Apprendre et enseigner une mathematique dynamique : enjeu scientifique et social

Annie Berté

J'enseigne les mathématiques depuis 1970 et j'ai changé peu à peu mon enseignement à mesure que j'ai su créer les conditions pour donner la parole à mes élèves. J'ai alors compris que :

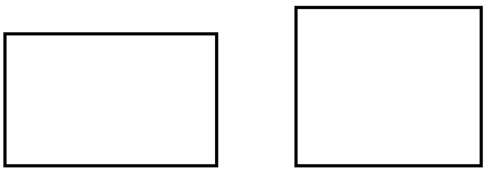
• les mathématiques ne leur apprennent pas à raisonner, ils/elles savent déjà. Tous les hommes et toutes les femmes possèdent les bases du raisonnement implicite. En revanche, elles peuvent leur apprendre à mieux exprimer et défendre leurs raisons, leur pensée.

• les mathématiques peuvent leur permettre d'enrichir les modèles et les représentations mentales qu'ils utilisent. Pour défendre et enrichir leur idées ils/elles doivent pouvoir les mettre à l'épreuve, les exprimer, les confronter à d'autres. Cela ne peut se produire dans n'importe quelle situation scolaire.

Je vais donner quelques exemples de situations qui m'ont permis d'entendre mes élèves, ce faisant de voir parfois les mathématiques d'une façon différente de celle dont je les avais apprises. J'ai travaillé depuis le début avec mon amie Emma Castelnuovo qui a enseigné toute sa vie dans une école secondaire à Rome, l'équivalent de notre collège, et qui m'a donné les ficelles du métier.

Exemple 1 :

Avec un bout de ficelle noué, je fabrique deux rectangles de même périmètre.



Ces rectangles ont-ils la même aire ? Du cours moyen à la terminale, les élèves répondent en grande majorité oui, et ils donnent les arguments suivants :

(1) C'est la même ficelle donc l'aire ne peut s'échapper. De façon plus élaborée ils disent : C'est la même aire car c'est le même périmètre. Effectivement deux cercles, deux carrés, deux triangles équilatéraux de même périmètre ont aussi la même aire. Ces figures sont des modèles implicites pour cette réponse. C'est vrai pour toutes les figures qui restent semblables à elles-mêmes quand on change leurs dimensions. Ce n'est pas le cas des rectangles.

(2) Il y a compensation, ce qu'on perd dans le sens de la longueur on le gagne dans le sens de la largeur. Effectivement il y a compensation sur la somme mais est-ce

vrai pour le produit ? J'ai trouvé des étudiants en mathématiques qui disaient : Mais pourtant il y a une relation entre somme et produit de deux nombres :

$$(x+y)^2 - (x-y)^2 = 4xy.$$

Donc si la somme est constante, le produit doit être constant. Je leur ai dit : mais il y a la différence $x - y$ et ils m'ont répondu : Une différence, c'est comme une somme $x + (-y)$!

(3) Le professeur va jusqu'à la limite, où l'aire est nulle. Un élève de LEP dans la banlieue de Bordeaux a dit : Je le vois mais je ne peux le croire ! Certains essaient de prendre des mesures pour calculer, mais peu le font si aucune longueur de ficelle n'est fournie explicitement par le professeur.

(4) Pour sortir de la contradiction certains disent : L'aire est constante et tout d'un coup elle devient nulle, abandonnant ainsi la continuité de la transformation. D'autres disent : L'aire change quand ce n'est plus un rectangle. A la limite, nous avons un segment, et ce n'est plus un rectangle. Mais c'est déjà vrai avant la limite, quand la figure est très longue par rapport à la largeur. C'est une bande, ce n'est plus un rectangle ! Alors cela commence Ã diminuer

En 6ème, avant d'introduire la ficelle, nous demandons aux élèves de tracer sept rectangles de périmètre 18. Ils n'en trouvent que trois (2x7, 3x6, 4x5). Il y a un doute sur 1x8 (trop long) et 4,5 x 4,5 (carré). Effectivement dans certaines circonstances, en classe, un carré n'est pas un rectangle. Par exemple pour le calcul du périmètre, deux formules distinctes sont toujours utiles $p = 4c$ ou $p = 2(L + l)$. Si un problème de géométrie commence par : Soit un rectangle ABCD ... il est fortement conseillé de ne pas faire la figure en traÃ§ant un carré. Il est normal que ce jeu subtil ne soit pas transparent au premier abord pour la majorité des élèves. Ce n'est pas une difficulté de raisonnement.

Le problème de la ficelle se poursuit ainsi. Nous avons une grandeur qui varie, d'où une fonction qui est l'aire mais quelle est la variable ? Il faut comprendre que les deux dimensions sont liées. Les élèves de 6ème découpent les rectangles de périmètre 18 qu'ils ont tracés et cherchent à les classer. Un classement selon une dimension, selon l'aire, ou selon la mesure de la diagonale, conduit à empiler les rectangles avec un sommet commun et à les placer dans un repère. Les quatrièmes sommets sont alignés, ce qui provoque la surprise, et donne du sens aux coordonnées. La symétrie par rapport à la bissectrice traduit l'involution : $x \to k - x$.

Pour l'aire, les élèves anticipent le maximum entre les deux zéros : l'aire augmente, passe par un maximum et diminue (Rolle). On obtient :

La symétrie par rapport à la bissectrice traduit l'involution : $x \to k - x$.

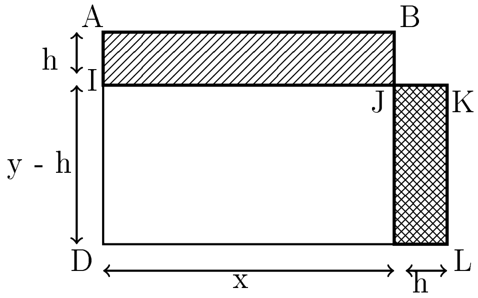
Pour l'aire, les élèves anticipent le maximum entre les deux zéros : l'aire augmente, passe par un maximum et diminue (Rolle). On obtient :

$$A(x) = x(k - x) = -x^2 - kx$$

d'où une parabole. La preuve du maximum s'obtient sans la dérivée :

$$F(X) = [(k/2) - X][(k/2) + X] = (k^2/4) - X^2.$$

Certains élèves reviennent à' leur erreur initiale et protestent : Ce que j'ai dit était presque vrai ! Car vous m'avez tendu un piège, l'aire change très peu près du carré. Ils ont raison :



Je perds : xh. Je gagne : $(y-h)h$. On a

$$(x+h)(y-h) = xy + (y-x)h - h^2$$

L'accroissement est : $(y-x)h - h^2$. Si $y - x = h$, on a deux rectangles symétriques. La partie linéaire en h : $y - x = k - x - x = k - 2x$ donne la dérivée. On retrouve pour h petit la faible variation autour du carré (quand $y - x = 0$, soit $y = x$).

Le professeur peut poser le problème dual : variation du périmètre de rectangles d'aire fixe. On obtient deux hyperboles (une dimension fonction de l'autre, puis la variation du périmètre).

Certains élèves disent qu'ils ont vu le mot hyperbole en français, c'est une figure de style. En revanche, le mot parabole est inconnu, les paraboles de l'évangile n'éveillent aucun écho. Tous les élèves sont intéressés par l'origine grecque de ces mots. Apollonius de Perge comparait l'aire d'un rectangle de côtés x et 1 et l'aire d'un carré de côté y :

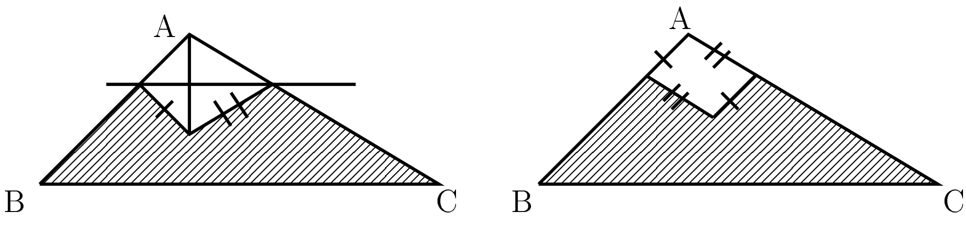
$y^2 = x$ est une parabole : mettre (bole) en comparaison (para),

$y^2 = x + a^2x^2$ est une hyperbole : mettre (bole) en plus (hyper),

$y^2 = x - a^2x^2$ est une ellipse : il manque, comme dans l'expression : une phrase elliptique.

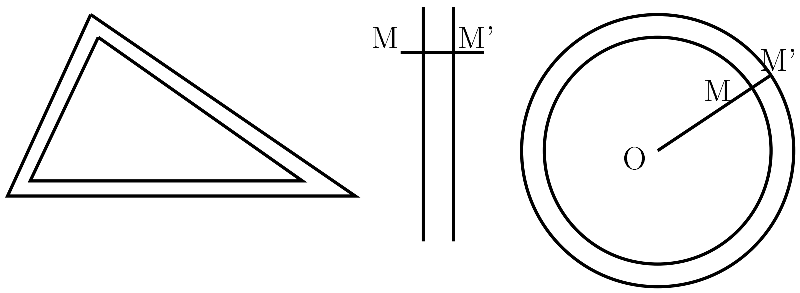
Exemple 2 :

a) -Un triangle ABC étant donné. Construire une figure de même périmètre et d'aire plus petite.

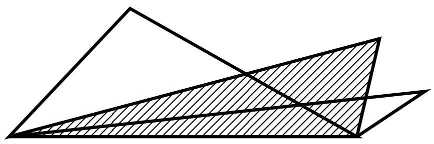


Solutions d'élèves de 10-11 ans : la partie hachurée répond à la question.

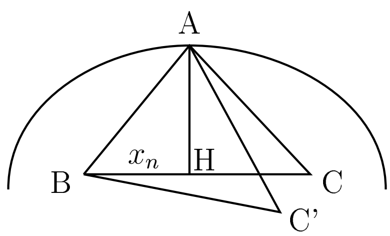
Certains s'imposent de tracer un autre triangle, contrainte qui n'est pas dans l'énoncé. J'en ai vu alors qui ont fait un autre triangle très près du premier à l'intérieur en disant : C'est le même périmètre car les lignes sont très près, mais l'aire est plus petite car c'est à l'intérieur.



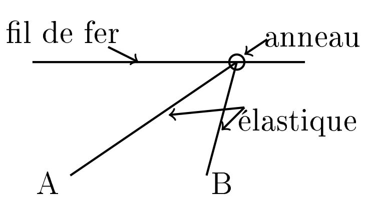
Effectivement si je trace deux segments parallèles j'ai une correspondance point à point entre eux et ils ont la même longueur. Pourquoi n'en serait-il pas de même pour deux cercles concentriques ou deux triangles ? Deux lignes de longueur différentes peuvent être mises en bijection, c'est un paradoxe sur lequel il faut réfléchir un jour. Les élèves plus grands qui s'imposent de tracer un triangle gardent en général un côté fixe. On leur demande alors de donner plusieurs solutions et ils sont surpris de retrouver une ellipse.

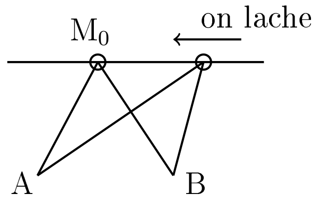


A perimètre donné p, l'aire la plus grande est celle du triangle isocèle quand on garde un côté fixe. A partir du triangle isocèle de base $[BC]$, on augmente à nouveau l'aire en gardant $[AB]$ fixe. On obtient un deuxième triangle isocèle de base $[AB]$. On continue et cela donne une suite de triangles qui converge vers le triangle équilatéral. Cela se montre en appelant x_n la longueur de la demi base à l'étape $n, x_{n+1} = \dfrac{p - x_n}{2}$.



b- Problème dual : Sur une planche sont matérialisés des triangles de base fixe $[AB]$ et d'aire constante car le sommet M se déplace sur une droite (D) parallèle à $[AB]$. Le périmètre minimum est obtenu avec le triangle isocèle.





c- Au lieu d'avoir $(AB)//(D)$ prenons les points A et B quelconques. Le problème est alors de trouver un point M de (D) tel que $MA + MB$ soit minimum.

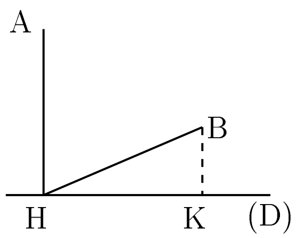
Conjectures des élèves :

1- Le trajet le plus court est $AH + HB$ car je vais "tout droit" pour commencer.

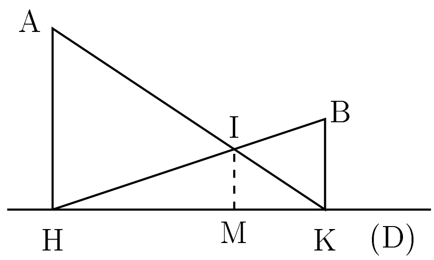
2- Il n'y a pas de raison que le trajet le plus court soit AHB plutôt que BKA. Je prends une solution moyenne $AM + MB$ en projetant le point I en M.

3- Le trajet le plus court se trouve en projetant le milieu de $[AB]$ ou directement avec M milieu de $[HK]$.

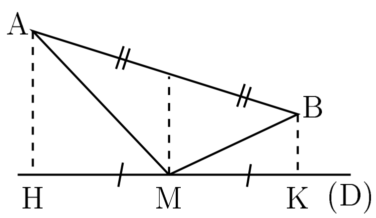
4- Le trajet le plus court se trouve avec un point M de la droite équidistant de A et B (sur la médiatrice de $[AB]$).



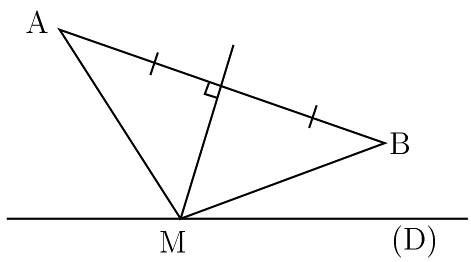
- 1 -



- 2 -

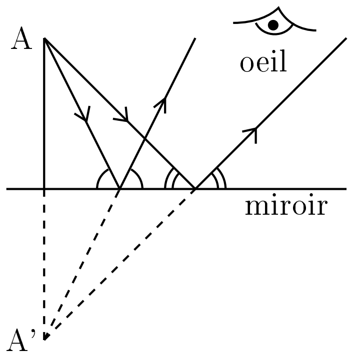


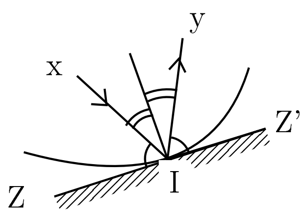
- 3 -



- 4 -

Parmi ces conjectures une seule est exacte mais c'est difficile de le vérifier en mesurant sur le dessin car il y a toute une zone où on peut avoir différents points M et trouver la même mesure $MA + MB$. Il y a plusieurs façons de penser à introduire le point A' symétrique de A par rapport à (D) . Par exemple la réflexion sur un miroir d'un rayon de lumière quí suivra le trajet le plus court.

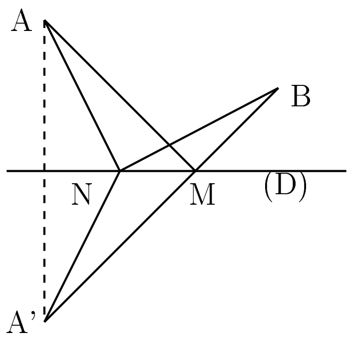


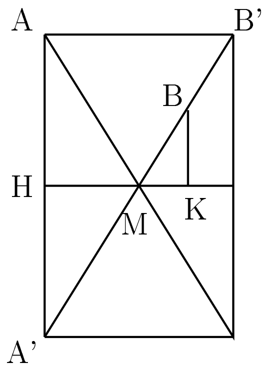


La loi est la même sur le miroir courbe à condition de remplacer localement la courbe par un miroir plan selon le plan tangent.

Solution géométrique : $AN + NB = A'N + NB, A'N + NB > AB$.

Pour penser à A' symétrique de A, on peut aussi dire : je remplace le problème par un problème plus facile. J'aurais la solution qui est la ligne droite si les points A et B étaient de part et d'autre de la droite, donc je remplace A par son symetrique A' ou bien B par son symétrique.

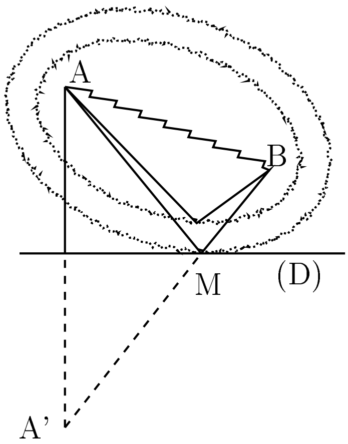




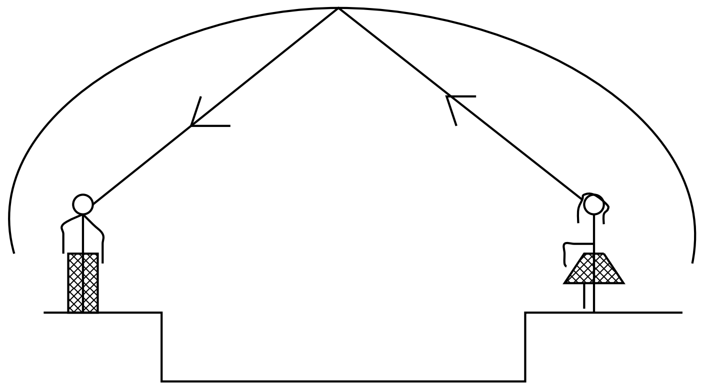
Une solution par le calcul est possible $(x = HM)$. Les calculs sont plus faciles si $(AB)//(D)$. On peut s'y ramener en remontant le point B. C'était l'idée d'un étudiant, ce qui lui a permis d'introduire les symétriques.

La conjecture exacte parmi les quatre avancées était la 2. Le point M solution divise le segment $[HK]$ dams le rapport AH/BK. On retrouve le cas particulier du milieu quand $AH = BK$.

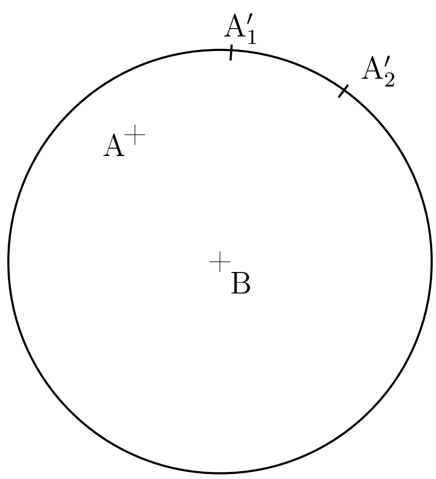
Le résultat trouvé précédemment est à mettre en relation avec une propriété de l'ellipse : le symétrique A' du foyer A par rapport àla tangente en M, le point M et le foyer B sont alignés.

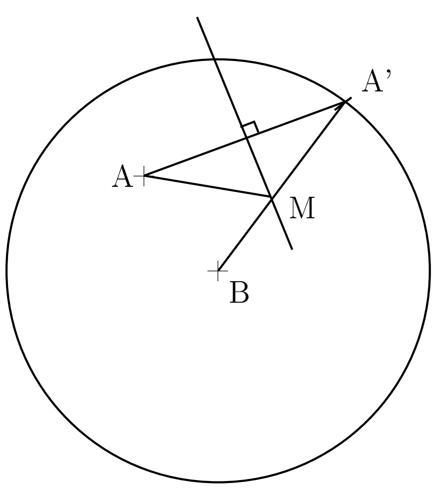


Ce dessin est censé représenter les deux quais du métro parisien. Construire des voûtes elliptiques permet de communiquer à distance......



Ce théorème justifie de l'ellipse par pliage comme enveloppe de ses tangentes.





Par pliage on fait venir A sur $A\acute{\imath}$ et à chaque fois on repasse sur le ph avec un crayon.

Rayon du cercle : $BA' = MA + MB$.

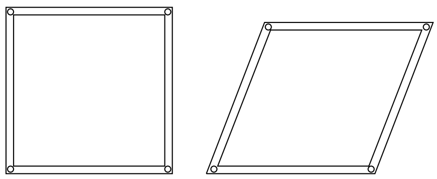
On obtient de même la parabole en remplaçant le cercle par une droite, résultat qui peut se démontrer dès la seconde. Les élèves disent : Mais comment démontrer que toutes ces droites sont tangentes à une parabole ? Ils voient alors l'intérêt d'utiliser un paramètre pour écrire les équations, une seule expression nous les donne toutes !

On obtient l'hyperbole en plaçant le point A à l'extérieur du cercle. En fait on pourrait imaginer le point A et le point A'_1 fixes ainsi que le diamètre du cercle passant par A'_1. Le point B s'éloigne de A'_1 sur ce diamètre et la courbure du cercle diminue car son rayon augmente. Quand B est à l'infini on a une droite, puis le cercle se courbe dans l'autre sens et le point A devient exterieur au cercle.

Cette idée rejoint celle d'un de mes élève à propos du cercle circonscrit au triangle. Je matérialisais le triangle par deux baguettes articulée en A et je disais : Quand l'angle A est aigu, le centre est dans le triangle, quand l'angle A augmente le centre du cercle descend, quand l'angle est droit, le centre du cercle est au milieu du côté variable, puis quand l'angle devient obtus, le centre sort du triangle. A la limite pour l'angle plat, le centre est à l'infini. Un élève m'a dit alors : Pourquoi vous ne continuez pas dans l'autre sens ? Effectivement si l'angle devient rentrant, le centre du cercle saute d'un infini à l'autre pour rentrer à nouveau progressivement dans le triangle.....

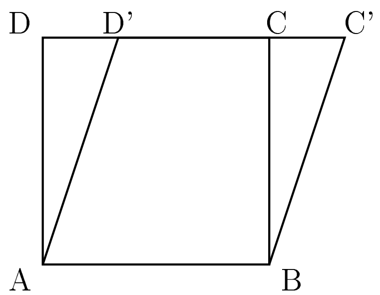
Exemple 3 : Le carré articulé

Voici un carré articulé dans deux positions voisines.

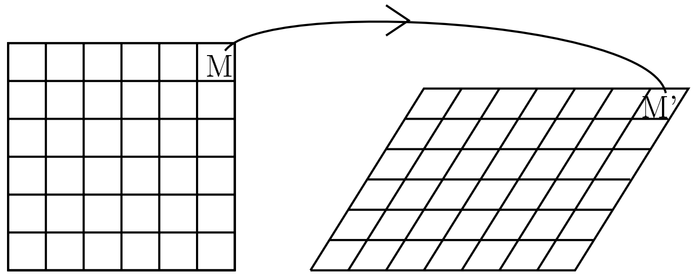


Les deux losanges ont-ils la même aire ? Comme pour les rectangles de ficelle certains élèves disent : C'est la même aire car c'est le même périmètre.

L'argument de compensation est un peu différent. Certains font la figure ci- dessous en expliquant que l'aire perdue à gauche se retrouve à droite, sans s'apercevoir qu'elle ne rend pas compte de la situation car dans le mouvement les côtés ne changent pas de longueur. Or ici $AD < AD'$.



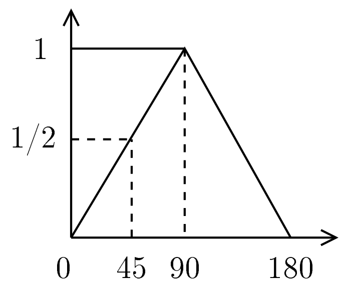
D'autres élèves disent que c'est la même aire car le côté reste le même croyant que l'aire du parallélogramme se calcule par le produit des côtés. La justification qu'ils donnent est la suivante : La formule de l'aire du rectangle par le produit des dimensions se justifie par un quadrillage. Dans un parallélogramme on a toujours le même quadrillage mais penché ! Néanmoins le nombre de cases du quadrillage est le même, si petites que soient les cases.



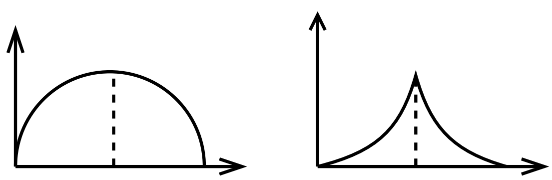
Effectivement il y a une bijection point à point entre deux parties du plan d'aires différentes. Il s'agit de l'obstacle de l'infini en dimension deux, le même qui a surgi pour la bijection entre deux segments de longueurs différentes ou deux cercles concentriques.

On a une fonction qui est l'aire du losange. Quelle est la variable ? Les élèves suggèrent souvent la hauteur du parallélogramme, et il faut comprendre que la variation de l'aire est la même que la variation de la hauteur. Puis ils suggèrent l'angle ou bien la diagonale. Quand on choisit l'angle, les élèves prévoient le graphique de la variation de l'aire.

Souvent ainsi



Parfois ainsi



Un dessin sur quadrillage permet de se convaincre que la linéarité n'est pas la bonne hypothèse. En comptant les carreaux on voit que pour 45 degrés, l'aire n'est pas moitié de celle du carré. C'est important à cause de l'erreur fréquente :

sin(2a) = 2sin(a). Le graphique terminé point par point, les élèves pensent en 'général qu'il s'agit d'une parabole. On comprend que ce n'en est pas une en prenant un point particulier.

Ce problème du carré articulé permet d'introduire la fonction sinus et nous conduit à deux autres thèmes :

- celui des transformations affines,
- celui des isopérimètres.

La transformation affine bijective entre les deux parties du plan est la suivante :

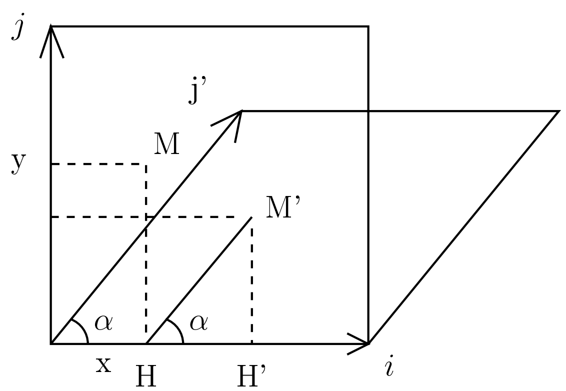
$$AM' = f(AM) = f(xi + yj) = x'i + y'j,$$
$$f(i) = i, f(j) = j',$$
$$f(xi + yj) = xf(i) + yf(j) = xi + yj',$$

avec

$$j' = (\cos\alpha)i + (\sin\alpha)j$$
$$x' = x + y(\cos\alpha),$$
$$y' = \sin\alpha.$$

soit

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & 1 \\ \sin\alpha & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$



En général

$$x' = ax + by$$
$$y' = cx + dy$$

ayant pour matrice

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

Par diagonalisation, on cherche. les vecteurs transformés en vecteurs colinéaires : $(a-\lambda)(d-\lambda)-bc=0$.

1- S'il y a deux valeurs propres réelles λ_1 et λ_2, on a denx vecteurs propres $u' = \lambda_1 u$ et $v' = \lambda_2 v$, dams la base des vecteurs propres, la matrice est :

$$\left\{ \begin{matrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{matrix} \right\}.$$

2- S'il y a deux valeurs propres complexes :

$$\left\{ \begin{matrix} a & b \\ c & d \end{matrix} \right\}$$

est le produit d'une matrice de rotation par une matrice ayant deux valeurs propres réelles.

3- S'il y a une valeur propre double : la transformation est une homothétie ou une transvection qui est la composée de deux affinités.

On prend maintenant une toile élastique attachée à deux batons parallèles. Le dessin sur une toile élastique donne toutes les transformations affines aux isométries près. Les aires sont multipliées par le produit des valeurs propres (réels positifs).

Pour le carré articulé, la valeur propre i est associée au vecteur propre ι et a 1 valeur propre sino associée au vecteur propre JJ'. L'ombre du carre donnée par le soleil sur le sol se mathématise par une transformation affine et l'ombre donnée par la lampe se mathématise par une transformation projective.

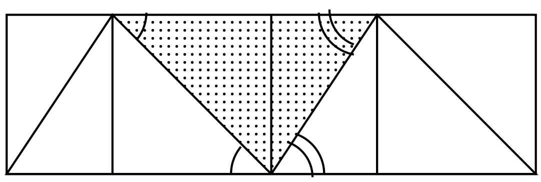
Si deux polygones ont le même périmètre, parmi les polygones de n côtés, c'est le régulier qui a l'aire maximale et entre deux polygones réguliers, celui qui a davantage de côtés a l'aire maximale. Le cercle est encore meilleur.

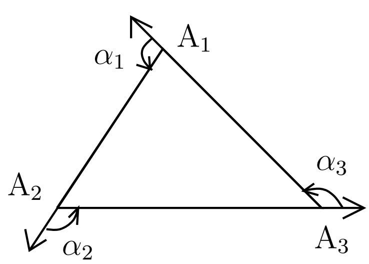
En dimension 3, pour une aire extérieure donnée c'est la sphère qui a le volume maximal. Ces résultats peuvent donner lieu à une progression très intéressante avec les élèves.

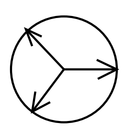
Exemple 4 : Somme des angles du triangle

Au cours moyen et jusqu'en 6ème, les élèves mesurent les trois angles et font la somme des mesures. Ils trouvent un nombre voisin de 180 degrés et prévoient que si la mesure des côtés du triangle est doublée, cette somme va doubler.

Il y a plusieurs façons de comprendre.

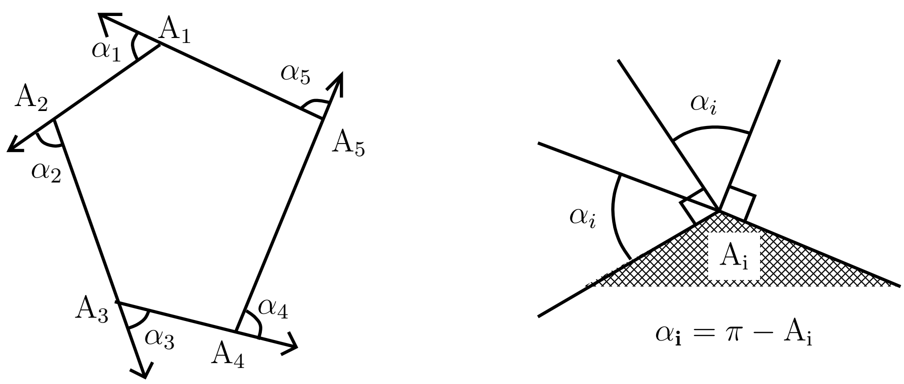




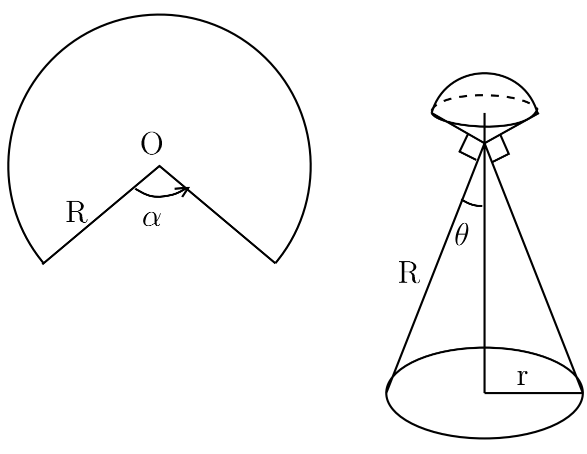


Une façon est le pavage du plan avec un triangle et ses transformés par isométrie. Une autre façon consiste à faire tourner un vecteur autour du triangle ou du polygone $\sum \alpha_i = 2\pi$. Si on accepte d'admettre qu'en chaque point singulier A_i la courbure est α_i, on retrouve que pour toute courbe homéomorphe à un cercle, la courbure totale est 2π.

Au lieu de faire circuler un vecteur qui suit le pourtour du polygone, on fait circuler un vecteur normal au polygone. On a toujours $\sum \alpha_i = 2\pi$.



L'intérêt du vecteur normal est de pouvoir passer en dimension 3. Je fais faire des cônes de révolution aux élèves. Ils obtiennent des cônes plus ou moins pointus. Qu'est-ce qui dans le patron, détermine l'angle au sommet θ ? On a $(2\pi - \alpha)R = 2\pi r$ soit $2\pi - \alpha = 2\pi \sin(\theta)$. Plus α est grand, plus θ est petit.

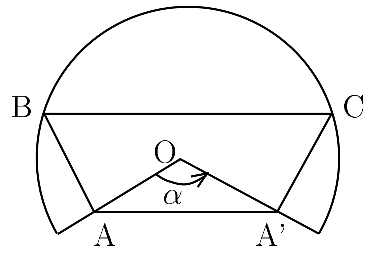


Un vecteur normal au cône circule au sommet du cône. L'angle solide décrit par ce vecteur normal est : $2\pi(1 - \sin(\theta))$ soit α.

Un triangle ABC tracé sur un cône en mettant le sommet A au sommet. En ouvrant le patron, A donne naissance à A et A', dans le quadrilatère $A'ABC$ la somme des angles est

$A + A' + B + C = 2\pi - OAA' - OA'A = 2\pi - (\pi - \alpha) = \pi + \alpha.$

C'est la somme des angles du triangle tracé sur le cône. Ceci est à rapprocher de la somme des angles du triangle sphérique : $A + B + C = \pi + \text{aire}\, ABC/R^2$.



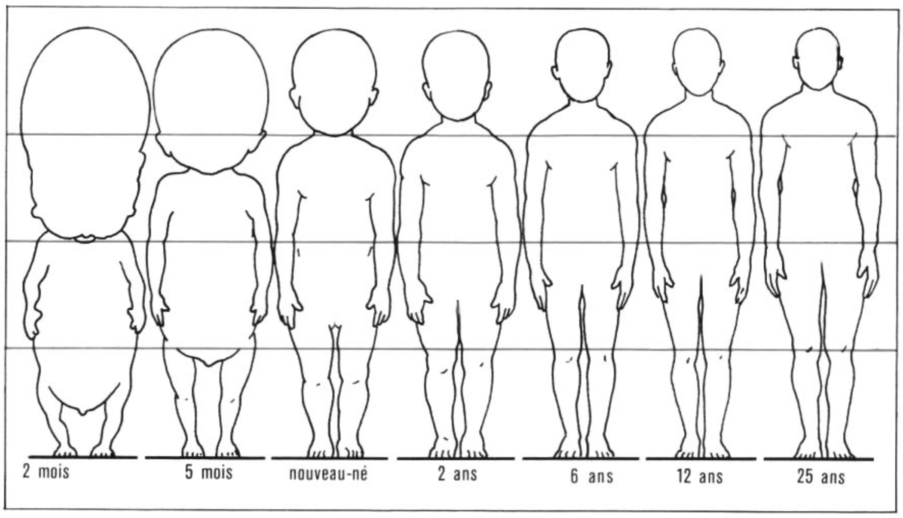
On peut dire que α, qui est ce qui manque dans le patron pour avoir 2π, est aussi la courbure en ce point singulier. Dans un cube, il manque $(\pi/2)8$ fois, donc 4π, donc la courbure totale est 4π comme pour toute surface homéomorphe à une sphère.

Exemples 5 :

J'ai travaille avec des étudiants, mais j'ai beaucoup appris aussi avec des élèves plus jeunes.

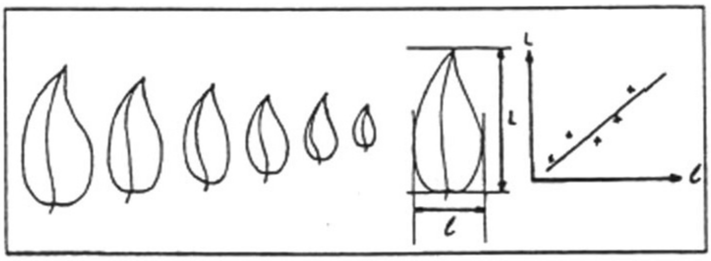
a- Je demande d'agrandir une photo rectangulaire de 4 cm sur 2 cm de sorte que 4 cm devienne 7 cm. Ils ajoutent 3 sur deux côtés ou une bande de largeur constante tout autour. C'est faux, mais y a-t-il des polygones qui donneraient une figure homothétique par ce procédé ? Oui, tout polygone dont les bissectrices sont concourantes. C'est une petite découverte.

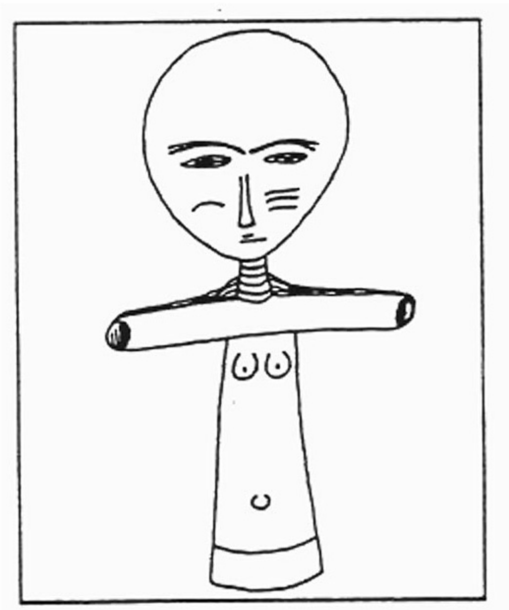
b- Comment grandit-on ? En 5ème au Niger mes élèves ont mesuré leur taille totaIe et leur tête et ont fait le rapport des deux mesures. Ils avaient prévu qu'en moyenne ils avaient de plus petites têtes que les européens et les américains blancs et aussi que les filles devaient avoir de plus petites têtes que les garçons. Quelle surprise de constater que les statiques ne donnent aucun avantage dans ce sens ni aux uns ni aux autres ! Pour conclure nous avons fait le dessin suivant :



Chez le poulain qui vient de naître ce sont les pattes qui sont très grandes par rapport au corps. Pour un cheval les pattes sont importantes, pour un homme c'est le cerveau.

Les végétaux, eux, n'ont pas de priorité de ce genre. Ils grandissent de façon relativement proportionnelle. Bien sûr la proportionnalité n'est qu'un modèle qui approche la réalité. Les écarts avec le modèle permettent d'expliquer l'approximation de toute modélisation. Prenons plusieurs feuilles du même rameau sur le même arbre ou arbuste (magnolia, rosier...).





La poupée Ashanti symbole de fécondité dans l'ouest africain a le même rapport taille/tête que le foetus et dans les tableaux de Lucas Cranach les adultes ont de petites têtes par rapport à leur corps pour marquer le fait justement qu'ils sont adultes.

En conclusion : Beaucoup de professeurs se posent cette question : Comment motiver les élèves en mathématiques et particulièrement les filles ? Voici plusieurs réponses. Il y a une motivation interne aux mathématiques : je suis motivée parce que je me pose des questions à propos de ce que je sais et alors j'ai conscience d'apprendre en intégrant ce savoir nouveau que j'ai compris et qui donc m'intéresse.

Il y a aussi une motivation externe. Les mathématiques peuvent : rassurer avec des règles, amuser comme un jeu, en mettant au défi, en compétition avec soi-même ou les autres, donner un pouvoir par leur efficacité pour la modélisation donc la prévision, émouvoir par l'appel à l'imagination et au rêve.

C'est ce dernier point qui est le plus important pour moi personnellement.

Pour son tombeau à Bâle, Jacques Bernouilli avait rêvé d'une spirale logarithmique. La réalisation n'en est pas très réussie mais l'inscription nous dit : *Transformée, je ressurgis, semblable à moi-même.*

L'essentiel de ce que je vous ai dit ici est contenu dans mes deux ouvrages [1], [2]. Ils s'adressent surtout aux enseignants du secondaire mais ce ne sont ni des manuels scolaires de mathématiques ni des traités théoriques de didactique. Que ce soit en mathématique ou en didactique, le chercheur décontextualise son travail pour le communiquer à ses pairs, mais à l'inverse celui qui veut transmettre ce savoir à ceux qui l'ignorent doit recréer un contexte significatif sans pouvoir reproduire tel quel le processus historique de la découverte. Ce n'est pas facile. Comment dynamiser l'enseignement par des problématiques signifiantes pour les élèves, acceptables en mathématique, raisonnables compte-tenu des contraintes scolaires ? Comment éviter les cours magistraux répondant à des questions que très peu d'élèves se posent dans cette forme, ou la juxtaposition d'activités disparates qui ne donnent que l'illusion du vivant ? En quoi les mathématiques concernent-elles les futurs citoyens, les femmes et les hommes ?

J'ai beaucoup appris en didactique des mathématiques des travaux de Guy Brousseau, Régine Douady et Yves Chevallard. Hors de France, mes maîtres ont été Emma

Castelnuovo, Hans Freudenthal et Sofia Krygowska. Enfin Marie-FranÃ§oise Roy m'a permis de garder un contact avec les mathématiques, ce qui me semble essentiel. Grâce à eux, j'ai pu construire mes cours avec mes élèves dans un climat de confiance entre nous. C'est pour cela que mes livres doivent beaucoup à ces jeunes, autant petits élèves que grands étudiants, à leurs idées, à leurs questions, parfois attendues mais parfois surprenantes, rarement banales, même et surtout chez ceux qu'on disait faibles, parce qu'ils pensent à côté, faculté capitale dans l'invention comme l'a souligné Jacques Hadamard. C'est grâce à eux, si notre école ou notre université ne les brise pas, que nous pourrons changer le monde..

Biblographie

[1] *Annie Berté* Mathématique dynamique pour Alice, Boubacar...et tous les autres. Nathan Pédagogie, septembre 1993

[2] *Annie Berté* Mathématique du collège au lycée pour Chloé, Daniel...et tous les autres. Nathan Pédagogie, juillet 1996

IUFM d'Aquitaine
Chateau Bourran
160 avenue de Verdun, BP 152
33705 Mérignac CEDEX