'utilisation des ressources. Ce qui peut entraîner des conflits et des blocages entre eux. L'évaluation des performances de tels systèmes et la résolution des conflits de la manière la plus équitable possible sont d'une grande importance pratique. Les applications les plus courantes appartiennent au domaine de l'informatique. Elles concernent la gestion des bases de données, les réseaux de communications et le calcul parallèle. L'aléatoire s'insère naturellement dans ces modèles. Il permet de tenir compte des fluctuations sur les arrivées des demandes de ressources et sur les durées d'occupation de ces ressources par les agents. Mes travaux visent à proposer et étudier des modèles de ressources partagées markoviens où les agents sont représentés par des automates stochastiques à états finis et le partage des ressources traduit par des synchronisations entre ces automates. Le "processus des philosophes" est un exemple de tel modèle. Les automates ne peuvent y prendre que deux états 0 ou 1. Les synchronisations sont de type exclusion mutuelle, c'est-à- dire que deux automates voisins (sur le graphe représentant le système) ne peuvent être simultanément dans l'état 1. Ce processus a été introduit par B. Ycart [1] sur des graphes linéaires comme une version probabiliste du fameux "Dining Philosophers' Problem" de Dijkstra. L'étude presentée ici correspond à une extension aux cas de graphes dits échelles. Plus de détails pourront être trouvés dans [2]. Ce modele illustre des notions théoriques importantes telles que la réversibilité, la troncature de processus, l'existence d'un equilibre à forme produit, le calcul de fonctions de partition, les propriétés de Markov sur les graphes. Des extensions du modèle ont également été proposées dans [4].

Pour chaque agent les demandes de ressources arrivent selon un processus de Poisson de paramètre λ. Si les ressources demandées sont libres, l'agent devient actif et occupe les ressources pendant un temps exponentiel de paramètre μ que nous prendrons dans la suite égal à 1. Dans le cas contraire, l'agent reste passif. Deux agents vont donc pouvoir être actifs en même temps, s'ils utilisent des ressources différentes. Dans un tel modèle, le partage des ressources peut être représenté par un graphe dont les sommets représentent les agents. Deux agents sont reliés par une arête du graphe s'ils ne peuvent être actifs en même temps, autrement dit s'ils partagent au moins une ressource. A titre d'exemple, un réseau avec n liaisons (les agents) qui nécessite l'utilisation d'un même et unique bus, correspond au graphe à n sommets tous connectés (clique). Considérons donc un graphe $G = (S, E)$ où S est un ensemble de sommets et E un ensemble d'arêtes. Notons $\eta_t = (\eta_t(x),\ x \in S)$ la configuration du système à l'instant t, avec $\eta_t(x) = 1$ si l'agent x est actif et $\eta_t(x) = 0$ s'il est inactif. L'évolution du système dans le temps est décrite par un processus de Markov $(\eta_t)_{t\geq 0}$ à valeur dans l'espace $\mathcal{A}_G$ des configurations admissibles. Ces configurations sont les éléments de $\{0,\ 1\}^S$ qui n'ont pas de sommets voisins sur G à la valeur 1. Pour des graphes finis, il est facile de voir que le processus des philosophes est irréductible sur $\mathcal{A}_G$ et a une unique mesure stationnaire notée μ_G. Cette mesure a la propriété d'être réversible et d'admettre une forme produit :

$$\forall \eta\ \in\ \mathcal{A}_G\ ,\ \mu_G[\ \eta\ ]\ =\ \mu_G[\ 0_G\ ]\cdot\lambda^{\sum_{x\in S}\eta(x)}, \tag{1}$$

où 0_G est la configuration où tous les philosophes sont inactifs. Le calcul de cette mesure se réduit donc à celui de la constante de normalisation $\mu_G[0_G]$ dont l'inverse est encore appelée fonction de partition et notée Z_G. Cette fonction de partition est un polynôme en λ. Le coefficient d'ordre k est le nombre de configurations admissibles ayant exactement k philosophes à 1. Déterminer μ_G est donc essentiellement un problème de combinatoire. Cependant la taille de l'espace $\mathcal{A}_G$ rend en général impossible une énumération directe même par ordinateur. Notre objectif est donc de montrer que pour une certaine classe de graphes que nous appelons échelles, la mesure réversible du processus des philosophes peut-être calculée en un temps polynômial. Les graphes échelles sont obtenus en faisant le produit cartésien d'un cycle, d'une ligne ou d'un arbre avec un sous-graphe fixé. Cette structure particulière permet de réduire le calcul de la mesure stationnaire à des produits de matrices. Les matrices impliquées sont l'analogue des matrices de transfert en mécanique statistique. D'autres parallèles avec cette discipline peuvent être faits. Certains paramètres de performance s'identifient à des paramètres thermodynamiques. Dans le cas du produit d'un arbre régulier infini avec une clique, il est également possible de mettre en évidence des phénomènes de transition de phase et de généraliser des résultats de Kelly [3].

Bibliographie

[1] *Ycart, B.*, The Philosophers Process : an ergodic reversible nearest particle system, Ann. Appl. Probab., vol. 3, no 2, p.356-363, (1993).

[2] *Forbes, F.*, *Ycart, B.*, The Philosophers Process on ladder graphs, Rapport technique MAI-IMAG, Grenoble, no 7, (1994), à paraître dans *Communications in statistics : stochastic models.*

[3] *Kelly, F.P.*, Stochastic models of computer communication systems, J. Roy. Statist. Soc. Ser. B, no 85, p.379-395, (1988).

[4] *Forbes, F., François, O. et Ycart, B.*, Stochastic comparison for resource sharing processes, Rapport technique MAI-IMAG, Grenoble, no 22, (1996).

LMC-IMAG B.P. 53, 38041 Grenoble Cedex,
Florence.Forbes@imag.fr

Démonstration analytique et démonstration probabiliste pour un résultat d'unicité

Myriam Fradon

Il y a essentiellement deux façons de définir la dérivée d'une fonction : par intégration par parties (définition au sens des distributions) ou par dérivation direction par direction (définition au sens de Gâteaux). C'est pourquoi l'espace de Sobolev H^1 des fonctions L^2 à dérivéeL^2 admet deux définitions équivalentes :

$$\begin{aligned} H^1 &= \left\{ f \in L^2(dx) | \exists \nabla f \in L^2(dx) \forall u \in \mathcal{C}_c^\infty \int \nabla f u dx = - \int f \nabla u dx \right\} \\ &= \left\{ f \in L^2(dx) | \forall k \in \mathbb{R}^d \nabla f(x+sk) \cdot k = \frac{df(x+sk)}{ds} \in L^2(dx) \right\} \end{aligned}$$

Cet espace H^1 est un espace de Hilbert lorsqu'on le munit de sa norme $||f||_{H^1}^2 = ||f||_{L^2}^2 + ||\nabla f||_{L^2}^2$ et il est habituel de noter H_0^1 l'adhérence dans H^1 de l'espace C_c^∞ des fonctions $\mathcal{C}^\infty$ à support compact dans $\mathbb{R}^d$. On sait que lorsqu'on se place sur $\mathbb{R}^d$ tout entier, ce qui est le cas ici, on a l'égalité : $H^1 = H_0^1$.
Question : Cette égalité est-elle toujours vraie si on remplace, dans la définition de H^1, la mesure de Lebesgue dx par une autre mesure de référence ?

La nouvelle mesure de référence doit être assez régulière pour que l'intégration par parties soit définie. On prend une mesure de la forme $\phi^2(x)dx$ où $\phi \in H^1$ Dans ce cas, on sait que l'égalité ci-dessus reste vraie (cf [7] et [8]) mais les démonstrations existantes consistaient en un mélange sophistiqué d'Analyse et de Probabilités, alors que le problème peut être vu comme purement analytique ou (via la théorie des formes de Dirichlet) purement probabiliste. Dans l'article [1], P. Cattiaux et moi-même proposons une preuve analytique et une preuve probabiliste de ce résultat. Le but de l'exposé était de donner une idée des techniques utilisées dans ces preuves, et de montrer à quel point il peut être pratique d'utiliser certains outils d'Analyse Fonctionnelle en Probabilités, ou certains outils probabilistes pour traiter des problèmes d'Analyse Fonctionnelle.

Sur $\mathbb{R}^d$, on fixe $\phi \in H^1$, ce qui nous donne la nouvelle mesure de référence $\phi^2 dx$. On note $L^2(\phi)$ l'espace des fonctions de carré intégrable par rapport à $\phi^2 dx$ et $H^1(\phi)$ l'analogue de H^1 dans ce nouveau contexte :

$$\begin{aligned} H^1(\phi) = \big\{ f \in L^2(\phi) | \exists \overline{\nabla} f \in L^2(\phi) \forall u \in \mathcal{C}_c^\infty \int (\overline{\nabla} f) u \phi^2 dx = \cdots \\ \cdots = - \int f (\nabla u) \phi^2 dx - 2 \int f u \frac{\nabla \phi}{\phi} \phi^2 dx \} \\ = \big\{ f \in L^2(\phi) | \forall k \in \mathbb{R}^d \overline{\nabla} f(x+sk) \cdot k = \frac{df(x+sk)}{ds} \in L^2(\phi) \} \end{aligned}$$

On munit cet espace de la norme $\|f\|^2_{H^1(\phi)} = \|f\|^2_{L^2(\phi)} + \left\|\overline{\nabla} f\right\|^2_{L^2(\phi)}$, c'est alors un espace de Hilbert, et on note $H^1_0(\phi)$ l'adhérence de C^∞_c dans cet espace de Hilbert. On veut montrer que $H^1_0(\phi) = H^1(\phi)$.

Líen avec les Probabiliteś :

Quand μ est une probabilité et H un sous-espace de $L^2(\mu)$, on dit que $\mathcal{E} : H \times H \to \mathbb{R}$ est une forme de Dirichlet (cf [4]) si $\mathcal{E}$ est bilinéaire symétn.que positive, si H muni de $\sqrt{||f||^2_{L^2(\mu)} + \mathcal{E}(f,f)}$ est un espace de Hilbert et si, $\forall f \in H, \overline{f} = \inf(1, \sup(0, \ f))$ vérifie $\mathcal{E}(\overline{f}, \overline{f}) \leq \mathcal{E}(f,f)$. Toute forme de Dirichlet admet un générateur A défini par la relation $\mathcal{E}(f,g) = -(Af,g)_{L^2(\mu)}$.

Si C^∞_c est dense dans H, cette forme admet également un processus de Markov associé, défini comme le processus de semi-groupe de transition $(e^{tA})_{t>0}$. Par exemple, si μ est la mesure de Lebesgue et si $H = H^1$, alors $\mathcal{E}(f,g) = \frac{1}{2}\int \nabla f.\nabla g dx$ et $Af = \frac{1}{2}\Delta f$, et le processus associé est le mouvement Brownien. Dans le cas qui nous intéresse, $\mu = \phi^2 dx$ et $H = H^1_0(\phi)$, donc la forme de Dirichlet est $\mathcal{E}_\phi(f,g) = \frac{1}{2}\int \overline{\nabla} f.\overline{\nabla} g dx$ et le processus associé est solution de $dX_t = dW_t + \frac{\nabla\phi}{\phi}(X_t)dt$.

Preuve analytique :

Une première méthode pour démontrer que $H^1(\phi) \ = \ H^1_o(\phi)$ est d'utiliser une suite régularisante $(J_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$. Pour toute $f \ \in \ H^1(\phi)$, $J_\varepsilon * f$ est C^∞ et on a $(J_\varepsilon * f)\phi \xrightarrow{L^2(dx)} f\phi$ et $(J_\varepsilon * \overline{\nabla} f)\phi \xrightarrow{L^2(dx)} \overline{\nabla} f \phi$ et de plus, grâce à la relation $\overline{\nabla}(fg) = f\overline{\nabla} g + g\overline{\nabla} f$, on peut montrer que $(J_\varepsilon * \overline{\nabla} f) - \nabla(J_\varepsilon * f)\phi \xrightarrow{L^2(dx)} 0$ ce qui implique la densité de C^∞ dans $H^1(\phi)$. Un rapide raisonnement de troncature donne alors la densité de C^∞_c.

Preuve probabiliste :

Une deuxième façon de démontrer l'égalité $H^1(\phi) = H^1_0(\phi)$ est d'utiliser la loi Q_ϕ du processus associé à la forme $\mathcal{E}_\phi$. On explicite Q_ϕ grâce au théorème de Girsanov, puis on montre que sous Q_ϕ, la probabilité de $(\inf\{t \geq 0 / \phi(X_t) \notin]\frac{1}{n}; n[\} < +\infty)$ tend vers $+\infty$ quand $n \to +\infty$. Ceci signifie que, localement, on peut se ramener par des techniques de théorie du potentiel au cas où $\phi^2 dx$ et dx sont équivalentes. La densité de C^∞_c dans H^1 implique alors celle dans $H^1(\phi)$.

Applications et extensions :

Soit μ une mesure sur $\mathbb{R}^d$ On note Q_μ la loi du processus partant de μ et solution de $dX_t = dW_t + \frac{\nabla\phi}{\phi}(X_i)dt$. On dit que μ est *stationnaire* si la loi de X_t sous Q_μ est μ pour chaque instant t, on dit que μ est *réversible* si sous Q_μ le processus $t \to X_{T-t}$ a même loi que $t \to X_t$, et on dit que μ est *d'énergie finie* si $f|\frac{\nabla\phi}{\phi}|^2 d\mu < +\infty$. Une application importante du résultat de densité des fonctions C^∞_c dans $H^1(\phi)$ est le résultat suivant :

Théorème 1 *Toute mesure stationnaire d'énergie finie est réversible.*

La démonstration repose sur un résultat de minimisation d'entropie de Cattiaux et Léonard [2] et sur le théorème de retournement du temps de Föllmer [3].

Pour finir, il est à noter que la plupart des résultats présentés ici dans le cas "Brownien + Drift" peuvent être étendus à des processus de matrice de diffusion quelconque (cf [5] ou [6]).

Bibliographie

[1] *P. Cattiaux , M. Fradon.* Entropy, reversible diffusion processes and Markov uniqueness. J. Funct. Anal. 138 (1) 243-272, 1996.

[2] *P. Cattiaux, C. Léonard.* Minimization of the Kullback information of diffusion processes. Ann. Inst. Henri Poincaré 30(1) : 83 − 132, 1994. and correction to appear in Ann. Inst. Henri Poincaré in 1995.

[3] *H. Föllmer.* Random fields and diffusion processes, Ecole d'été de probabilités de Saint-Flour. Lect. Notes Math. 1362 :101-204, 1988.

[4] *M. Fukushima, Oshima, M. Takeda.* Dirichlet Forms and Symmetric Markov Processes. Number 19 in Studies in Mathematics. De Gruyter, Berlin New York, 1994.

[5] *M. Fradon.* Diffusions dégénérées, réfléchies ou à dérives singulières : étude des lois et des formes de dirichlet associées. PhD Thesis, 1995.

[6] *M. Fradon.* Entropy, reversible diffusion processes and Markov uniqueness : The case of a general diffusion matrix. Preprint, 1995.

[7] *M. Rockner : T. S. Zhang.* Uniqueness of generalized Schrödinger operators and applications. J. Funct. Anal. 105 :187-231, 1992.

[8] *M. Rockner*; *T. S. Zhang.* Uniqueness of generalized Schrödinger operators - Part II. J. Funct. Anal. 119 :455-467, 1994.

U.F.R. de Mathématiques, Bât. M2,
Université des Sciences et Technologies de Lille,
F-59655 Villeneuve d'Ascq Cedex.
Fradon@alea.univ-lillel.fr

Les suites universellement représentatives en moyenne.

Catherine Gamet

Notre domaine de recherche est la théorie ergodique, et plus précisément l'étude de théorèmes ergodiques multidimensionnels. Les résultats qui ont été exposés dans le cadre de ce forum ont été obtenus en collaboration avec Dominique Schneider (docteur de l'Université Louis Pasteur, Strasbourg) et font l'objet d'un article accepté pour publication aux Annales de l'Institut Henri Poincaré.

Nous considérons un espace d'épreuves $(\Omega, \mathcal{B}, \mathcal{P})$ que nous supposons complet, sur lequel nous définissons une suite $\{S_k,\ k \geq 1\}$ de vecteurs aléatoíres à valeurs dans $\mathrm{Z}^{\mathrm{d}}, d \geq 1$.

Soit $(Y, \mathcal{A}, \mu, \mathcal{T})$ un système dynamique mesuré, c'est-à-dire la donnée d'un espace probabilisé $(Y, \mathcal{A}, \mu)$, la donnée d'une transformation mesurable, bijective, T sur Y, compatible avec l'action de $\mathbb{Z}^d$ et telle que $T\mu = \mu$. Introduisons maintenant la notion de suites universellement représentatives.

Définition 1 *Une suite de vecteurs aléatoires $S = \{S_k,\ k \geq 1\}$ à valeurs dans $\mathbb{Z}^{\mathrm{d}}$, d'espace d'épreuves $(\Omega, \mathcal{B}, \mathcal{P})$ est universellement représentative pour $L^p, p > 1$, s'il existe $\Omega_0 \subset \Omega$ presque sûr tel que pour tout $\omega \in \Omega_0$ nous avons :*

pour tout système dynamique mesuré $(Y, \mathcal{A}, \mu, \mathcal{T})$, pour tout $f \in L^p(\mu)$,

$$\mu \left\{ y : \lim_{N \to +\infty} \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} f\left(T^{S_k(\omega)} y\right) \text{ existe} \right\} = 1.$$

Par exemple pour $d = 1$, la suite $\{p_k + \theta_k,\ k \geq 1\}$ où p_k désigne le $\mathrm{k}^{\text{ième}}$ nombre premier et $\{\theta_k,\ k \geq 1\}$ une suite de variables aléatoires indépendantes, identiquement distribuées et possédant un moment d'ordre strictement positif, est universellement représentative pour $L^p, p > 1$ (voir [9] à ce sujet).

Toujours dans le cas où $d = 1$, M. Lacey, K. Petersen, D. Rudolph et M. Wierdl (cf. théorème 5, [8]) ont montré

Théorème 1 *Soit $X = \{X_k,\ k \geq 1\}$ une suite de variables indépendantes, identiquement distribuées, telle que $\mathrm{E}X_1 \neq 0$ et $\mathrm{E}(X_1)^2 < \infty$. Alors, la suite*

$$S = \left\{ \sum_{j=1}^{k} X_j, k \geq 1 \right\}$$

est universellement représentative pour $L^p, p > 1$.

Dans le cas où $d \geq 2$, ils ont obtenu le résultat suivant (cf. théorème 7, [9]) : Si $f \in L^2(\mu)$, alors

$$\lim_{\substack{N\to\infty \\ N\in\mathcal{N}}} \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} f\infty T^{S_k} \text{ existe, } \mu\text{-presque partout,}$$

où $\mathcal{N} = \left\{ \left[\in^{\sqcup \log \sqcup}\right], \quad \sqcup \in \ \mathbf{N}^* \right\}$.

Les techniques utilisées par M. Lacey, K. Petersen, D. Rudolph et M. Wierdl dans [9], telles que la loi du logarithme itéré de Hartmann-Winter ne permettent pas d'obtenir la convergence ponctuelle pour l'index total. C'est la raison pour laquelle ils ont précisé cette situation avec le théorème suivant (cf. théorème 8, [9]) :

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N(\log N \log N)^{\frac{1}{4}}} \sum_{k=1}^{N} f\infty T^{S_k} = 0, \quad \mu\text{-presque partout .}$$

Il est donc naturel de s'interroger sur le problème de la convergence en moyenne des moyennes ergodiques du type précédent. Plus précisément, nous introduisons la notion de suite aléatoire universellement 2-représentative en moyenne.

Définition 2 *Une suite de vecteurs aléatoires* $S = \{S_k,\ k \geq 1\}$ *à valeurs dans* $\mathbb{Z}^{\mathrm{d}}$*, d' espace d'épreuves* $(\Omega, \mathcal{B}, \mathcal{P})$ *est universellement* 2*-représentative en moyenne, s'il existe* $\Omega_0 \subset \Omega$ *presque sûr, tel que pour tout* $\omega \in \Omega_0$ *nous avons :*
pour tout système dynamique mesuré $(\mathrm{Y},\ A, \mu, T)$ *, pour tout* $f \in L^2(\mu)$ *,*

$$\lim_{N\to+\infty} \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} f\infty T^{S_k(\omega)} \text{ existe au sens } L^2(\mu).$$

Nous obtenons alors le résultat suivant :

Théorème 2 *Soit* $X = \{X_k,\ k \geq\ 1\}$ *une suite de vecteurs aléatoires indépendants, identiquement distribués, à valeurs dans* $\mathbb{Z}^d$ *et d'espace d'épreuves* $(\Omega, \mathcal{B}, \mathcal{P})$ *. Supposons qu'il existe* $\delta > 0$ *tel que* $\mathrm{E}|X_1|^\delta < \infty$.
Alors la suite de vecteurs aléatoires $S = \{\sum_{j=1}^{k} X_j,\ k\ \geq\ 1\}$ *est universellement 2-représentative en moyenne.*

Ce résultat est encore valable si T est une contraction positive de $L^2(\mu)$.

Dans le cas où la suite $X = \{X_k,\ k \geq 1\}$ désigne une suite de variables aléatoires de Rademacher indépendantes, nous savons que la suite des sommes partielles n'est pas universellement représentative (Cf. théorème 4 dans [9]). Plus généralement cette situation se produit dès que $\mathrm{E}(X_1)^2 < \infty$ et $\mathrm{E}X_1 = 0$, et pourtant dans ce cas, la suite des sommes partielles est 2-représentative en moyenne. Ceci fournit donc des exemples de suites vérifiant un théorème ergodique en moyenne, mais pas ponctuellement.

Bibliographie

[1] *X. Fernique*, Régularité de fonctions aléatoires gaussiennes stationnaires, Proba. Th. Rel. Fields 88 521-536 1991

[2] *X. Fernique*, Un exemple illustrant l'emploi des méthodes gaussiennes, à paraître dans les actes de la "Conférence en l'honneur de J.-P. Kahane" Paris Juillet 1993

[3] *X. Fernique*, Une majoration des fonctions aléatoires gaussiennes à valeurs vectorielles, C. R. Acad. Sci. Paris 300 315-318 1985

[4] *X. Fernique*, Fonctions aléatoires à valeurs dans les espaces Lusiniens, Expositiones Mathematicae 1990

[5] *C. Gamet*, Théorèmes de convergence en moyenne et entropie métrique en théorie ergodique„ Thèse, Prépublication IRMA 1996.

[6] *C. Gamet, D. Schneider*, Théorèmes ergodiques multidimensionnels et suites aléatoires universellement représentatives en moyenne„ Ann. Inst. Henri Poincaré, Probabilités et Statistiques (à paraître).

[7] *U. Krenget*, Ergodic Theorems, W. de Gruyter 1985

[8] *L. Kuipers et H. Niederreitter*, Uniform distribution of sequences, Wiley New-York 1974

[9] *M. Lacey, K. Petersen, D. Rudolph - et M. Wierdl*, Random ergodic theorems with universally representative sequences, Ann. Inst. Henri Poincaré 1994

[10] *E. Lesigne*, Spectre quasi-discret et théorème ergodique de Wiener-Wintner pour les polynômes, Ergodic Theory and Dynamical system 13 767-784, Ergod. Th. and Dynam. Syst., 1993

[11] *D. Schneider*, Convergence presque sûre de moyennes ergodiques perturbées, Comptes Rendus Acad. Sci. Paris, Série I 319 1201-1206 1994

[12] *D. Schneider*, Convergence presque sûre de moyennes ergodiques perturbées, Thèse prépublication I.R.M.A. 1994

[13] *D. Schneider et M. Weber*, Weighted averages of contractions along subsequences, à paraître dans les actes de la "Conference on almost everywhere convergence in ergodic and probability theory" Columbus Ohio State University USA Juin 1993

Institut de Recherche de Mathématique avancée
7 rue René Descartes 67084 Strasbourg Cedex
gamet@math.u-strasbourg.fr

Solutions autosimilaires pour une équation en milieux poreux avec terme source.

Anne Keffa

Cet exposé est consacré à l'étude des solutions autosimilaires positives de l'équation parabolique dégénérée

$$\begin{gathered}\varphi_t(t,x) = |\varphi|^q \Delta\varphi(t,x) + |\varphi|^{p-1}\varphi(t,x) \\ (t,x) \in]0,+\infty[\times R^n \\ 0<q<1 \quad \text{et} \quad p>q+1\end{gathered} \tag{1}$$

Les solutions autosimilaires positives de cette équation sont telles que si $\varphi(t,x)$ est solution de (1) alors il en est de même de $\varphi_\alpha(t,\ x)$ avec

$$\varphi(t,\ x) = \alpha^k \varphi(\alpha^l t, \alpha x) \ \ \forall \alpha > 0,$$

$$k = \frac{2}{p-q-1} \ \text{ et } \ l = \frac{2(p-q)}{p-q-1}.$$

Si on pose $r = 1x1t^{-\frac{1}{l}}$ et $u(r) = \varphi(1,\ r)$ l'équation (1) pour $\varphi(l,\ x)$ est équivalente pour $u(r)$ à :

$$\begin{cases} |u|^q u''(r) + \left(\frac{n-1}{r}\right)|u|^q u'(r) + \frac{r}{l}u'(r) + \frac{k}{l}u(r) + |u|^{p-1}u(r) = 0,\ \forall r>0, (*) \\ u(0) = x_0 > 0 \\ u'(0) = 0 \end{cases} \tag{2}$$

Les principaux résultats énoncés sont montrés pour les valeurs de p et q vérifiant les hypothèses suivantes :

$$0<q<\ 1,\ p>q+1,\ p-q<\frac{n+2}{n-2},\ k<\frac{n}{1-q} \Leftrightarrow \frac{p-q-1}{1-q} > \frac{2}{n}.$$

Le but de cet article est de démontrer l'existence d'une solution autosimilaire positive à symétrie radiale, de classe C^1 et à support compact en espace de l'équation (1). Pour celà on étudie les solutions positives de l'équation différentielle (2) vérifiée par le profil des solutions autosimilaires et on montre le résultat suivant.

Théorème 1 *Soit* $\alpha = \inf\{x_0 > 0,\ u(r,\ x_0) > 0, \forall r \geq 0\}$, *alors* $0<\alpha<+\infty$, *il existe* $z = z(\alpha)$ *tel que* $u(r,\ \alpha) > 0, \forall r \in [0, \alpha[$ *et* $u(z,\alpha) = u'(z,\ \alpha) = 0$.

Pour démontrer ce théorème on définit tout d'abord $T^*(x_0)$ le temps maximal d'existence d'une solution positive de l'équation (2) . On établit que si $u(r,x_0)$ est strictement positive sur R^{+*} alors $T^*(x_0) = +\infty$, et $\lim_{r\to T^*(x_0)} u(r,x_0) = \lim_{r\to T^*}(x_0)\, u'(r,x_0) = 0$. Sinon on a $T^*(x_0) < +\infty, \lim_{r\to T^*(x_0)} u(r,x_0) = 0$ et $\lim_{r\to T^*(x_0)} u'(r,x_0) \leq 0$.

On peut donc définir les ensembles suivants :

$$A = \{x_0 > 0 \backslash T^*(x_0) = +\infty\}$$
$$B = \{x_0 > 0 \backslash T^*(x_0) < +\infty\}$$

et

$$B = B_1 U B_2$$

avec

$$B_1 = \{x_0 \in B \backslash u'(T^*(x_0)) < 0\}$$
$$B_2 = \{x_0 \in B \backslash u'(T^*(x_0)) = 0\},$$

La première étape de la démonstration consiste à montrer par des méthodes classiques que A et B sont non vides. Ceci entraîne en particulier que $0 < \alpha < +\infty$. Ensuite on montre, grâce à l'analyse des solutions dans le plan de phase, que A est un ensemble ouvert. Enfin dans la troisième étape on prouve que B_1 est aussi un ensemble ouvert. On peut alors conclure que B_2 est non vide et que α appartient à B_2, ce qui est le résultat énoncé dans le théorème.

Bibliographie

[1] *H. Brezis, L.A. Peletier, D. Teman* A very singular solution of the heat equation with absorbtion. Arch. Rational Mech. Anal. p.186-209 (1986).

[2] *M. Escobedo, O. Kavian* Variational problems related to self similar solutions of the heat equation . Nonlinear Anal. **11**, pp.1103-1133 (1987).

[3] *A. Haraux, F. B. Weissler* Non-uniqueness for a semilinear initial value problem . Ind. Univ. Math. J. **31**, pp.167-189 (1982).

[4] *D. D. Joseph, T. S. Lundgren* Quasilinear Dirichlet problems driven by positive sources . Arch. Rational Mech. Anal. **49**, pp. 241-249 (1973).

[5] *L. A. Peletier, D. Ternan* A very singular solution of the porous medium with absorbtion. J.Diff.eq. *65*, pp. 396-410 (1986).

[6] *L. A. Peletier, D. Teman, F. B. Weissler* On the equation $\Delta u + \frac{1}{2} x \nabla u + f(u) = 0$, Arch. Rat. Mech. Anal. **94**, pp.83-89 (1986).

[7] *Y. W. Qi* . Proceedings of the Royal Society of Edinburgh, **123A**, pp. 373-390, (1993).

[8] *F. B. Weissler* Rapidly Decaying Solutions of an ordinary differential equation with application to semilinear elliptic and parabolic partial differential equations. Arch. Rat. Mech. Anal. **91**, number 3, pp. 247-266 (1986).

Laboratoire Analyse, Géométrie et Applications URA CNRS 742,
Institut Galilée, Université Paris Nord,
Avenue J.B Clément F-93430 Villetaneuse.
Kelfa@math.univ-paris13.fr

Stabilisation interne de l'équation des ondes.

Solange Kouémou Patcheu

Ce travail entre dans le cadre du contrôle des systèmes d'équations aux dérivées partielles non linéaires.

Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n (n \geq 1)$, de frontière Γ régulière. On fixe deux nombres $p > 1, q \geq 1$ et on considère une fonction continue et strictement croissante g, vérifiant les conditions suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{ll} g(0) = 0 & \\ c_1|s|^p \leq |g(s)| \leq c_2|s|^{1/p}, & \text{si } |s| \leq 1 \\ c_3|s| \leq |g(s)| \leq c_4|s|^q, & \text{si } |s| > 1 \end{array} \right. \tag{1}$$

Par exemple, la fonction

$$g(s) := \left\{ \begin{array}{ll} \sqrt{s}, & \text{si } s \geq 0 \\ -s^2, & \text{si } s \leq 0 \end{array} \right.$$

vérifie (1) avec $p = q = 2$.
Considérons l'équation des ondes avec une perturbation non linéaire :

$$\left\{ \begin{array}{l} u'' - \Delta u + g\left(u'\right) = 0 \text{ dans } \Omega \times (0, \infty) \\ u = 0 \text{ sur } \Gamma \times (0, \infty) \\ u(0) = u_0 \text{ et } u'(0) = u_1 \text{ dans } \Omega \end{array} \right. \tag{2}$$

D'après Haraux [3], pour $(u_0, u_1) \in H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$ donné quelconque ; ce problème admet une solution unique

$$u \in C\left([0, \infty); H_0^1(\Omega)\right) \cap C^1\left([0, \infty); L^2(\Omega)\right)$$

et l'énergie $E : [0, \infty) \to [0, \infty)$ de la solution, définie par

$$E = 1/2 \int_\Omega \left|u'\right|^2 + |\nabla u|^2 dx,$$

est une fonction décroissante. Concernant la *vitesse* de décroissance, il est connu d'après des travaux de Haraux [3] et Zuazua [8] que

$$E(t) \leq c\left(\Omega, u_0, u_1\right) t^{-2/(p-1)}, t > 0.$$

Notre objectif est d'estimer la constante c(Ω, u_0, u_1) .
Théorème 1 *Supposons que* $(n-2)q \leq n+2$ *dans* (1). *Alors on a l'estimation*

$$E(t) \leq c(\Omega)\left(1 + E(0)^{\frac{pq-1}{q(p-1)}}\right) t^{\frac{-2}{p-1}}, \qquad \forall t > 0 \ , \tag{3}$$

où la constante $c(\Omega)$ *dépend seulement de* Ω.

Ce théorème améliore des résultats antérieurs de Conrad-Leblond-Marmorat[2], Carpio [1] et Souplet [7], en affaiblissant leurs hypothèses sur la fonction g et/ou en rendant meilleures les estimations. Notre méthode est différente et semble être plus simple.

Nous décrivons maintenant les idées de la démonstration. Il suffit de montrer que

$$\int_s^T E^{\frac{p+1}{2}} \leq c(\Omega)\left(1+E(0)^{\frac{pq-1}{2q}}\right)E(S), \quad 0\leq S<T \tag{4}$$

Pour conclure, on appliquera des résultats antérieurs de Komornik [4]. On multiplie l'équation par $uE^{\frac{p-1}{2}}$ et on intègre par parties sur $\Omega\times[S,T]$:

$$\begin{aligned}2\int_S^T E^{\frac{p+1}{2}}\mathrm{dt} = &-\left[E^{\frac{p-1}{2}}\int_\Omega u'u\mathrm{dx}\right]_S^T + \frac{p-1}{2}\int_S^T E^{\frac{p-3}{2}}E'\int_\Omega u'u\mathrm{dxdt}\\ &+\int_S^T E^{\frac{p-1}{2}}\int_\Omega\left(2\left|u'\right|^2 - ug\left(u'\right)\right)\mathrm{dxd}t\end{aligned} \tag{5}$$

Il faut majorer le second membre. On applique les inégalités de Hölder et Young, on trouve :

$$\begin{aligned}-\left[E^{\frac{p-1}{2}}\int_\Omega u'u\right]_S^T + \int_S^T E^{\frac{p-1}{2}}\int_\Omega 2\left|u'\right|^2 + \frac{p-1}{2}\int_S^T E^{\frac{p-3}{2}}E'\int_\Omega u'u\\ \leq c(\Omega)E(0)^{\frac{p-1}{2}}E(S) + \int_S^T E^{\frac{p+1}{2}}\mathrm{dt}\end{aligned} \tag{6}$$

En remplaçant le résultat trouvé dans l'identité précédente, on a

$$\int_S^T E^{\frac{p+1}{2}}\mathrm{dt} \leq c(\Omega)E(0)^{\frac{p-1}{2}}E(S) + \int_S^T E^{\frac{p-1}{2}}\int_\Omega\left|ug\left(u'\right)\right|\mathrm{dxdt} \tag{7}$$

Si on applique encore les inégalités de Hölder et Young, on obtient

$$E^{\frac{p-1}{2}}\int_\Omega\left|ug\left(u'\right)\right|\mathrm{dx} \leq c(\Omega)E^{\frac{p}{2}}\left|E'\right|^{\frac{q}{q+1}} \leq \frac{1}{3}E^{\frac{p(q+1)}{2}} + c(\Omega)\left|E'\right| \tag{8}$$

Ceci ne permet pas de conclure. Pour avoir une bonne majoration, il faut décomposer d'une manière astucieuse $E^{\frac{p}{2}}$:

$$E^{p/2}\left|E'\right|^{q/(1+q)} = \left(\left|E'\right|^{q/(q+1)}E^{(pq-1)/2(q+1)}\right)\left(E^{(p+1)/2(q+1)}\right) \tag{9}$$

Appliquant l'inégalité de Young avec les exposants $\frac{q+1}{q}$ et $q+1$, on en déduit que

$$c(\Omega)E^{p/2}\left|E'\right|^{q/(1+q)} \leq c(\Omega)E(0)^{\frac{pq-1}{2q}}\left|E'\right| + \frac{1}{3}E^{\frac{p+1}{2}} \tag{10}$$

Substituant (8)-(10) dans (7) on trouve

$$\int_S^T E^{\frac{p+1}{2}}\mathrm{dt} \leq c(\Omega)\left(1+E(0)^{\frac{pq-1}{2q}}\right)E(S) \tag{11}$$

d'où (4). Prenant la limite quand $T \to +\infty$ on obtient

$$\int_S^{+\infty} E^{\frac{p+1}{2}}\mathrm{dt} \leq c(\Omega)\left(1+E(0)^{\frac{pq-1}{2q}}\right)E(S),\ \forall S \geq 0 \tag{12}$$

Appliquant un résultat de Komornik [4], théorème 9.1, p 124, on en déduit le théorème.

Voir [5], [6] pour la démonstration détaillée et les résultats plus généraux.

Bibliographie

[1] *A. Carpio*, Sharp estimates of the energy for the solutions of some dissipative second order evolution equations, Potential Analysis 1 (1992), 265-289.

[2] *F. Conrad, J. Leblond and J. P. Marmorat*, Stabilization of second order evolution equations by unbounded nonlinear feedback, Proc. of the Fifth IFAC Symposium on Control of Distributed Parameter Systems, Perpignan, june 1989, A. El Jai and M. Amouroux Eds., 101-116.

[3] *A. Haraux*, Semi-linear hyperbolic problems in bounded domains, Mathematical Reports, Vol. 3, Part 1, J. Dieudonné Editor, Harwood Academic Publishers, Gordon and Breach, 1987.

[4] *V. Komornik*, Exact controllability and stabilization, the multiplier method, Research in Applied Mathematics, John Wiley& Sons and Masson (1994).

[5] *S. Kouémou Patcheu*, On the decay of solutions of some semilinear hyperbolic problems, à paraître dans PanAmerican Mathematical Journal,6, numéro 3,1996.

[6] *S. Kouémou Patcheu*, Stabilisation interne de certains systèmes distribués semilinéaires, Thèse de Doctorat de l'Université de Strasbourg I, 1995.

[7] *P. Souplet*, Th$\backslash \propto$ e de Doctorat de 1'Universite' Paris VI, 1994,

[8] *E. Zuazua*, Stability and decay estimates for a class of nonlinear hyperbolic problems, Asymptotic Analysis 1. (1988), 161-185.

Institut de recherche mathématique avancée (URA 01 CNRS)
Université Louis Pasteur
7 rue René Descartes
67084 Strasbourg Cedex
kouemou@math :u-strasbg.fr

Reconnaissabilité de langages de numeration généralisés.

Nathalie Loraud

Nous nous intéressons à des systèmes de numération généralisés dans une base $(d_n)_n$, où $(d_{r\}})_n$ est une suite strictement croissante d'entiers de premier terme 1, appelée aussi échelle de numération. Tout entier naturel n admet un développement du type :

$$n = \sum_{i=0}^{k} n_i d_i$$

où les n_i sont des entiers positifs ou nuls. Le mot $\tilde{n} = n_k \dots n_0$ associé à cette écriture est unique si les inégalités $n_0 d_0 + \cdots + n_j d_j < d_{j+1}$, sont vérifiées pour tout $j = 0, \dots, k$; ce qui signifie que nous utilisons l'algorithme "glouton" pour écrire les entiers en base $(d_n)_n$. Nous renvoyons à [?] pour plus de détails sur ces systèmes de numération dits "standards"
L'ensemble $\mathcal{L}(d)$ de tous les mots $\tilde{n}$ est appelé le langage de la numération :

$$\mathcal{L}(d) := \left\{ n_k \dots n_0 \in \mathbb{N}^{k+1} ; \forall j \leq k, n_0 d_0 + \cdots + n_j d_j < d_{j+1} \right\}$$

La question principale qui nous préoccupe est de caractériser les échelles de numération dont le langage est régulier, *i.e.* reconnaissable par un automate fini ; c'est une question posée par J. Shallit dans [8]. Nous rappelons, à cet égard, les définitions d'automate (fini) sur un alphabet A, de langage sur A et de reconnaissabilité :

Un *automate fini* sur A est un quadruplet $\mathcal{A} = (S, \Phi, I, T)$ où S est un ensemble fini appelé ensemble des états, $\Phi = (\phi_a)_{a \in A}$ est la famille des flèches de l'automate, représentée par un graphe, I est un état distingué de S appelé état initial et $T \subset S$ est l'ensemble des états terminaux. Un *langage* sur A est un sous ensemble $\mathcal{L}$ du monoide libre A^* engendré par A. Le langage $\mathcal{L}$ est reconnu par un automate $\mathcal{A}$ si l'ensemble des mots de $\mathcal{L}$ coïncide avec l'ensemble des mots obtenus comme inversion de la concaténation des étiquettes d'un chemin dans l'automate, partant de I et aboutissant à un état terminal, ce qui veut dire que le mot $n_k \dots n_0$ est dans le langage L si et seulement si l'on peut définir successivement les états $A_1 = \Phi_{n_0}(A_0), \dots, A_k = \Phi_{n_k}(A_{k-1})$. On dira que $\mathcal{L}$ est *reconnaissable par automate* ou *régulier* s'il existe un automate fini $\mathcal{A}$ qui le reconnait.

Nous allons étudier des classes particulières de suites, et déterminer dans chaque classe, celles qui sont base d'un système de numération dont le langage est reconnaissable par automate.

J. Shallit a démontré qu'une condition nécessaire est que la suite $(d_n)_n$ soit récurrente linéaire à coefficients dans $\mathbb{Z}$, mais que ce n'est pas une condition suffisante.

Nous obtenons les résultats suivants

1. Suites arithmético-géométriques

Théorème 1 *Soit* $(d_n)_n$ *une suite d'entiers naturels arithmético-géométrique de coefficients* a *et* b *dans* $\mathbb{Z}$(*i.e.* $\forall n \geq 0,\ d_{n+1} = ad_n + b$) *et de premier terme* $d_0 = 1.(d_n)_n$ *est la base d'un système de numération dont le langage est régulier si et seulement si* ($a > 1$ et $b \geq 0$) *ou* ($a = 1$ et $b \geq 1$) .

Ce corollaire permet de voir 1'importance du choix de d_1 pour l'obtention d'un langage régulier (la récurrence étant fixée), ce qui répond à une question de G. Hansel.

Corollaire 1 *Soit* $(d_n)_n$ *une suite d'entiers naturels vérifiant une relation de récurrence d'ordre 2 du type* : $\forall n \geq 1, d_{n+1} = (a+1)d_n - ad_{n-1}$, *où* $a \in \mathbb{Z}$, *et de premier terme* $d_0 = 1$. *Alors* $\mathcal{L}(d)$ *est régutier si et seulement si* ($1 < a \leq d_1$) *ou* ($a = 1$ *et* $d_1 \geq 2$) .

2. Bases de Cantor

Soit $(q_n)_n$ une suite d'entiers telle que : $q_0 = 1$ et $q_n \geq 2$, pour tout $n \geq 1$. Soit $(d_n)_n$ la suite définie par : $d_n = q_0 \dots q_n$, $n \geq$ O. C'est la base d'un système de numération appelé *système de Cantor associé à la suite* $(q_n)_n$ et le langage de cette numération est donné par le lemme classique suivant :

Lemme 1 $\mathcal{L}(d) = \{n_{k \cdots n_0} \in \mathbb{N}^{k+1}; \forall j \leq k, n_j < q_{j+1}\}$.

Dans ce qui suit, on caractérise les bases de Cantor qui sont aussi récurrentes linéaires à coefficients dans $\mathbb{Z}$.

Théorème 2 *Soit* $(d_n)_n$ *la base du système de Cantor associé à la suite d'entiers naturels* $(q_n)_n$. *Les assertions suivantes sont équivalentes* :

i) la suite $(d_n)_n$ *est récurrente linéaire à coefficients dans* $\mathbb{Z}$;

ii) la suite $(q_n)_n$ *est ultimement périodique*;

iii) la série $\Sigma_{n=0}^{+\infty} d_n X^n$ *est* $\mathbb{N}$*-rationnelle ;*

i) le langage $\mathcal{L}(d)$ *est reconnaissable par automate.*

Exemples : quand on développe les entiers en base k, on obtient un langage reconnaissable car dans ce cas $d_{n+1} = kd_n$ i.e $(q_n)_n$ est la suite constante $(k)_n$.
La représentation factorielle ne fournit pas, quant à elle, un langage régulier ;
en effet, $d_{n+1} = (n+1)d_n$ et $(q_n)_n = (n+1)_n$ n'est pas une suite ultimement périodique.

3. Systèmes de numeration d'Ostrowski

Soit un nombre irrationnel $\alpha > 1$. On note $\Delta(\alpha) = [a_0; a_1, a_2, \ldots]$ son développement en fraction continue.

Pour tout $n \geq 0$, $\dfrac{p_n(\alpha)}{q_n(\alpha)}$ désigne le n$^{\text{ieme}}$ convergent de α : $\dfrac{p_n}{q_n} = [a_0; a_1, \ldots, a_n]$ et l'on a pour les deux suites $(q_n)_{n\geq 0}$ et $(p_n)_{n\geq 0}$ les relations de récurrence classiques :

$$\begin{array}{c} q_0 = 1; q_1 = a_1 \text{ et } \forall n \geq 2, q_n = a_n q_{n-1} + q_{n-2}; \\ p_0 = a_0; p_1 = a_1 a_0 + 1 \text{ et } \forall n \geq 2, p_n = a_n p_{n-1} + p_{n-2} \end{array}.$$

Si $\alpha > 1$, la suite $Q_\alpha = (q_n(\alpha))_n$ est strictement croissante, de premier terme 1, pourvu que $a_1 > 1$; sinon on considère la suite $Q_\alpha = (q_{n+1}(\alpha))_n$.Pour le système de numération de base Q_α le langage associé est donné par le lemme suivant :

Lemme 2 *([7]) Si* $\alpha > 1$ *est un nombre réel de développement* $\Delta(\alpha) = [a_0; a_1, a_2, \ldots]$, *alors*

$$\mathcal{L}(Q_\alpha) = \{n_k \ldots n_0; \forall j \leq k,\ (0 \leq n_{\mathrm{j}} < a_{j+1}) \text{ } ou \text{ } (n_j = a_{\mathrm{i}+1} \text{ } et \text{ } n_{j-1} = 0)\}.$$

Le système de numération de base Q_α est appelé *système de numération d'Ostrowski relatif au nombre réel* α, [7].
Le problème de la reconnaissabilité est totalement résolu pour ces langages. J. Shallit a obtenu une caractérisation qu'il est possible de retrouver de façon simple. Il en résulte que, ici aussi, pour qu'une échelle de numérotation donne un langage régulier, il suffit qu'elle soit récurrente linéaire à coefficients dans $\mathbb{Z}$:

Théorème 3 *Soit* Q_α *la suite des dénominateurs des convergents d'un nombre réel* $\alpha > 1$. *Les assertions suivantes sont équivalentes* :

i) $\mathcal{L}(Q_\alpha)$ *est reconnaissable par automate* ;
ii) $\Delta(\alpha)$ *est ultimement périodique* ;
iii) α *est un nombre quadratique* ;
iv) Q_α *est récurrente linéaire à coefficients dans* $\mathbb{Z}$.

Bibliographie

[1] *A. Bertrand*, Comment écrire les nombres entiers dans une base qui n'est pas entière. à paraître dans Acta. Math. Acad. Sci. Hungar.

[2] *A. S. Fraenkel*, Systems of numeration. Amer. Math. Monthly **92** (1985), 105-114.

[3] *C. Frougny*, Representations of numbers and finite automata. Math. Syst. Theory **25** (1992), 37-60.

[4] *C. Frougny*, Linear Numeration Systems of Order Two. Inform. & Comput. 77 (1988) 233-259.

[5] *H. W. Lenstra, J. Shallit*, Continued fractions and linear recurrences. Math. Comp. **61** (1993), 351-354.

[6] *N. Loraud* β-shift, systhmes de numération et automates. J.T.N. B **7** (1995) 473-498

[7] *A. Ostrowski* : Bemerkungen zur Theorie der Diophantishen Approximationene. Abh. Math. Sem. Hamburg **1** (1922), 77-98.

[8] *J. Shallit2* Numeration Systems, Linear Recurrences, and Regular Sets. Inform. and comput. to appear

CMI Université de Provence
39, rue Joliot Curie, 13453 Marseille FRANCE
loraud@gyptis.univ-mrs.fr

Topologie des germes jacobiens

Hélène Maugendre

Mes travaux de recherche portent sur la théorie des singularités de germes de courbes planes complexes. Les domaines concernés par ce sujet sont :

• La topologie des singularités des hypersurfaces complexes.

• Les résolutions (plongées) des singularités des courbes planes.

• La théorie des noeuds.

• La monodromie entière des courbes planes.

• Les invariants polaires des courbes planes.

• Les revêtements ramifiés et variétés de dimension trois (varitétés de Seifert et de Waldhausen).

• La théorie des déformations.

Le point de départ des recherches effectuées dans le cadre de ma thèse est composé des articles Courbes polaires et topologie des courbes planes, Ann. Scien. E.N.S., 4ième série, t. 24, 1991, p.141-169, et sur le comportement des courbes polaires associées aux germes de courbes planes, Compositio Mathematica, 72, 1989, p. 87-113) de D.T. Lê, F. Michel et C. Weber. Dans le premier de ces articles, Une caractérisation précise d'invariants du type topologique d'un germe de fonction analytique f (appelés *quotients polaires de f*) y est donnée. De plus, dans le second article, D.T. Lê, F. Michel et C. Weber ont étudié ces quotients à travers la résolution minimale de f. Ils ont ainsi obtenu une méthode de calcul des quotients polaires de f, et ont décrit leur comportement dans la résolution minimale de f. Dans le même esprit, au cours de mon travail de recherches, j'ai été amenée à définir une théorie générale qui m'a permis de caractériser de façon précise de nouveaux invariants de type topologique et de les étudier en détail. Poursuivre plus loin l'étude de cette théorie constitue le premier de mes objectifs. Je vais tenter de résumer ici, ce en quoi il consiste précisément. Pour cela, il me faut tout d'abord expliquer succinctement la théorie mise en place. Elle consiste à étudier le *lieu jacobien* d'une paire de germes de fonctions analytiques de $\mathbb{C}^2$ dans $\mathbb{C}$, noté $(g,\ f)$. Le lieu jacobien de (g, f) est defini comme suit. Nous considérons, en l'origine, le germe d'application analytique Φ donné par :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C}^2_{,0} & \xrightarrow{\Phi} & \mathbb{C}^2_{,0} \\ (x,y) & \longmapsto & (g(x,y), f(x,y)) \end{array}$$

Le déterminant de la matrice jacobienne de Φ est le germe D égal à :

$$D = \frac{\partial g}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{\partial g}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial x}.$$

Nous appelons *germe jacobien* associé à (g, f) , le produit des composantes de D, avec multiplicité, qui ne divisent pas $f \cdot g$. Nous le notons $\hat{\mathcal{J}}$.

Remarques. - Si $f = \prod_{i=1}^{R} f_i^{r_i}$ et si $g = \prod_{i=1}^{S} g_j^{s_j}$ sont des décompositions de f et g en leurs facteurs irréductibles distincts, et si $\tilde{f}$ et $\tilde{g}$ désignent les germes réduits $\tilde{f} = \prod_{i=1}^{R} f_i$ et $\tilde{g} = \prod_{j=1}^{S} g_j$, alors :

$$\hat{\mathcal{J}} = \frac{\partial \tilde{g}}{\partial x}\frac{\partial \tilde{f}}{\partial y} - \frac{\partial \tilde{g}}{\partial y}\frac{\partial \tilde{f}}{\partial x}.$$

Si f et g sont à singularité isolée à l'origine, alors $\hat{\mathcal{J}} = D$.

Si $\hat{\mathcal{J}}$ évalué en zéro est non nul, il est clair que f et g sont lisses et transverses à l'origine. Sinon, le *lieu jacobien* de $(g,\ f)$, noté $\mathcal{J}$, est le germe de courbe réduit, lieu des zéros de l'équation $\hat{\mathcal{J}} = 0$.

Par exemple, si $f(x,\ y) = y^2$ et $g(x, y) = x^a - y^b$, avec $a > 1$, alors $\hat{\mathcal{J}}(x, y) = ax^{a-1}$.
La courbe $\mathcal{J}$ est donc l'axe d'équation $x = 0$. Par conséquent, $\mathcal{J}$ est lisse à l'origine.

Remarques. - Si le germe g est une forme linéaire transverse à f, alors le germe jacobien de $(g,\ f)$ est appelé *germe polaire* de f.

Le type analytique du lieu jacobien de (g, f) est un invariant du type analytique de $(g,\ f)$. En effet, s'il existe un isomorphisme analytique φ entre $\Phi_1 = (g_1, f_1)$ et $\Phi_2 = (g_2, f_2)$, alors $D(\Phi_2) = u(x, y) \cdot D(\Phi_1)$, où $u(0, 0) \neq 0$. Par consequent, Φ_1 et Φ_2 ont même lieu jacobien. Par contre, le type topologique du lieu jacobien n'est pas un invariant du type topologique de (g, f) . Par exemple, les paires de germes $(y, x^3 - y^2)$ et $(y, x^3 - y^2 + x^2y^5)$, ont même type topologique, mais leurs lieux jacobiens respectifs sont $\{x\ = 0\}$ et $\{x = 0\}1j\{3x + 2y^5\ = 0\}$. Ceux-ci ont clairement un type topologique différent.

L'image par Φ de J est une courbe appelée *courbe discriminante* de (g, f) . Nous la notons Δ. Désignons par $(u,\ v)$ les coordonnées complexes de $\Phi(\mathbb{C}_0^2)$. Par définition, $\{u = 0\} = \Phi(\{g = 0\})$ n'est pas une branche de Δ. Donc, si δ représente une branche de Δ, il existe un nombre rationnel strictement positif q_δ/p_δ (où q_δ est premier à p_δ), un entier strictement positif m et une paramétrisation de Puiseux de δ de la forme :

$$u = v^{\frac{q_\delta}{P_\delta}} \left(a + \sum_{k \in N^*} b_k v^{\frac{k}{m}} \right)$$

où $a \in \mathbb{C}^*, b_k \in \mathbb{C}$.

Nous appelons *ensemble des quotients jacobiens de* (g, f) , l'ensemble constitué des nombres rationnels q_δ/p_δ.

Remarque. - Dans le cas où g est une forme Iinéaire transverse à f, les nombres rationnels p_δ/q_δ sont les *quotients polaires* de f définis par B. Teissier et D.T. Lê.

Dans une première partie on donne une interprétation topologique précise des quotients jacobiens de (g, f) , qui permet de les calculer, d'une part, en termes d'enlacements d'entrelacs, et d'autre part, en termes d'exposants de contact dans la résolution minimale de $f \cdot g$. A l'aide de ces résultats on démontre que l'ensemble des quotients jacobiens de (g, f) est un invariant du type topologique de $(g,\ f)$.

Puis on établit les relations qui existent entre les quotients jacobiens de $(g,\ f)$ et les quotients polaires de f (ce sont les quotients jacobiens de $(\ell,\ f)$, où ℓ est une forme linéaire qui ne divise pas f), de g, et de $f \cdot g$. On étudie également le comportement de croissance des quotients jacobiens de $(g,\ f)$ dans la résolution minimale du produit de germes $f \cdot g$.

Une première application de ces résultats constitue la réponse à la question suivante, posée par les professeurs D.T. Lê et C. Weber dans le cadre de leur étude de la conjecture jacobienne :

Si $\mathcal{J}$ est lisse en l'origine, f ou g est-il lisse ?.

On montre que toute composante irréductible de f transverse à g et au germe jacobien $\hat{\mathcal{J}}$ est lisse et transverse aux autres composantes irréductibles de f. De nombreux exemples indiquent que, si f et g ne sont pas transverses, on ne peut pas espérer limiter la complexité topologique de la singularité du germe produit $f \cdot g$. Cependant, si f et g sont des germes transverses, je démontre qu'il existe $(a,\ b) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*, b \geq a \geq 2$, tel que $f \cdot g$ soit topologiquement équivalent au germe $y(x^a - y^b)$.

Bibliographie

[1] *E. Brieskorn et H. Knorrer* Plane Algebraic Curves. Birkhauser Verlag, 1986.

[2] *A. Chenciner* Courbes algébriques planes. Publications mathématiques de l'Université Paris 7, 1978.

[3] *W. Jaco et P. Shalen* Seifert Fibered Spaces in Three-Manifolds. A.M.S., Memoirs, n^o 220

[4] *D.T. Le* Calcul du nombre de cycles évanouissants d'une hypersurface complexe. Ann. Inst. Fourier 23, fasc. 4, 1973, p. 261-270.

[5] *D. T. Le, F. Michel, C. Weber* Courbes polaires et topologie des courbes planes . Ann. Scien. E.N,S., 4ième série, T 24, 1991, p.141-169.

[6] *D. T. Le, F. Michel, C. Weber* Sur le comportement des courbes polaires associées aux germes de courbes planes. Compositio Mathematica, 72, 1989, p.87-113.

[7] *H. Maugendre* Topologie de germes de courbes planes à lieu jacobien lisse. Comptes-Rendus de l'Académie des Sciences, t. 320, Série 1, p. 325-328, 1995.

[8] *H. Maugendre* Topologie des germes jacobiens. Thèse de doctorat, 1995.

[9] *J. Milnor* Singular Points of Complex Hypersurfaces. Princeton University Press, 1968.

[10] *F. Michle et C. Weber* Topologie des germes de courbes planes à plusieurs branches . prépublication de l'Université de Genève, 1985.

[11] *Saeki* Topological Types of Complex Isolated Hypersurface Singularities. Kodai Math. J. 12 (1989), p.23-29.

[12] *B. Teissier* Singularities, Arcata 1974 . Proc. AMS Symp., n^o 29.

C.M.I.
39 rue Joliot-Curie
13 453 Marseille Cedex 12
maugendr@gyptis.univ-mrs.fr

Equations intégrales de frontière
pour des problèmes de plaques polygonales à bord libre.

Christine Nazaret

On se propose d'étudier la déformation d'une plaque mince polygonale à bord libre sous chargement mécanique, par une méthode d'équations intégrales de frontière. Notons Ω l'ouvert de $\mathbb{R}^2$ correspondant à l'intérieur de la plaque, de frontière $\Gamma = \cup_{j=1}^{N} \Gamma_j, \Gamma_j$ étant le j^{eme} côté du polygone.

Il s'agit de résoudre le problème variationnel

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } u \in H^2(\Omega) \text{ tel que} \\ a(u,v) = \langle f, v \rangle \quad \forall v \in H^2(\Omega) \end{array} \right. \tag{1}$$

où $a(u,v) = I\nu \Delta u \Delta v \Omega + (1-\nu) \partial_{ij} u \partial_{ij} v dx$ et ν est le coefficient de Poisson du matériau constituant la plaque $(0 < \nu < 1/2)$.

Lorsque Ω est régulier, ce problème (1) est équivalent au problème aux limites

$$\left\{ \begin{array}{ll} \Delta^2 u = f & \text{dans } \Omega \\ M_n(u) = \nu \Delta u + (1-\nu) \frac{\partial^2 u}{\partial n^2} = 0 & \text{sur } \Gamma = \partial\Omega \\ K_n(u) = \frac{\partial \Delta u}{\partial n} + (1-\nu) \frac{d}{ds} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t \partial n} \right) = 0 & \text{sur } \Gamma \end{array} \right. \tag{2}$$

dont la résolution par équations intégrales de frontière a été faite par Giroire et Nédélec [3]. Les opérateurs M_n et K_n sont appelés moment fléchissant et effort tranchant.

Nous obtenons les r$'\propto$ ultats suivants :

A. Problème variationnel

En utilisant un cadre général défini dans [4] et en s'inspirant d'idées développées dans [2], on définit un opérateur TMK qui agit sur des couples $(g,\ h)$ de $\mathcal{H}(\Gamma)$ sous espace de $\Gamma \mathrm{I}_{i=1}^{N} H^3 \tilde{2}(\Gamma_j) \times H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_j)$ dont les éléments vérifient certaines conditions de compatibilité aux coins (cf. [4]). Dans un domaine régulier, l'opérateur TMK coïncide avec $(-K_n,\ M_n)$.

Definition 1 *Pour* u $\in H^2(\Delta^2, \Omega) = \{v \in H^2(\Omega);\ \Delta^2 v \in L^2(\Omega)\}_f$ *nous définissons* $T_{int}MK(u) \in (\mathcal{H}(\Gamma))$ ' *par* : $\forall (g,h) \in \mathcal{H}(\Gamma)$

$$\langle T_{int}MK(u), (g,h) \rangle = -\int_\Omega \Delta^2 u R dx + \int_\Omega \{\nu \Delta u \Delta R + (1-\nu) \partial_{ij} u \partial_{ij} R\} dx$$

où $R \in H^2(\Omega)$ *est un relèvement de* $(g,\ h)$, *i.e.* $\gamma_0 R = g$ *et* $\gamma_1 R = h(\gamma_0$ *et* γ_1 *étant les opérateurs trace et trace de la dérivée normale*).
Pour $u \in W_0^2(\triangle^2,\ \Omega')$ *(cf. [3]), nous définissons* $T_{ext}MK(u) \in ('H(\Gamma))'$ *de manière similaire sur* $\Omega' = R^2 \backslash \overline{\Omega}$. *Nous définissons aussi* $[TMK(u)] = T_{int}MK(u) - T_{ext}MK(u)$.

On transforme (1) en un problème équivalent (3) avec $q = -T_{int}MK(u_E)$ où $u_E = E * f$ (E solution élémentaire du bilaplacien).

Lemma 1 *Le problème suivant admet une unique solution dans $V = H^2(\Omega)/P_1(\Omega)$ (polynôme de degré 1)*

$$\left\{\begin{array}{l} \textit{Trouver } u \in V \textit{ tel que} \\ a(u,v) = \langle q, (\gamma_0 v, \gamma_1 v)\rangle, \\ \forall v \in V \end{array}\right. \quad \Leftrightarrow \quad \left\{\begin{array}{l} \textit{Trouver } u \in V \textit{ tel que} \\ \Delta^2 u = 0 \text{ dans } \Omega, \\ T_{int}MK(u) = q. \end{array}\right. \tag{3}$$

A l'aide de [1], on montre que pour une plaque strictement polygonale et pour des seconds membres f de (1) qui sont $L^2(\Omega)$ ou des diracs dans Ω, la solution u est dans $H^s(\Omega)$ avec $s > 5/2$.

2 Problème du bord

Notre but est de transformer notre problème en un système d'équations intégrales sur le bord. Nous donnons ici une représentation intégrale des solutions de $\Delta^2 u = 0$ dans Ω et Ω', à l'aide de l'opérateur TMK.

Proposition 1 *Soit $u \in H^2(\Omega) \times W_0^2(\Omega^l)$ telle que $\Delta^2 u = 0$ dans $\Omega \cup \Omega'$. Alors il existe $p \in P_1(R^2)$ tel que, pour tout $y \in R^2 \backslash \Gamma$,*

$$u(y) = \langle [TMK(u)], (\gamma_0 E(|\cdot - y|), \gamma_1 E(|\cdot - y|))\rangle + \int_\Gamma \frac{\partial \Delta E(|\cdot - y|)}{\partial n}(x)[u](x)d\gamma(x)$$
$$-(1-\nu)\int_\Gamma \frac{\partial^2 E(|\cdot - y|)}{\partial t \partial n}(x)\frac{d}{ds}[u](x)d\gamma(x) - \int_\Gamma M_n(E(|\cdot - y|))\left(\frac{\partial u}{\partial n}\right](x)d\gamma(x) + p(y)$$

On veut obtenir une représentation intégrale du type double couche de la solution variationnelle du problème de Neumann biharmonique intérieur, où les inconnues intermédiaires sur le bord sont les sauts $[u]$ et $[\frac{\partial u}{\partial n}]$, comme dans [3]. Il nous suffit de coupler notre problème intérieur à un problème biharmonique extérieur en imposant à la quantité $[TMK(u)]$ d'être nulle.

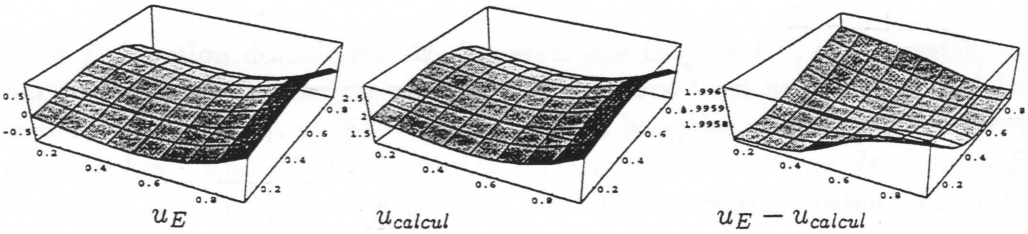
Enfin du problème au bord obtenu par couplage, nous donnons une formulation variationnelle sous forme d'équations intégrales portant sur les sauts. Cette formulation présente des noyaux non intégrables que nous éliminons à l'aide d'une technique développée par Nédélec pour obtenir un système d'équations intégrales.

3 Approximation

On se place dans le cas où Ω est une plaque carrée. Nous cherchons un espace d'éléments finis V_h approchant $\mathcal{H}(\Gamma)$. La résolution de (3) se ramène à la résolution d'un système linéaire que nous inversons. Nous obtenons alors les valeurs de $[u]$, $\frac{d}{ds}[u]$ et $[\frac{\partial u}{\partial n}]$ aux noeuds du maillage. L'étape suivante consiste à évaluer la solution à partir de ces sauts et de la Proposition 3.1.

Un exemple : $u_E(y_1, y_2) = 4y_1^3 - 5y_2^3 - 3y_1^2 + 4y_2^2$.

Figure 1 : déformation de la plaque : u_E exacte et calculée



Bibliographie

[1] *H. Blum et R, Rannacher*, On the Boundary Value Problem of the Bihannonic Operator on Domains with Angular Corners, Math. Meth. in the Appl. Sci 2 (1980), 556-581.

[2] *M. Bourlard2 S. Nicaise et L. Paquet*, Deux méthodes d'éléments finis frontières raffinés pour la résolution du problèine de Neumann dans un polygone, C.R. Acad. Sci. Paris, série I 305 (1987), 311-314.

[3] *J. Giroire et J.C. Nédélec*, A new system of boundary integral equations for plates with free edges, Math. Meth. in the Appl. Sci. 8 (1995), 755-772.

[4] *P. Grisvard*, Singularities in Boundary Value Problems, Research Notes in Appl. Math., vol. 22, Masson Springer-Verlag, 1992.

[5] *C. Nazaret*, Equations intégrales de frontière pour des problèmes de plaques polygonales à bord libre, C.R. Acad. Sci. Paris, sén e I 322 (1996).

Département de Mathématiques, URA CNRS 758,
Université de Nantes,
2, rue de la Houssinière, 44072 Nantes Cedex 03, France.
nazaret@math.univ-nantes.fr

Propriétés de moyenne des fonctions CR sur une hypersurface.

Victoria Paolantoni

Si f, fonction donnée sur M, hypersurface lisse de $\mathbb{C}^n$, est la restriction d'une fonction holomorphe sur un voisinage de M alors f est annulée par les champs de vecteurs $(\neg L_{j1\leq j\leq n-1}$, où $(L_{s^{\cdot}})_{1\leq j\leq n-1}$ est une base des champs tangents complexes holomorphes. *Une fonction annulée par ces champs est dite de Cauchy-Riemann (noté $CR(M)$).* Le problème qui s'est posé à de nombreux auteurs est le problème réciproque, à savoir si une fonction CR donnée sur M peut se prolonger de fagon holomorphe à un voisinage de M, d'un côté de M ou des deux côtés de M. Ce problème est lié à la géométrie des points de M.

Précisons nos notations : $M = \{\rho\ (z_1,\ z_n) = 0\}$ où p est une fonction définissante de M.

$$L_j = \frac{\partial \rho}{\partial z_n}(0)\frac{\partial}{\partial z_j} - \frac{\partial p}{\partial z_j}(0)\frac{\partial}{\partial z_n}\text{si}\frac{\partial p}{\partial z_n}(0) \neq 0$$

On note $\mathcal{L}_{z_o}$ la forme de Levi de M au point $z_0 \in M$ définie pour w appartenant au plan tangent complexe à M en z_0 par :

$$\mathcal{L}_{z_0}(\rho)(w) = \sum_{j,k=1}^{n} \frac{\partial^2 \rho}{\partial z_j \partial \overline{z_k}}\,(z_0)\, w_j \overline{w_k}$$

En 1911, E.E.Levi [3] démontre que pour un domaine strictement pseudoconvexe (i.e dont les valeurs propres de la forme de Levi sont strictement positives) de C^2 à bord lisse M, il existe des fonctions holomorphes qui n'ont pas de prolongement holomorphe à travers M du côté pseudoconcave. Puis en 1956, Lewy [4] a montré que tout germe de fonction CR se prolongeait au côté pseudoconvexe. Le résultat décisif dans ces questions d'extension de fonctions CR est donné par Trépreau [7] en 1986. Si M est une hypersurface C^2 de C^n et $z_0 \in M$ toute fonction CR près de z_0 se prolonge d'un côté de M si et seulement si M ne contient aucun germe d'hypersurface complexe passant par z_0. Cette condition géométrique correspond à la notion de minimalité introduite par Tumanov [8] en 1988. Tumanov généralise le théorème de Trépreau à des variétés de codimension supérieure à 1. Ces résultats utilisent la technique des disques analytiques. On considèrera des disques $\phi : \Delta \to \mathbb{C}^n$ holomorphes sur Δ (disque unité de $\mathbb{C}$) et de classe $C^\alpha(\overline{\Delta})$, attachés à M (i.e $\phi(\partial\Delta) \subset M$ et $\mathcal{C}^\alpha(\overline{\Delta}) = \left\{u : \overline{\Delta} \to \mathbb{R}; |u|_\alpha = sup_{\overline{\Delta}}|u| + sup_{x,y\in\overline{\Delta}} \frac{|u(x)-u(y)|}{|x-y|^\alpha} < \infty\right\}$).
En utilisant le théorème d'approximation de Baouendi et Trèves [7] et le principe du maximum, on peut prolonger les fonctions $CR(M)$ à la réunion $\bigcup_\phi \phi(\overline{\Delta})$. Pour les fonctions holomorphes dans un ouvert, on a des propriétés de moyenne. Le but de notre travail est d'établir des propriétés de sous-moyenne pour les fonctions CR.
On dit qu'il y a *extension holomorphe bilatérale de* $f \in CR(U)(U$ *voisinage de* 0 *dans* $M]$ *si et seulement s'il existe un voisinage* V *de* θ *dans* $\mathbb{C}^n$ *tel. que* f *soit la*

trace sur $V \cap M$ d'une fonction holomorphe F sur V. Cette condition d'extension bilatérale entraîne l'hypoellipticité de l'opérateur de Cauchy-Riemann annulant les fonctions CR. On a alors la proposition suivante :

Proposition 1 *Soit M une hypersurface de $\mathbb{C}^n$ contenant $0, U$ un voisinage de θ dans M. On a les implications suivantes : $(i) \Rightarrow (ii) \Rightarrow (iii)$*
(i) Toute fonction $f \in CR(U)$ se prolonge holomorphiquement des deux côleś de l'hypersurface
(ii) On a l'estimation de sous-moyenne pour f :

$$(*)|f(0)| \leq C(V) \int_{V \cap M} |f(z)| d\sigma_M(z)$$

où V est un voisinage de 0 dans $\mathbb{C}^n$
(iii) la non existence de fonctions pics pour M.

Ce résultat est connu de F.Trèves [7] et nous proposons une approche différente basée sur les distributions valeur au bord [6] et le théorème du saut [2] de Chirka. Le but principal de notre travail est de préciser la constante $C(V)$ de $(*)$. Nos démonstrations seront basées sur la construction de disques analytiques attachés à M. On procède en deux étapes :

1$^{\text{ère}}$ étape : Estimation en des points d'un côté ou de l'autre de M.

On généralise un théorème de A.Boggess, R.Dwilewicz et A.Nagel établi en 1989 pour des hypersurfaces pseudoconvexes de type fini [1]. On a une distance associée aux hypersurfaces de type fini et en utilisant les boules anisotropes $B_M(p, \delta)$ associées à cette distance [5] et des disques analytiques particuliers, on démontre sans hypothèse de pseudoconvexité le théorème suivant :

Théorème 1 *Soit M une hypersurface lisse dans $\mathbb{C}^n$ Soit p un point de M de type fini m. Il existe des constantes δ_0, C, A strictement positives, un côté de l'hypersurface Ω et un voisinage W de p dans Ω tels que :*

$$\forall Z \in \Omega \text{ tel que } \pi(Z) = p$$
$$\text{et } |Z - p| = C\Lambda_M(p, \delta) \text{ où } 0 < \delta \leq \delta_0$$

on a :

$$|u(Z)| \leq \frac{A}{|B_M(p, \delta)|} \int_{\zeta \in B_M(p,\delta)} |u(\zeta)| d\sigma_M(\zeta)$$

pour toute fonction u plurisousharmonique sur W et continue jusqu'au bord.

2$^{\text{ème}}$ étape : Estimation en des points de l'hypersurface M.

Dans le cas où on dispose d'une "stabilité" du type des points et de la propriété d'extension bilatérale, on démontre que la constante $C(V)$ est de la forme $\frac{Cte}{|B_M(p,\delta)|}$ où $|B_M(p, \delta)|$ est la mesure de la boule anisotrope. On démontre les théorèmes suivants :

Théorème 2 *Soit U ouvert de $\mathrm{C}^n, M \subset U$ hypersurface réelle lisse contenant θ. Supposons que la forme de Levi de M en 0 admette une valeur propre positive et une négative. Alors il existe un voisinage V de θ dans l'hypersurface, une constante* $C > 0$ *et* $\delta_0 > 0$ *tels que pour toute fonction* $fCR(V)$ *on ait* :

$$\forall Z \in V \ \ et\ \forall 0 < \delta < \delta_0$$
$$|f(Z)| \leq \frac{C}{1B_M(Z,\delta)\}} \int_{B_M(Z,\delta)} |f(\zeta)1d\sigma_M(\zeta)$$

La démonstration de ce théorème utilise le fait que dans un voisinage de 0, tous les points sont de type 2. Plus généralement, pour avoir des propriétés de moyenne, on aura besoin de se placer sous l'hypothèse suivante de "stabilité" ($S*$) :
Il existe une courbe transverse, réelle analytique C de M contenant 0 dont tous les points sont de type fini impair m.
Sous cette condition, nous utilisons les disques construits dans la démonstration du théorème II.1 pour obtenir l'estimation suivante :

Théorème 3 *Soit M une hypersurface de $\mathbb{C}^2$ de classe C^∞ vérifiant l'hypothèse* ($S*$) *. Alors il existe un voisinage V de θ dans M, une constante* $C > 0$ *et* $\delta_0 > 0$ *tels que pour toute fonction f $CR(V)$, on ait :* $\forall \delta \in]0, \delta_0[$,

$$|f(0)| \leq \frac{C}{|B_M(0,\delta)|} \int_{B_M(0,\delta)} |f(\zeta)| d\sigma_M(\zeta)$$

Bibliographie

[1] *A.Boggess, R.DuJilewicz et A.Naget* The hull of holomorphy of a non isotropic baU in a real hypersurface of finite type. Trans. A.M.S. 323 (1991), 209-232

[2] *E. Chirka* Analytic representation of *CR* functions. Math.USSR.Sbornik Vol.27 (1975) No.4, 526-553

[3] *E.E.Levi* Sulle ipersuperfici dello spazio a 4 dimensioni che possono essere frontiera del campo di esistenza di una funzione analitica di due variabili complesse. Ann.Mat.Pura Apppl.18 (1911), 69-79

[4] *H. Lewy* On the local character of the solutions of an atypical linear differential equation in three variables and a related theorem for regular functions of two complex variables. Ann of Math. 64 (1956), 514-522

[5] *A. Nagel* Vector fields and nonisotropic metrics. Beijing Lectures in Harmonic Analysis, Annals of Math.Studies No 112, Princeton University Press (1986), 241-306w

[6] *E.Straube CR* distributions and boundary values of analytic functions . Dissertatíon submitted to the Swiss Federal institute of technology Zurich for the degree of doctor of Mathematics, Zurich (1983)

[7] *F*, *Trèves* Approximation and representation of functions and distributions annihilated by a system of complex vector fields. Ecole polytechnique (1981)

[8] *A. E. Tumanov* Extension of CR functions into a wedge from a manifold of finite type. Math.Sb.Nov.Ser.136 (1988), 128-139 ; English Transl.,Math. USSR Sbornik 64 (1989), 129-140

Equipe d'analyse complexe, U.R.A. 225
Université de Provence - Technopole de Château-Gombert
C.M.I. 39, rue Joliot-Curie- 13453, Marseille Cedex 13.
paolanto@gyptis.univ-mrs.fr

Sur la convergence faible uniforme des processus stochastiques.

Christine Sibeux

Soit $(X^{n,\theta})_{n\geq 1}$ une suite de semi-martingales dépendant du paramètre $\theta \in \mathbb{R}^m$ définies sur des espaces filtrés $(\Omega^n, \mathcal{F}^n, \mathbb{F}^n, P^n)$. Pour θ fixé, la convergence en loi de la suite $(X^{n,\theta})_{n\geq 1}$ vers une semi-martingale X^θ a été étudiée par de nombreux auteurs (voir par exemple J. Jacod et A.N. Shiryayev [4] ou R.Sh. Lipster et A.N. Shiryayev [5]). Lorsque cette convergence a lieu, d'après le théorème de représentation de Skorohod (cf R.M. Dudley [1]), il existe un espace probabílisé $(\tilde{\Omega}, \tilde{\mathcal{F}}, \tilde{P})$ et des processus $\widetilde{X}^{n,\theta}$ et $\widetilde{X}^\theta$ tels que les lois de $\widetilde{X}^{n,\theta}$ et de $\widetilde{X}^\theta$ sous $\tilde{P}$ coïncident avec les lois de $X^{n,\theta}$ et de X^θ respectivement et tels que pour tout $N \in \mathbb{N}$

$$\sup_{t\in[0,N]\cap T_\theta} \left|\widetilde{X}^{n,\theta} - \widetilde{X}^\theta\right| \stackrel{\tilde{P}-p.s.}{\longrightarrow} 0$$

avec $T_\theta = \{s \geq 0,\ \triangle\widetilde{X}^\theta_s = 0\}$.

Nous cherchons sous quelles conditions supplémentaires, la convergence précédente est uniforme (en θ) sur tous les compacts de $\mathbb{R}^m$. Ce type de convergence est très utile en statistique, notamment pour étudier la normalité asymptotique de certains estimateurs.

Nous nous restreignons au cas où nous pouvons définir des processus $X^n = (X^{n,\theta}_t)_{t\in\mathbb{R}^+,\theta\in\mathbb{R}^m}$ à trajectoires dans l'espace de Skorohod $D(\mathbb{R}^+,\ C_{loc}(\mathbb{R}^m))$ des fonctions définies sur $\mathbb{R}^+$ à valeurs dans $C_{loc}(\mathbb{R}^m)$ où $C_{loc}(\mathbb{R}^m)$ désigne l'ensemble des fonctions réelles continues sur $\mathbb{R}^m$, muni de la loi de la convergence uniforme sur tout compact. Nous pouvons alors étudier la convergence en loi, dans $D(\mathbb{R}^+,\ C_{loc}(\mathbb{R}^m))$, de la suite $(X^n)_{n\geq 1}$. Les résultats classiques sur la convergence faible – valables dans tout espace $D(\mathbb{R}^+,\ S)$ où S est un espace polonais – donnent des conditions qui s'expriment à l'aide du module de continuité dans $D(\mathbb{R}^+,\ C_{loc}(\mathbb{R}^m))$, qui est défini de la façon suivante : si $(K_i)_{i\geq 1}$ désigne une suite de compacts croissant vers $\mathbb{R}^m$ et si X est une fonction réelle sur $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^m$, nous posons pour tout $i, N \in \mathbb{N}$ et $h > 0$

$$W^i_{h,N}(X) = \inf_{\substack{\{t_j\} \\ t_{j+1}-t_j>h}} \max_{0\leq j\leq n} \sup_{s,t\in[t_j,t_{j+1}[} \sup_{\theta\in K_i} \left|X^\theta_s - X^\theta_t\right|$$

où la borne inférieure est prise sur toutes les subdivisions $0 = t_0 < \ldots < t_{n+1} = N (n \geq 1)$ de l'intervalle [0, N] vérifiant $t_{j+1} - t_j > h$ pour $j = 0, \ldots, n-1$. Nous cherchons des conditions en termes prévisibles pour assurer la convergence en loi dans $D(\mathbb{R}^+,\ C_{loc}(\mathbb{R}^m))$ des processus X^n.

Dans un premier temps, en utilisant les travaux de L.Yu. Vostrikova [6] et [7], nous obtenons un critère de convergence en loi dans $D(\mathbb{R}^+,\ C_{loc}(\mathbb{R}^m))$. Ensuite, nous exprimons les conditions obtenues en termes prévisibles à l'aide des résultats classiques sur la convergence des processus et des estimations de K. Dzhaparidze, E. Valkeila [2] et de I.A. Ibragimov, R.Z. Has'minski [3].

Convergence en loi dans $D(\mathbb{R}^+,\ C_{loc}(\mathbb{R}^m))$ Dans cette partie, nous exprimons les conditions assurant la convergence en loi dans $D(\mathbb{R}^+,\ C_{loc}(\mathbb{R}^m))$ à l'aide de

$$W_{h,N}^{\theta}(X) = \inf_{\substack{\{t_j\} \\ t_{j+1}-t_j>h}} \max_{0\le j\le n} \sup_{s,t\in[t_j,t_{j+1}[} \left|X_s^{\theta} - X_t^{\theta}\right|$$

$$\text{et } \mathcal{K}_{h,N}^{i}(X) = \sup_{0\le qt\le qN} \sup_{\substack{\theta,\theta'\in K_i \\ |\theta-\theta'|\le qh}} \left|X_t^{\theta} - X_t^{\theta'}\right|.$$

Théorème 1 *Supposons que pour tout* $i, N \in \mathbb{N}, \eta > 0, \theta, \theta_1,\ \ldots, \theta_l \in \mathbb{R}^m$, $(l \in \mathbb{N}^*)$ *et* $t, t_1, \ldots,\ t_k \in \mathbb{R}^+, (k \in \mathbb{N}^*)$ *nous avons*

(1) $(X_{t_1}^{n,\theta_1}, \ldots, X_{t_1}^{n,\theta_l}, \ldots, X_{t_k}^{n,\theta_1}, \ldots, X_{t_k}^{n,\theta_l}) \overset{\mathcal{L}(P^n)}{\longrightarrow} (X_{t_1}^{\theta_1}, \ldots, X_{t_1}^{\theta_l}, \ldots, X_{t_k}^{\theta_1}, \ldots, X_{t_k}^{\theta_l})$,

(2) $\lim_{a\to+\infty} \overline{\lim_{n}} P^n \left(\sup_{0\le s\le t} \left|X_s^{n,\theta}\right| \ge a \right) = 0.$

(3) $\lim_{h\to0} \overline{\lim_{n}} P^n \left(W_{h,N}^{\theta}(X^n) > \eta\right) = 0,$

(4) $\lim_{h\to0} \sup_{n\ge1} P^n \left(\mathcal{K}_{h,N}^{i}(X^n) > \eta\right) = 0.$

Alors, pour tout $n \ge 1_f$ *le processus* $X^n = (X_t^{n,\theta})_{t\ge0,\theta\in\mathbb{R}^m}$ *est à trajectoires dans* $D(\mathbb{R}^+, C_{loc}(\mathbb{R}^m))$ *et la suite* $(X^n)_{n\ge1}$ *converge en loi vers un processus* $\widetilde{X}$ *à trajectoires dans* $D(\mathbb{R}^+, C_{loc}(\mathbb{R}^m))$ *et ayant les mêmes distributions finies-dimensionnelles que* X.

Critères de convergence faible dans $D(\mathbb{R}^+, C_{loc}(\mathbb{R}^m))$ **en termes prévisibles**

Nous nous restreignons ici au cas où pour tout $\theta \in \mathbb{R}^m, X^{\theta}$ est un processus de diffusion qui est solution de l'équation différentielle stochastique

$$dX_t^{\theta} = b(t, \theta, X^{\theta})dt + c(t, \theta,\ X^{\theta})dW_t$$

avec X_0^{θ} déterministe et $W = (W_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$ un mouvement brownien. Nous supposons que les fonctions b et c vérifient les conditions habituelles de Lipschitz, de croissance linéaire, de continuité et de prévisibilité. Nous nous limitons également au cas où pour tout $\theta \in \mathbb{R}^m$ et tout $n \ge 1$, le processus $X^{n,\theta}$ est une semi-martingale localement de carré intégrable. Dans ce cas, il existe un processus unique $\widetilde{B}^{n,\theta}$ prévisible, à trajectoires à variation localement integrable, tel que

$$X^{n,\theta} = X_0^{n,\theta} + \widetilde{B}^{n,\theta} + X^{n,\theta,c} + \int_0 \int_{\mathbb{R}\setminus\{0\}} xd\left(\mu^{n,\theta} - \nu^{n,\theta}\right)$$

où $X^{n,\theta,c}$ désigne la partie martingale continue de $X^{n,\theta}, \mu^{n,\theta}$ sa mesure des sauts et $\nu^{n,\theta}$ son compensateur. De plus, la martingale locale

$$M^{n,\theta} = X^{n,\theta,c} + \int_0 \int_{\mathbb{R}\setminus\{0\}} xd\left(\mu^{n,\theta} - \nu^{n,\theta}\right),$$

qui apparaît dans la décomposition ci-dessus, est localement de carré intégrable.
Conditions du groupe I
Pour tout $\theta, \theta' \in \mathbb{R}^m$, tout $L \in \mathbb{N}$ et tout $a \in]0,1]$, nous avons :
(1) $X_0^{n,\theta} \xrightarrow{P^n} X_0^\theta$
(2) $\displaystyle\int_0^L \int_{\mathbb{R}\setminus\{0\}} x \leq \ \mathbb{I}_{(|x|>a)} d\nu^{n,\theta} \xrightarrow{P^n} 0$
(3) $\displaystyle\sup_{t \leq L} |\widetilde{B}_t^{n,\theta} - \int_0^t b\left(s, \theta, X^{n,\theta}\right) ds| \xrightarrow{P^n} 0$
(4) $\displaystyle\sup_{t \leq L} | < M^{n,\theta}, M^{n,\theta'} >_t - \int_0^t c\left(s, \theta, X^{n,\theta}\right) c\left(s, \theta', X^{n,\theta'}\right) ds| \xrightarrow{P^n} 0$
Conditions du groupe II
Nous introduisons le processus prévisible $\mathrm{Y}^{n,\theta,\theta'} = (Y_t^{n,\theta,\theta'})_{t\geq 0}$ défini par

$$\begin{aligned} Y_t^{n,\theta,\theta'} &= \left|X_0^{n,\theta} - X_0^{n,\theta'}\right|^p + < X^{n,\theta,c} - X^{n,\theta',c} >_t^{p/2} + \left|\widetilde{B}_t^{n,\theta} - \widetilde{B}_t^{n,\theta'}\right|^p \\ &+ \int_0^t \int_{\mathbb{R}^2\setminus\{0,0\}} (x-y)^{\leq} d\nu^{n,\theta,\theta'})^{p/2} + \int_0^t \int_{\mathbb{R}^2\setminus\{0,0\}} |x-y|^p d\nu^{n,\theta,\theta'} \end{aligned}$$

où $\nu^{n,\theta,\theta'}$ désigne le compensateur de la mesure des sauts du processus $(X^{n,\theta}, X^{n,\theta'})$.

Nous supposons que pour tout $i \in \mathbb{N}$, tout $N \in \mathbb{N}$, il existe $\alpha > m$ et $p \geq \max(\alpha, 2)$ vérifiant, pour tout $\mathbb{F}^n$-temps d'arrêt τ à valeurs dans l'intervalle $[0, \mathrm{N}]$, les deux conditions suivantes
(4) $\displaystyle\sup_{n\geq 1} \sup_{\theta \in K} E^n(|X_\tau^{n,\theta} 1^p) < +\infty$
(5) $\displaystyle\sup \sup_{\theta \neq \theta} E^n(|\mathrm{Y}_\tau^{n,\theta,\theta'} n \geq 1\theta_1\theta' \in K_2 \ |^p \backslash |\theta - \theta' 1^\alpha) < +\infty.$

Théorème 2 *Supposons que les conditions des groupes I et II sont satisfaites. Alors, pour tout $n \geq 1$, le processus $X^n = (X_i^{n,\theta})_{t\geq 0, \theta \in \mathbb{R}^m}$ est à trajectoires dans $D(\mathbb{R}^+,\ C_{loc}(\mathbb{R}^m))$ et la suite $(X^n)_{n\geq 1}$ converge en loi vers un processus $\widetilde{X}$ à trajectoires dans $D(\mathbb{R}^+,\ C_{loc}(\mathbb{R}^m))$ et ayant les mêmes distributions finies-dimensionnelles que X.*

Bibliographie

[1] *R.M. Dudley.* Real analysis and probability. Chapman et Hall, Mathematic series, New-York, 1989.

[2] *Я. Dzhaparidze et E. Vatkeila.* On the Hellinger type distances for filtered experiments. Probability Theory and related Fields 85, p. 105-117, 1990.

[3] *I.A. Ibragimov, R.Z. Has'minski.* Statistical estmation : asymptotic theory. Springer, Berlin Heidelberg New-York, 1981.

[4] *J. Jacod et A.N. Shiryayev* Limit theorems for stochastic processes. Springer-Verlag, Berlin 1987.

[5] *R. Sh. Lipster et A.N. Shiryayev.* Theory of martingales. Mathematics and its applications, Kluwer Academic Publishers, Netherlands, 1989.

[6] *L. Yu. Vostrikova.* On the weak convergence of likelihood ratio processes of general statistical parametric models. Stochastics 23, p. 277-298, 1988

[7] *L. Yu. Vostrikova.* Divergence processes and weak convergence of likelihood ratio processes. Séminaire de Probabilités de Rennes I, p. 134-146, 1991.

Laboratoire de Statistiques et Processus
Département de Mathématiques, Université d'Angers,
2 Boulevard Lavoisier, 49045 Angers cedex, France
sibeux@tonton.univ-angers.fr

Autour des fonctions harmoniques de type exponentiel, quelques théorèmes d'unicité.

Raphaële Supper

Pour être identiquement nulle dans $\mathbb{R}^2$, il suffit à une fonction harmonique u : $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de type exponentiel (i.e. possédant dans $\mathbb{R}^2$ une croissance de la forme $|u(x,\ y)| \leq Ce^{b|x+iy1}$ avec C et b des constantes > 0) de s'annuler sur $\mathbb{Z} \times \{0\}$ et $\mathbb{Z} \times \{a\}$ où $a \in \mathbb{N}, 0 < a < \pi/b$ (voir [5]). Ce théorème d'unicité a été généralisé, indépendamment en [8] et [10], aux fonctions harmoniques dans $\mathbb{R}^N (N \in \mathbb{N},\ N \geq 2)$ de type exponentiel $< \pi$ s'annulant cette fois sur $\mathbb{Z}^{N-1} \times \{0\}$ et $\mathbb{Z}^{N-1} \times \{a\}$.

On propose ici une extension de ce résultat aux fonctions de l'espace $\mathcal{H}_{P,b,N}$ décrit dans la définition ci-dessous, en renvoyant à [4] pour davantage de détails. L'idée générale consiste à utiliser le fait qu'un élement $u \in \mathcal{H}_{P,b,N}$ est certes une fonction analytique dans $\mathbb{R}^N$ mais qu'elle est de plus *harmonique d'ordre infini*, ce qui permet d'assurer que u est restriction à $\mathbb{R}^N$ d'une fonction $\tilde{u}$ analytique dans $\mathbb{C}^N$, avec le même type de croissance pour $\tilde{u}$ dans $\mathbb{C}^N$ que pour u dans $\mathbb{R}^N$, l'intérêt des fonctions entières de type exponentiel résidant dans leur correspondance, via la transformation de Fourier-Borel, avec les fonctionnelles analytiques (cf [6], [7]), un outil très pratique pour étudier ces questions d'unicité (cf [9]).

Definition 1 *Étant donnés $b \geq 0$ et $P(X) = \sum_{0\leq k\leq d} c_k X^k \in \mathbb{R}[X]$ un polynôme de degré d dont l'ensemble des zéros $\mathcal{Z}p$ dans $\mathbb{C}$ ne rencontre pas $]-\infty, 0[$, soit $\mathcal{H}_{P,b,N}$ l'espace des solutions $u : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ de l'equation*

$$P\left(\Delta_N\right) u = 0 \tag{1}$$

(avec $P(\Delta_N) = \sum_{0\leq k<d} c_k \Delta_N^k$ où Δ_N^k deśigne l'opérateur laplacien dans $\mathbb{R}^{N_1}$ itéré k fois) pour lesquelles il existe $C_0 > 0$ et $C_d > 0$ telles que

$$|u(x)| \leq C_0 \exp\left(b\|x\|_N\right) \qquad \text{et} \qquad \left|\Delta_N^d u(x)\right| \leq C_d \exp\left(b\|x\|_N\right)$$

pour tout $x \in \mathbb{R}^N$.

Il existe des polynômes exponentiels $P_0, P_1, \ldots, P_{d-1}$, ne dépendant que de P, notés dans la suite $P_k(\omega) = \sum_{\alpha\in\mathcal{Z}_P} \sum_{0\leq q<d_\alpha} c_{k,\alpha,q} \alpha omega^q$ (avec $c_{k,\alpha,q} \in \mathbb{C}, k = 0, 1, \ldots, d-1$ et d_α la multiplicité de α comme zéro de P) tels que :

$$\Delta_N^m = P_0(m)Id + P_1(m)\Delta_N + \ldots + P_{d-1}(m)\Delta_N^{d-1}$$

pour tout $m \in \mathbb{N}$, d'où (voir [1] pour une définition de l'harmonicité d'ordre infini) :

Théorème 1 *Toute solution u de (1) est une fonction harmonique d'ordre infini dans $\mathbb{R}^N$. Plus précisément, elle est la restriction à $\mathbb{R}^N$ de la fonction H, harmonique dans $\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}$, définie par : $H(x,t) = \sum_{m\in\mathbb{N}} (-1)^m \frac{t^{2m}}{(2m)!} (\Delta_N^m u)(x)$.*

Noter que $H(x,t) = \Sigma_{\alpha\in\mathcal{Z}_P}\Sigma_{0\leq q<d_Q}C_{\alpha,q}(x)S_{\alpha,q}(t\rangle$, où $C_{\alpha,q}(x) = \Sigma_{k=0}^{d-1}c_{k,\alpha,q}(\Delta_N^k u)(x)$ et $S_{\alpha,q}(t) = \Sigma_{m\in\mathrm{N}}(-1)^m\alpha^m m^q\frac{t^{2m}}{(2m)!} = P_{\alpha,q}(t)e^{i\sqrt{\alpha}f} + Q_{\alpha,q}(t)e^{-\tilde{l}\sqrt{\alpha}*}$, avec $P_{\alpha,q}$ et $Q_{\alpha,q} \in \mathrm{C}[X]$ des polynômes de degré $\leq q$.

Par ailleurs, on démontre (en utilisant le développement de Pizzetti [1] de la moyenne superficielle de u sur une sphère) que $\triangle_N u, \Delta_N^2\mathrm{u}$ . .. $\Delta_N^{d-1}u$ (et a fortiori $\Delta_N^m u$ pour $m \geq d$) présentent eux aussi une croissance exponentielle :

Théorème 2 Pour toute $u \in H_{Pb,N}$ et tout $k \in \{1,2,\ldots,d-1\}$, *il existe* $C_k > 0$ telle que : $|(\Delta_N^k u)(x)| \leq C_k \exp(b\|x\|_N)$pour tout $x \in \mathbb{R}^N$.

On en déduit que H possède une croissance de type exponentiel. Plus precisément, on vérifie que, pour chaque $\varepsilon > 0$, il existe $a_\varepsilon > 0$ tel que, pour tout $(x,t) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}$:

$$|H(x,t)| \leq a_\varepsilon \exp\left[\left(\sqrt{b^2 + I_P^2} + \varepsilon\right)\|(x,t)\|_{N+1}\right]$$

en notant $I_P = \max_{\alpha\in\mathcal{Z}_P}\Im m\sqrt{\alpha}$ (avec la détermination principale du logarithme, $\sqrt{\alpha}$ est bien définie pour toute $\alpha \in \mathcal{Z}_P$). D'après le théorème 4.5 de [2], sa complexifiée $\widetilde{H}$ (i.e. la fonction entière dans $\mathbb{C}^{N+1}$ dont H est la restriction à $\mathbb{R}^{N+1}$) présente elle aussi une croissance exponentielle : il existe pour chaque $\varepsilon > 0$, une constante $A_\varepsilon > 0$ telle que

$$|\widetilde{H}(z,\eta)| \leq A_\varepsilon \exp\left[\left(\sqrt{b^2 + I_P^2} + \varepsilon\right)L_{N+1}(z,\eta)\right]$$

pour tout $(z,\eta) \in \mathbb{C}^N \times \mathbb{C}$.

Dans la comparaison de la croissance d'une fonction harmonique dans $\mathbb{R}^n$ avec celle de sa complexifiée dans $\mathbb{C}^n$, l'apparition de la norme de Lie, définie dans $\mathbb{C}^n$ par :

$$L_n(z) = \sqrt{\|z\|_n^2 + \sqrt{\|z\|_n^4 - \left|\sum_{1\leq j\leq n} z_j^2\right|}} \quad \left(\leq \sum_{1\leq j\leq n}|z_j|\right)$$

($\|\cdot\|_n$ désignant ici la norme euclidienne de $\mathbb{C}^n$) s'explique par le fait que la cellule d'harmonicité dans $\mathbb{C}^n$ d'une boule euclidienne $B_R = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\|_n \leq R\}$ est justement la boule de Lie $BL_R = \{z \in \mathbb{C}^n : L_n(z) \leq R\}$ (voir [1]) et que le maximum sur B_R d'une fonction harmonique dans $\mathbb{R}^n$ est relié au maximum sur BL_R de sa complexifiée dans $\mathbb{C}^n$ (voir [2]).

En constatant (pour x fixé) que $\eta \mapsto H(x,\eta)$ est la transformée de Fourier-Borel d'une fonctionnelle analytique qui apparaît, d'une part comme une combinaison linéaire de dérivées de masses de Dirac aux points $i\sqrt{\alpha}(\alpha \in \mathcal{Z}_P)$ et, d'autre part, comme une fonctionnelle analytique portable par le disque $D_{P,b} = \{\omega \in \mathbb{C} : |\omega| \leq \sqrt{b^2 + I_P^2}\}$, on obtient, en considérant la transformation G (voir [3]) de cette fonctionnelle :

Théorème 3 *Soit* $u \in \mathcal{H}_{P,b,N}$. Si $\min_{\alpha \in \mathcal{Z}_P} |\alpha| > b^2 + I_P^2$, *alors* $u \equiv 0$ *dans* $\mathbb{R}^N$,

On constate de même que $z \mapsto \widetilde{H}(z, 0)$ (i.e. la complexifiée $\tilde{u}$ de u) possède une croissance de type exponentiel, plus précisément qu'elle appartient à l'espace $Exp(\mathbb{C}^N, D^N_{P,b})$ des fonctions entières f dans $\mathbb{C}^N$ vérifiant les estimations suivantes :

pour chaque $\varepsilon > 0$, *il existe* $M_\varepsilon > 0$ *telle que*

$$|f(z)| \leq M_\varepsilon \exp\left[\left(\sqrt{b^2 + I_P^2} + \varepsilon\right)(|z_1| + \ldots + |z_N|)\right]$$

pour tout $z = (z_1, \ldots, z_N) \in \mathbb{C}^N$. (Cet espace est l'ensemble des transformées de Fourier-Borel des fonctionnelles analytiques portables par le polydisque $D^N_{P,b}$ - voir [6]).

Les $\dfrac{\partial^{2j} \tilde{u}}{\partial z_N^{2j}} (j \in \mathbb{N})$ appartenant également à $Exp(\mathbb{C}^N,\ D^N_{P,b})$ et leurs restrictions aux hyperplans $\{z_N = 0\}$ et $\{z_N = a\}$ à $Exp(\mathbb{C}^{N-1},\ D^{N-1}_{P,b})$, on démontre :

Théorème 4 *Soient* $a \in \mathbb{R}^*$ et $u \in \mathcal{H}_{P,b,N}$ *telle que* $\beta = \sqrt{b^2 + I_P^2} < \pi$ *et que ses dérivées partielles* $\dfrac{\partial^{2j} u}{\partial x_N^{2j}} (j = 0, 1, \ldots,\ d-1)$ *s'annulent sur* $\mathbb{N}^{N-1} \times \{0\}$ *et* $\mathbb{N}^{N-1} \times \{a\}$. *Si* $|a|\beta < \pi$, *alors* $u \equiv 0$ *dans* $\mathbb{R}^N$

Bibliographie

[1] *V. Avanissian* Cellules d'harmonicité et prolongement analytique complexe. Travaux en cours, Hermann, Paris, 1985.

[2] *V. Avanissian* Quelques applications des fonctionnelles analytiques . Annales Academiae Scientarum Fennicae Series A1 Mathematica, Volumen 15, 1990, 225- 245.

[3] *V. Avanissian, R. Gay* Sur une transformation des fonctionnelles analytiques et ses applications aux fonctions entières de plusieurs variables Bull. Soc. Math. France, 103, 1975, p.341-484.

[4] *V. Avanissian, R. Supper* On the equation $P(\Delta)u = 0$, à paraître dans les Proceedings of the Conference on Theory of Functions and Applications (Yerevan, 18-19-20 septembre 1995).

[5] *R. Boas* An uniqueness theorem for harmonic functions. J.Approx. Theory 5 (1972), 425-427.

[6] *L. Hörmander* An introduction to complex analysis in several variables D.van Nostrand Company, Princeton 1966.

[7] *A. Martineau* Sur les fonctionnelles analytiques et la transformation de Fourier-Borel. J. Anal. Math. de Jérusalem XI, 1-164, 1963.

[8] *N. V. Rao*, Carlson theorem for harmonic functions in R^n J. Approx. Theory 12, 309-314, 1974.

[9] *R. Supper* Formules d'interpolation et théorèmes d'unicité pour des fonctions harmoniques de type exponentiel Annali Scuola Norm. Sup. di Pisa, Serie IV, Vol.XXI, 299-310, 1994.

[10] *D. Zeilberger* Uniqueness theorems for harmonic functions of exponential type. Proc. Amer. Math. Soc. 61, 335-340, 1976.

U.F.R. de Mathématique et d'Informatique, Université Louis Pasteur
C.N.R.S. (U.R.A. 01)
7 rue René Descartes, F-67084 Strasbourg Cedex (France)
supper@math.u-strasbg. fr

Sur la resommation de certaines séries divergentes.

Mathilde Toulouse

Etant donnée une équation différentielle linéaire homogène $y'' + hy^t + ty = 0$ de degré deux, où h et $t \in \mathbb{C}(x)$, il n'existe pas toujours des solutions s'exprimant à l'aide des fonctions classiques et de leurs primitives. Par contre, on peut trouver des solutions formelles. Nous allons voir que ces solutions formelles permettent de calculer, localement, de vraies solutions.

Nous allons étudier 1'équation (D) : $z'' = az$. On peut toujours s'y ramener en posant $z = ye^{\int \frac{l}{2h}}$. Les singularités de (D) sont les pôles de a et éventuellement le point à l'infini. Supposons que l'origine 0 soit un point singulier de (D) . Au voisinage de 0, la fonction a admet un développement de Laurent : $a(x) = \sum_{n \geq n_0} a_n x^n, a_0 \neq 0$. On sait associer à l'équation (D) , un *polygone de Newton* au voisinage de 0, donné ici par la figure 1. Ce polygone admet une pente non nulle qui vaut $(n_0 - 2)/2$, si et seulement si $n_0 < 2$. Dans ce cas, la singuIarite en 0 est dite irrégulière. Dans le cas contraire, elle est régulière. On note k la plus grande pente finie du polygone de Newton de (D).

L'équation (D) admet deux solutions formelles, linéairement indépendantes,

$$\hat{u}_i \left(x^\nu\right) x^{\alpha_i} (\log x)^{p_i} e^{q_i(x^\nu)}, \; i = 1, 2$$

avec $p_i, 1/\int \nu \in \mathbb{N}, \alpha_i \in \mathbb{C}, q_i \in \mathbb{C}[x]$ et $\hat{u}_i \in \mathbb{C}[[x]]$. Si la singularité est régulière, alors $q_1 = q_2 = 0$ et les séries formelles $\hat{u}_1$ et $\hat{u}_2$sont convergentes dans un disque centré à l'origine. Si la singularitést irrégulière, les séries formelles $\hat{u}_1$ et $\hat{u}_2$ sont, en général, divergentes.

Que peut-on espérer ?

On voudrait, par un processus de resommation, *incarner* , dans des régions à préciser, les séries formelles $\hat{u}_1$ et $\hat{u}_2$ par de vraies solutions u_1 et u_2 de façon à ce que

- la série formelle $\hat{u}_i$ soit le développement asymptotique de u_i,
- la fonction $u_i(x^\nu)x^{\alpha\prime}(logx)^{pi}e^{q_i(x^\nu)}$ soit solution de l'équation (D).

Si la série $\hat{u}_i$ est divergente, elle ne peut pas être le développement asymptotique d'une fonction holomorphe dans un disque épointé centré en 0. Il faut dans ce cas polariser le problème dans une direction d et remplacer les disques épointés par des secteurs ouverts bissectés par d.

Développement asymptotique et k-sommation

Soit u une fonction holomorphe sur un secteur V de $\mathbb{C}^*$. On dit que u est *asymptote sur V, au sens Gevrey k*, à une série $\hat{u} = \sum a_n x^n$ si pour tout sous-secteur fermé W de V, il existe deux constantes positives C_W et A_W telles que

$$\forall N \in \mathbb{N}, |u(x) - \sum_{n=0}^{N} a_n x^n| \leq C_W A_W^N (N!)^{1/k} |x|^{N+1}$$

Soit u une fonction holomorphe asymptote à 0, au sens Gevrey k, sur un secteur V. On sait alors qu'il existe des constantes positives A et C telles que

$$|u(x)| \leq Ce^{-A|x|^{-k}} \quad \text{sur V.}$$

Si le secteur V est d'ouverture strictement supérieure à $\frac{\pi}{k}$ ce type de croissance implique que $u = 0$. Cette remarque permet de dire que s'il existe une fonction holomorphe u asymptote, au sens Gevrey k, à une série formelle $\hat{u}$ sur un secteur d'ouverture strictement supérieure à $\frac{\pi}{k}$ alors elle est unique.

On dit qu'une série formelle $\hat{u}$ est *k-sommable dans une direction d* s'il existe une fonction holomorphe u, asymptote à $\hat{u}$, au sens Gevrey k, dans un secteur bissecté par d et d'ouverture strictement supérieure à $\frac{\pi}{k}$.

Cas des series formelles solutions d'équations différentielles linéaires homogèmes d'ordre 2

On a [2] le théorème suivant.

Théorème 1 *Les séries $\hat{u}_1$ et $\hat{u}_2$ sont k-sommables dans toute direction de $\mathbb{C}^*$ sauf éventuellement dans les directions de décroissance maximale de $e^{q_1-q_2}$ et $e^{q_2-q_1}$*

Les directions de décroissance maximale de e^{q1-q_2} et $e^{q_2-q_1}$ sont appelées *directions singulières* de l'équation. Elles sont, modulo 2π, en nombre fini.

Regardons par exemple l'équation $x^3y'' = y$. Son polygone de Newton (cf. figure) a une pente non nulle qui vaut $\frac{1}{2}$. Cette équation admet une base de solutions formelles :

$$\hat{u}_1(\sqrt{x})x^{\frac{3}{2}}e^{\frac{2}{\sqrt{x}}} \text{ et } \hat{\mathrm{u}}_2(\sqrt{\mathrm{x}})\mathrm{x}^{\frac{3}{2}}\mathrm{e}^{-\frac{2}{\sqrt{x}}}$$

Sur $[0, 2\pi[$ la seule direction singulière est 0. Dans toutes les autres directions, les séries $\hat{u}_1$ et $\hat{u}_2$ sont $\frac{1}{2}$-sommables.

Pour les équations d'ordre superieur, on a un résultat similaire mais qui fait intervenir de la multisommation, c'est à dire de la sommation avec plusieurs niveaux k distincts.

k-sommation par la méthode de Borel-Laplace

Soit d une direction de $\mathbb{C}^*$ et $\hat{u} = \sum a_n x^n$ une série formelle k-sommable dans la direction d. On sait qu'il existe alors des constantes A et C telles que $|a_n| \leq CA^n(n!)^{1/k}$. La série

$$\hat{B}(x) = \sum \frac{a_n}{(n!)^{1/k}} x^n$$

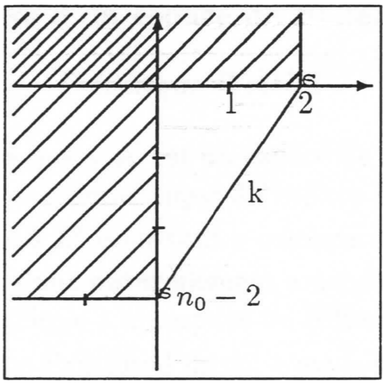


Figure 1 : Polygone de Newton en 0 de l'équation (enveloppe convexe des cadrans hachurés).

appelée *transformée de Borel formelle* de $\hat{u}$ est convergente. On note Φ_d le prolongement analytique de sa somme dans la direction d. *L'intégrale de Laplace* :

$$u(x) = k \int_d \Phi_d(\xi) e^{-\left(\frac{\xi}{x}\right)^k} d\xi \ ,$$

définit une fonction holomorphe asymptote à $\hat{u}$ dans un secteur $]d-\theta, d+\theta[$ avec $2\theta > \frac{\pi}{k}$. C'est la somme de $\hat{u}$ dans la direction d.

Bibliographie

[1] *M. Loday-Richaud* Introduction à la multisommabilité Gazette des Mathématiciens, S.M.F. (1990)

[2] *J.-P. Ramis and Y. Sibuya* Hukuhara domains and fundamental existence and uniqueness theorems for asymptotic solutions of Gevrey type. Asymptotics, 2 :39-94 (1989).

Institut de Recherche en Mathématiques Avancées (URA CNRS 01)
Université Louis Pasteur
7 rue René Descartes
67084 Strasbourg Cedex
toulouse@cartan.u-strasbg.fr

Interpolation complexe d'un espace de Banach et de son antidual.

Frédénque Watbled

On sait depuis longtemps que si X est un espace de Banach complexe de dimension finie n, alors $(X, \overline{X^\star})_{\frac{1}{2}}$ est isométrique à l'espace de Hilbert l_2^n. On sait aussi que $(L^p,\ L^q)_{\frac{1}{2}}$ est isométrique à L^2 pour tout p compris entre 1 et l'infini et $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ (Cf par exemple [2]). On est donc naturellement amenés à se demander si l'interpolé $(X, \overline{X^\star})_{\frac{1}{2}}$ est toujours isométrique à un espace de Hilbert pour un Banach complexe quelconque X, où $\overline{X^\star}$ désigne l'antidual de X, c'est-à-dire l'espace vectoriel X^* où l'on remplace la multiplication par un scalaire habituelle $\lambda x, \lambda \in \mathbb{C}, x \in X$, par la multiplication conjuguée $\lambda \odot x = \overline{\lambda} x$. Pour pouvoir parler de l'espace interpolé $(X, \overline{X^\star})_{\frac{1}{2}}$ il faut d'abord que le couple $(X, \overline{X*}$ soit compatible, c'est-à-dire que X et $\overline{X^*}$ s'injectent tous deux dans un même espace vectoriel topologique U, de manière à pouvoir former leur intersection et leur somme. Rappelons la définition des espaces d'interpolation complexe, due à Calderón (Cf [2] ou [3]) : si $(A_0,\ A_1)$ forme un couple d'espaces de Banach compatible on définit les normes suivantes sur l'intersection et la somme :

$$\|a\|_{A_0\cap A_1} = \max\left(\|a\|_{A_0}, \|a\|_{A_1}\right)$$
$$\|a\|_{A_0+A_1} = \inf\left(\|a_0\|_{A_0} + \|a_1\|_{A_1}, a = a_0 + a_1, a_j \in A_j, j = 0, 1\right),$$

qui en font des espaces de Banach. On appelle $\mathcal{F}(A_0,\ A_1)$ la famille des fonctions f bornées continues sur la bande $\overline{S} = \{z\ \in \mathbb{C},\ 0 \leq \Re z \leq 1\}$, à valeurs dans $A_0 + A_1$, holomorphes sur l'intérieur $S = \{z\ \in\ \mathbb{C},\ 0\ <\ \Re z\ <\ 1\}$, vérifiant $f(j+it) \in A_j$ pour $j = 0,\ 1$ et $||f(j+it)||_{A_j}$ tend vers zéro lorsque $|t|$ tend vers l'infini, $j = 0,\ 1$. L'espace $\mathcal{F}(A_0, A_1)$ muni de la norme

$$\|f\|_{\mathcal{F}} = \max_{j=0,1} \sup\nolimits_{t\in\mathbb{R}} \|f(j+it)\|_{A_j}$$

est un espace de Banach, et on définit, pour $\theta \in [0,1]$, l'espace d'interpolation complexe

$$(A_0, A_1)_\theta = \{f(\theta), f \in \mathcal{F}\left(A_0, A_1\right)\},$$

qu'on munit de la norme $||a||_{[\theta]} = \inf\{||f||_{\mathcal{F}},\ f \in \mathcal{F},\ f(\theta) = a\}$, qui n'est autre que la norme du quotient de $\mathcal{F}(A_0,\ A_1)$ par le sous-espace des fonctions qui s'annulent au point θ. Les espaces $(A_0,\ A_1)e$ sont intermédiaires entre $A_0 \cap A_1$ et $A_0 + A_1$ et on montre que l'intersection $A_0 \cap A_1$ est dense dans $(A_0,\ A_1)_\theta$ pour tout $\theta \in [0,1]$

Calderón définit une deuxième méthode d'interpolation complexe en considérant cette fois la famille $\mathcal{G}(A_0,\ A_1)$ des fonctions g continues sur $\overline{S}$ à valeurs dans A_0+A_1, holomorphes sur S, vérifiant $||g(z)\|_{A_0+A_1} \leq c(1+|z|)$, et $g(j+it_1)-g(j+it_2) \in A_j$

pour $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$ et $j = 0, 1$, avec

$$\|g\|_{\mathcal{G}} = \max_{j=0,1} \sup_{t_1,t_2 \in \mathbb{R}} \|\frac{g(j+it_1) - g(j+it_2)}{t_1 - t_2}\|_{A_j} < \infty$$

L'espace $\mathcal{G}(A_0,\ A_1)$ modulo les fonctions constantes et muni de la norme $\|\|\cdot_{\mathcal{G}}$ est un espace de Banach, et on pose

$$(A_0, A_1)^{\theta} = \{g'(\theta), g \in \mathcal{G}\},$$

qu'on munit de la norme $\|a\|^{[\theta]} = \inf\{\|g\|_{\mathcal{G}}, g \in \mathcal{G}, g'(\theta) = a\}$. Calderón a montré que l'espace $(A_0,\ A_1)_{\theta}$ s'injecte dans l'espace $(A_0, A_1)^{\theta}$ mais c'est à Bergh ([1]) que l'on doit de savoir que cette injection est isométrique.

Nous considérons ici deux cadres possibles dans lequel interpoler X et son anti-dual : dans le premier on suppose qu'il existe un espace de Hilbert H et une injection v d'image dense de H dans X. L'application adjointe $v^{\star}$ est alors une injection de $\overline{X^{\star}}$ dans $\overline{H}^{*} = H$, ce qui permet d'identifier $\overline{X^{\star}}$ au sous-espace $vv^{\star}(\overline{X^{\star}})$ de X. L'intersection $X \cap \overline{X*}$ est alors égale à $\overline{X^{\star}}$ tandis que la somme $X + \overline{X*}$ est égale à X. Cette situation a déjà été essentiellement considérée par Haagerup et Pisier ([4]) en ce qui concerne les espaces de Banach, et par Pisier ([5]) pour les espaces d'opérateurs, où l'espace de Hilbert H est remplacé par l'espace d'opérateurs OH. Un exemple typique est fourni par $X = L^1[0,\ 1], H = L^2[0,\ 1])$ et $v = Id$. Le théorème est le suivant :

Théorème 1 *Soit H un espace de Hilbert, soit $v : H \to X$ une injection d'image dense. Alors $\overline{X^{\star}} \xrightarrow{v^{\star}} \overline{H^{\star}} = H \xrightarrow{v} X$ fournit un cadre pour interpoler X et $\overline{X^{\star}}$, et dans ce cadre $(X, \overline{X^{\star}})_{\frac{1}{2}} = H$ avec égalité des normes.*

Dans le deuxième cadre on suppose qu'il existe un espace de Hilbert H et une injection d'image dense v de X dans H. Remarquons qu'il suffit en réalité de connaître une injection de X dans H car en restreignant l'espace d'arrivée on obtient une injection d'image dense. L'application $v^{\star}v$ permet alors d'identifier X au sous-espace $v^{\star}v(X)$ de $\overline{X^{\star}}$. Dans ce cas l'intersection de X et $\overline{X*}$ est égale à X tandis que la somme est égale à $\overline{X^{\star}}$. Un exemple typique de cette situation est fourni par $X = C[0,1], H = L^2[0,1]$ et $v = Id$. Pour conclure à l'isométrie de $(X, \overline{X^{\star}})_{\frac{1}{2}}$ avec H dans ce cadre on a besoin du fait, intéressant en lui-même, que $(A_0^{\star},\ A_1^{\star})_{\theta}$ est séquentiellement préfaiblement dense dans $(A_0^{\star},\ A_1^{\star})^{\theta}$, ce qui entraîne en particulier l'égalité de ces deux espaces dès que l'un des deux est réflexif. On obtient le théorème suivant :

Théorème 2 *Soit H un espace de Hilbert, soit $v : X \to H$ une injection d'image dense. Alors $X \xrightarrow{v} H = \overline{H\star} \xrightarrow{v^{\star}} \overline{X^{\star}}$ fournit un cadre pour interpoler X et $\overline{X*}$, et dans ce cadre $(X, \overline{X^{\star}})_{\frac{1}{2}} = H$ avec égalité des normes.*

Bibliographie

[1] *J. Bergh* On the relation between the two complex methods of interpolation. Indiana Univ. Math. J. 28 (1979), 775-778.

[2] *J. Bergh el J. Löfström* Interpolation Spaces. An introduction. Grundlehren 223 Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York 1976.

[3] *A. P. Calderón* Intermediate spaces and interpolation, the complex method. Studia Math. 24 (1964), 133-190.

[4] *U. Haagerup et G. Pisier* Factorization of analytic functions with values in noncommutative L^1-spaces and applications. Canadian J. Math. 41 (1989) 882-906.

[5] *G. Pisier* The Operator Hilbert Space OH, Complex Interpolation and Tensor Norms. preprint.

Equipe d'analyse et mathématiques appliquées
Université de Marne-la-Vallée
2, rue de la Butte-Verte, 93166 Noisy-le-Grand cedex
watbled@math.univ-mlv.fr

Débat : l'insertion des jeunes mathématiciennes

Une trentaine de jeunes mathématiciennes étaient présentes à ce débat animé par Colette Guillopé, présidente de l'association *femmes et mathématiques*, Marie Frangoise Roy, organisatrice du forum, Juliane Unterberger et Sylvie Paycha, membres de l'association. L'objectif de ce débat était de sensibiliser les jeunes mathématiciennes au thème de la place des femmes dans les mathématiques et de recueillir leurs impressions et expériences personnelles.

Statistiques : Afin de lancer le débat, quelques données statistiques ont tout d'abord été présentées, les unes relatives à la proportion de filles dans les filières scientifiques de l'enseignement secondaire et supérieur, les autres à la proportion de femmes dans les carrières d' enseignement et de recherche en mathématiques à l'université. Ces statistiques sont publiées dans le numéro 1 de la revue *femmes et math.* Les données statistiques de ces dernières années montrent que la proportion de filles n'a pas sensiblement progressé dans les séries scientifiques, qu'elle a cependant légèrement augmenté dans les filières scientifiques du DEUG (DEUG A) et baissé dans les filières de médecine. Elles montrent aussi que la proportion de femmes recrutées sur des postes d'enseignant-chercheur diminue avec le nombre de postes vacants. Une analyse plus détaillée de l'évolution récente du nombre de femmes recrutées par rapport au nombre total de recrutements sur des postes d'enseignants-chercheurs est en cours.

Impressions de jeunes mathématiciennes :

Certaines mathématiciennes présentes n'ont pas ressenti de disproportion entre filles et garçons, femmes et hommes au cours de leurs études secondaires et de leur formation universitaire. Les statistiques présentées les surprennent et ne correspondent pas à l'impression qu'elles avaient.

Les filles se dirigeraient cependant moins facilement vers une filière scientifique que les garçons, moins par manque de goût que par manque de confiance en elles. Ce manque de confiance se retrouve ensuite chez les mathématiciennes (jeunes et moins jeunes) qui peuvent parfois être plus hésitantes que les hommes à soumettre des articles pour publication alors que la liste de publications joue bien sûr un rôle important pour le recrutement.

Certaines mathématiciennes présentes au débat ont cependant ressenti une disproportion entre femmes et hommes au niveau de la préparation de la thèse, dans les séminaires, les conférences. Il y a peu de directrices de thèse de mathématiques en France ; il est pourtant intéressant de remarquer que parmi les jeunes femmes présentes, plusieurs sont dirigées par une mathématicienne.

Des questions ont été posées quant aux répercussions pour les filles de la mixité dans l'enseignement. La mixité jouerait-elle en défaveur des filles ?

-Les femmes rencontrent des difficultés pratiques au cours de leur formation universitaire, comme par exemple le manque de structures de prise en charge des enfants (crèche universitaire, garde d'enfants dans les centres de conférence) et le manque de mobilité géographique lorsqu'elles ont une famille. Cette mobilité est cependant utile en début de carrière surtout quand les postes se font rares.

Conclusions : Les jeunes mathématiciennes présentes ont trouvé intéressante l' initiative d'organiser un forum de jeunes mathématiciennes. Le fait qu'elles soient entre jeunes leur a semblé propice à faire de ce forum un lieu de rencontres et d'échanges agréable dans une ambiance détendue. Le caractère presque non mixte de la rencontre (pas de conférencier masculin, très peu de participants masculins) les a a priori surprises. Cette caractéristique a pu selon certaines contribuer à créer une atmosphère de confiance durant cette rencontre. Elles espèrent pouvoir maintenir des contacts qu'elles ont pu établir au cours de cette journée avec d'autres jeunes mathématiciennes. L'ouverture thématique de la rencontre au cours de laquelle elles ont pu écouter des exposés sur des domaines très éloignés du leur, leur a semblé enrichissant. Il s'est dégagé de cette journée un souhait quasi-unanime de recommencer une telle initiative l'année prochaine.

compte-rendu rédigé par *Sylvie Paycha*

Echo d'une participante

Je ne peux donner que ma propre opinion, car je n'ai pas eu l'occasion de discuter depuis avec d'autres participantes, mais enfin la voici.

Le bilan global est positif. Les exposés etaient intéressants, tout le monde ayant fait un réel effort pour être compréehensible. L'un des avantages d'être entre jeunes est qu'on ose facilement poser des questions. C'est aussi plus agréable pour celui qui expose (on a vraiment l'impression de s'adresser à des collègues et pas de "passer un oral" comme c'est parfois le cas). J'ai aussi apprecié, au débat du soir, d'avoir enfin des données objectives sur la proportion de femmes parmi les matheux. J'avoue avoir été surprise : je croyais, comme beaucoup, que cette proportion augmentait lentement mais sûrement, ce qui n'est visiblement pas le cas.

Et je pense qu'il est aussi très important que les jeunes matheux aient l'occasion de se rencontrer et apprennent à se connaître. Bref, j'ai apprecié au forum "jeunes mathématiciennes" ce que j'avais déjà aimé au colloque "jeunes probabilistes" à Aussois : de belles maths dans une ambiance plus détendue que d'habitude.

Mais j'avoue qu'à la journée de janvier, le fait de se retrouver entre filles m'a paru quand même un peu bizarre (nous sommes tellement habituées à faire des maths au milieu d'une majorité de garçons... !)

S'il faut faire quelques suggestions, je dirai que :
Ce serait bien de faire un peu plus de "publicité" pour le forum les années prochaines, ou de la faire un peu plus tôt. Il y a eu quelques problèmes d'information cette année. Mais peut-être est-ce toujours le cas quand un colloque a lieu pour la première fois (il faut dire aussi que les grèves de décembre n'ont rien arrangé).

L'exposé sur l'évolution de la présence des femmes dans les domaines scientifiques pourrait-il avoir lieu un peu plus tôt (ou a la pause de midi) ? J'habite en province et j'ai regretté de devoir manquer la fin pour ne pas manquer mon train. Pourrait-on aussi avoir une photocopie de quelques-uns des tableaux les plus significatifs ? En rediscutant de tout celà ensuite avec les thésardes de mon bureau (qui n'avaient pas assisté au colloque) j'ai regretté de ne pas en avoir.

Myriam Fradon

Rapport d'une enquête auprès de jeunes mathématiciennes en France

A l'occasion du forum des jeunes mathématiciennes organisé par l'association *femmes et mathématiques* en Janvier 1996 à l'I.H.P., une enquête a été menée sous forme de questionnaire diffusé par correspondance à de jeunes mathématiciennes en France. Parmi la trentaine de jeunes mathématiciennes présentes au forum, 16 ont répondu au questionnaire, 2 jeunes mathématiciennes ont répondu qui n'avaient pas participé au forum. Nous rapportons ici sur les résultats de cette petite enquête. Celle-ci portant sur un très petit nombre de personnes, les résultats que nous présentons ici ne doivent être considérés qu'à titre indicatif.

Description du questionnaire

Le questionnaire se divisait en trois parties.
- La première permettait d'évaluer la proportion de femmes parmi les doctorants au sein de l'équipe ou du laboratoire et dans les séminaires auxquels assiste la personne interrogée ainsi que son degré de participation à ces séminaires et groupes de recherche.
-La deuxième partie comportait un premier groupe de questions d'ordre subjectif, visant à apprécier dans quelle mesure la personne interrogée se sent plus ou moins bien intégrée dans son équipe ou laboratoire. Un deuxième groupe de questions portait sur ses liens avec le monde de la recherche extérieur à son laboratoire : accès à une information suivie relative aux publications récentes, participations à des conférences. Un troisième groupe de questions tentait de cerner le sentiment chez la mathématicienne interrogée, d'appartenir ou non à une minorité au sein de la communauté mathématique.
-Dans la troisième partie, il était demandé à la personne interrogée de donner son opinion sur le forum auquel elle venait de participer.

Objectifs de l'enquête

L'enquête comportait deux objectifs. Le premier était de mieux connaître les conditions de travail des jeunes mathématiciennes, le degré de leur intégration au sein de la communauté mathématique, leur perception de leur statut de jeune mathématicienne au sein ce cette communauté. Le deuxième était de les sensibiliser à la question de la place de la femme dans les mathématiques à partir de son propre parcours de jeune mathématicienne.

Nous tenterons tout d'abord de dégager quelques conclusions des résultats des deux premières parties de cette enquête et nous rapporterons ensuite quelques unes des réactions au forum qui se sont dégagées des réponses à la troisième partie de ce questionnaire.

Resultats de l'enquête

Parmi les doctorantes interrogées, 4 ont une directrice de thèse, 14 un directeur de thèse. 3 d'entre elles assistent à un seul séininaire, 2 à un ou plus, 11 à au moins deux séminaires, ceux-ci étant des séminaires spécialisés ou groupes de travail. Dans l'ensemble les mathématiciennes interrogées se sentent assez bien intégrée dans leur équipe (9 se sentent très bien intégrées, 5 se sentent plutôt bien intégrées, 2 se sentent isolés) ou dans leur laboratoire (7 se sentent très bien intégrés, 8 se sentent plutôt bien intégrées, 3 se sentent isolées). 10 sur 18 s'estiment bien informées de ce qui se passe dans leur laboratoire et dans leur université. Elles ne semblent pas ressentir l'aspect minoritaire de la représentation des femmes parmi les mathématiciens en général au niveau de leur équipe ou laboratoire, que ce soit dans les séminaires ou groupes de travail qu'elles fréquentent ou par la proportion de doctorantes parmi tous les doctorants dans leur équipe ou leur laboratoire (qui fluctue d'ailleurs beaucoup d'une réponse à l'autre). Par contre, l'aspect minoritaire de la representation des femmes parmi les mathématiciens en général semble être ressenti à l'extérieur de leur université dans le cadre de congrès par exemple ; 14 parmi 16 personnes qui ont répondu ont eu l'impression d'avoir constaté une proportion de femmes inférieure à 20 pour cent en moyenne dans les congrès auxquels elles ont assisté, 2 personnes estiment cette proportion comprise entre 20 et 50 pour cent. Elles ont participé pour 8 (parmi 16 réponses à cette question) d'entre elles à au moins 3 conférences à l'extérieur de l'université et pour 6 d'entre elles à une ou deux conférences.

Les impressions sur le forum

Dans l'ensemble, le forum a été jugé de manière très positive. L'accueil chaleureux avec lequel les participantes ont été reçues, la convivialité de la rencontre ont été mentionnés plusieurs fois dans les réponses. Ont aussi été relevés , l' aspect pluridisciplinaire de cette rencontre, la diversité des thèmes et le fait qu'une telle rencontre permet d'établir des contacts scientifiques.

Certaines ont émis quelques réserves, notamment sur le fait que la rencontre soit exclusivement féminine, ce qui les a parfois surprises au premier abord. Dans l'ensemble, elles conviennent cependant a posteriori que ceci a pu en contre partie contribuer à les mettre á l'aise, sans crainte d'être jugées. D'autre part, bien que les organisatrices aient insisté sur la nécessité d'une présentation accessible au plus grand nombre, certaines participantes ont trouvé certains exposés peu accessibles. Des suggestions ont été faites pour la prochaine rencontre de ce type, en particulier que des "mathématiciennes seniors" fassent part de leur experience de mathématiciennes et qu'il y ait plus de temps pour les débats et échanges informels.

Nous espérons avoir rendu compte aussi fidèlement que possible des réponses au questionnaire que nous avions soumis aux participantes à ce forum et nous remercions vivement toutes celles qui y ont répondu.

Sylvie Paycha, Julianne Unterberger

femmes & *math*
Revue de l'association *femmes et mathématiques*
Institut Henri Poincaré
11 rue Pierre et Marie Curie
75231 Paris cedex 05

Supplément au Numéro 2
Premier Forum des Jeunes Mathématiciennes, 1996

Coordination du supplément au numéro 2 *Marie-Françoise Roy*
Directrice de Publication : *Colette Guillopé*
Imprimerie de l'Université de Rennes I
Numéro ISSN : 1271-3546
Dépôt légal : octobre 1996
Prix du supplément : 40 FF