

Asymptotiques dans les plaques minces

Monique Dauge

d'après un travail avec *Isabelle Gruaïs*

1. Petit paramètre et perturbation singulière

La classe de problèmes auxquels nous nous intéressons fait partie des problèmes aux limites pour des *équations aux dérivées partielles* (EDP pour les intimes). Cela signifie que nous considérons une EDP posée dans un *domaine* du plan (bi-dimensionnel) ou de l'espace (tri-dimensionnel). Cette EDP est munie de *conditions aux bords* du domaine pour que l'ensemble du problème soit *bien posé*, c'est-à-dire qu'il en existe une et une seule solution. La statique ou l'évolution de beaucoup de grandeurs physiques sont modélisées par de tels problèmes.

Dans l'EDP et dans les conditions aux limites apparaissent naturellement des coefficients. Très souvent les ordres de grandeurs de ces coefficients sont différents les uns des autres. Ce sont les proportions *relatives* des uns par rapport aux autres qui font apparaître des *petits paramètres* correspondant notamment à des quantités physiques ou à un rapport entre des dimensions. Donnons quelques exemples.

a) Quantités physiques :

- le coefficient $\frac{\hbar}{2m}$ dans l'équation de Schrödinger,
- la viscosité ν dans le système de Navier-Stokes,
- la fréquence k ou son inverse k^{-1} en électromagnétisme (Maxwell).

b) Une dimension par rapport aux autres dans le domaine :

- Tiges, poutres.
- Plaques, coques.
- Presque-coins, c'est-à-dire pour un domaine plan, une figure proche d'un polygone où les coins sont remplacés par des arcs de cercles de petit rayon ε .
- Macro-structures périodiques à période petite : on est dans le champ d'action de l'homogénéisation.

Tous ces exemples relèvent des *perturbations singulières* ce qui signifie que le problème limite (s'il existe!) obtenu en égalant à 0 le petit paramètre n'est plus de la même nature que le problème initial, autrement dit qu'il a perdu des dimensions ou des propriétés d'ellipticité, d'hyperbolicité, etc

Faisons une petite digression pour expliquer brièvement la différence entre perturbation régulière et perturbation singulière sur l'exemple de l'équation de Schrödinger. Dans un domaine Ω borné, on pose la célèbre équation aux valeurs propres

$$-\frac{\hbar}{2m}\Delta\psi + V\psi = E\psi$$

complétée par des conditions d'annulation sur le bord de Ω , inodéhsant la quantification de l'énergie E d'une particule de masse m soumise à un potentiel V . La masse étant grande devant \hbar , le paramètre $\varepsilon := \hbar(2m)^{-1}$ est petit devant l'opérateur de second ordre Δ . Si on réduit à zéro le petit paramètre, l'équation dégénère en $V\psi = E\psi$ où le Laplacien Δ a disparu. Cette équation laisse assez peu imaginer que les valeurs propres de $-\varepsilon\Delta + V$ vont converger (sous certaines hypothèses) vers le minimum de V ...

Par contre si l'on considérait les valeurs propres de $-\Delta + \varepsilon V$, la perturbation serait tout à fait régulière et quand $\varepsilon \rightarrow 0$, les valeurs propres convergent continuellement (et même analytiquement quand elles sont simples) vers les valeurs propres du problème limite, le problème de Dirichlet, à savoir le Laplacien avec conditions d'annulation sur le bord de Ω . Si on prenait comme domaine tout l'espace \mathbb{R}^n avec comme potentiel celui de l'oscillateur harmonique $V(x) = |x|^2$, la perturbation redeviendrait (un peu) singulière, le spectre ponctuel se transformant en spectre continu...

Mais l'objet de notre exposé est différent : nous allons évoquer le cas de la perturbation singulière géométrique, plus précisément celui des poutres et plaques, où l'épaisseur 2ε est petite devant les autres dimensions, le problème aux limites lui-même ne dépendant pas du tout du petit paramètre.

2. Le problème aux limites primitif

Le domaine est une poutre :

$$\Omega^\varepsilon = \omega \times]-\varepsilon, +\varepsilon[$$

avec $\omega =]a, b[$ un intervalle. Disons plutôt que nous considérons la *famille* de domaines Ω^ε pour $\varepsilon \rightarrow 0$. L'inconnue est une fonction $u^\varepsilon(X, Z)$ définie sur Ω^ε . Nous notons la coordonnée horizontale $X \in \omega$ et la coordonnée verticale $Z \in]-\varepsilon, +\varepsilon[$. L'opérateur est le *Laplacien* que nous avons déjà évoqué :

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial^2 X} + \frac{\partial^2}{\partial^2 Z}$$

dont nous condensons l'écriture en

$$\Delta = \partial_{XX} + \partial_{ZZ}.$$

Le Laplacien est un opérateur d'ordre 2, elliptique, c'est-à-dire que les courbes de niveau de son symbole $\sigma(\xi_X, \xi_Z) = \xi_X^2 + \xi_Z^2$ sont des ellipses. Pour le "compléter" sur le bord de Ω^ε il faut (et il suffit !) qu'une condition soit bien choisie sur chaque côté. Les choix usuels de conditions aux limites sont celles de *Dirichlet* où on impose la valeur de la fonction inconnue, et celles de *Neumann* où on impose la valeur de la dérivée normale de la fonction inconnue. Ici, nous choisissons

- sur les bords horizontaux les conditions de Neumann,
- sur les bords verticaux les conditions de Dirichlet.

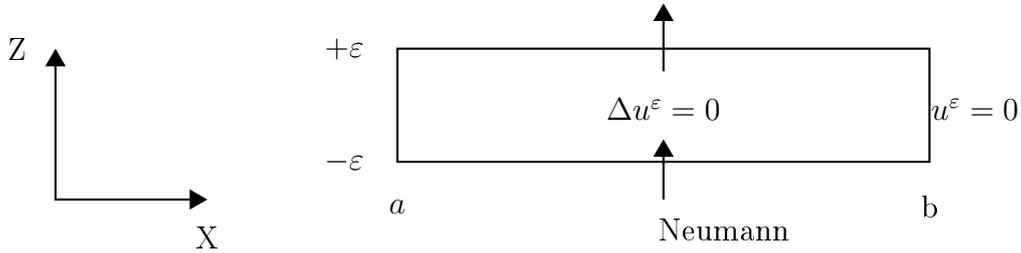


Figure 1

Les données sont deux fonctions régulières $g_+(X)$ et $g_-(X)$ définies sur les deux bords horizontaux, intervenant dans la condition de Neumann, les données sur les bords verticaux étant nulles. Cela donne le problème aux limites sur Ω^ε

$$\begin{cases} (\partial_{XX} + \partial_{ZZ})u^\varepsilon(X, Z) = 0, & \forall (X, Z) \in \Omega^\varepsilon \\ \partial_Z u^\varepsilon(X, Z) = \varepsilon g_-, & \forall X \in \omega, Z = -\varepsilon \\ \partial_Z u^\varepsilon(X, Z) = \varepsilon g_+, & \forall X \in \omega, Z = \varepsilon \\ u^\varepsilon(X, Z) = 0, & \forall X \in \partial\omega, \forall Z \in]-\varepsilon, \varepsilon[. \end{cases} \quad (1)$$

L'écriture $\partial\omega$ a été préférée à $\{a, b\}$ pour le bord de ω , pour avoir une écriture indépendante de la dimension. Ce problème pourrait modéliser l'équilibre de la température dans une poutre.

Notre problème consiste en la comparaison des solutions u^ε , quand $\varepsilon \rightarrow 0$. Pour les rendre comparables, nous pouvons par exemple les définir toutes sur le même domaine, grâce à un changement de variable simple.

3. Le changement d'échelle

Les nouvelles variables sont $x = X$ et $z = Z/\varepsilon$, le nouveau domaine est $\Omega = \omega \times]-1, +1[$.

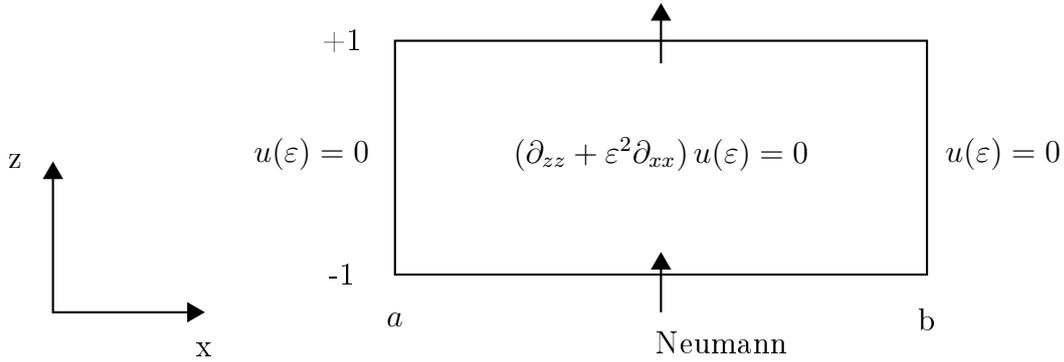


Figure 2

Le nouveau problème sur Ω est

$$\begin{cases} (\partial_{xx} + \frac{1}{\varepsilon^2} \partial_{zz}) u(\varepsilon)(x, z) = 0 & \forall (x, z) \in \Omega \\ \partial_z u(\varepsilon)(x, z) = \varepsilon^2 g_- & \forall x \in \omega, z = -1 \\ \partial_z u(\varepsilon)(x, z) = \varepsilon^2 g_+ & \forall x \in \omega, z = 1 \\ u(\varepsilon)(x, z) = 0 & \forall x \in \partial\omega, \forall z \in]-1, 1[. \end{cases} \quad (2)$$

La nouvelle question est : quel est le comportement de $u(\varepsilon)$ quand $\varepsilon \rightarrow 0$?

4. Ansatz série entière

Nous exposons la méthode de façon heuristique. Pour déterminer le comportement de $u(\varepsilon)$, on fait des propositions de développement, communément dénommées à l'aide du substantif allemand Ansatz. On commence par le plus naturel, i.e. celui qui marche dans le cas des perturbations régulières, à savoir un développement polynomial en ε à coefficients fonctions de (x, z) . Ainsi on cherche $u(\varepsilon)$ sous la forme

$$u(\varepsilon) \sim u^0 + \varepsilon u^1 + \varepsilon^2 u^2 + \dots + \varepsilon^k u^k + \dots \quad (3)$$

On injecte cet Ansatz dans le problème (2) et on identifie terme à terme selon les puissances de ε dans le but de trouver les coefficients u^k . Le terme en ε^k fournit une équation liant u^k et u^{k-2} . Précisément, on obtient successivement deux équations homogènes pour $k = 0, 1$:

$$\begin{cases} \partial_{zz} u^k = 0, & (x, z) \in \Omega, \\ \partial_z u^k = 0, & z = -1, \\ \partial_z u^k = 0, & z = 1, \\ u^k = 0, & x \in \partial\omega \end{cases} \quad (4)$$

puis une équation faisant intervenir les données g_- et g_+ pour $k = 2$:

$$\begin{cases} \partial_{zz}u^2 + \partial_{xx}u^0 = 0, & (x, z) \in \Omega \\ \partial_z u^2 = g_-, & z = -1 \\ \partial_z u^2 = g_+, & z = 1 \\ u^2 = 0, & x \in \partial\omega \end{cases} \quad (5)$$

et enfin les équations de récurrence pour $k = 3$:

$$\begin{cases} \partial_{zz}u^k + \partial_{xx}u^{k-2} = 0, & (x, z) \in \Omega \\ \partial_z u^k = 0, & z = -1 \\ \partial_z u^k = 0, & z = 1 \\ u^k = 0, & x \in \partial\omega. \end{cases} \quad (6)$$

Une fois les équations obtenues on essaie de les résoudre les unes à la suite des autres, sans perdre de degrés de liberté.

En intégrant les équations (4), on montre que u^0 et u^1 sont des constantes en z , autrement dit ne dépendent que de x , ce qu'on écrit sous la forme :

$$u^0(x, z) = u_C^0(x) \text{ et } u^1(x, z) = u_C^1(x). \quad (7)$$

Elles doivent en outre s'annuler pour $x \in \partial\omega$, mais cela ne les détermine pas encore complètement.

Intégrant une fois en z la première équation de (5) et tenant compte de la deuxième équation, on obtient

$$\partial_z u^2(x, z) = g_-(x) - \int_{-1}^z u_C^0(x) d\zeta. \quad (8)$$

La troisième équation de (5) impose alors la relation de compatibilité

$$g_+(x) = g_-(x) - 2u_C^0(x), \quad (9)$$

ce qui détermine complètement u^0 par :

$$\left[\begin{array}{l} u^0(x, z) = u_C^0(x) \text{ est la solution de} \\ \begin{cases} \partial_{xx}u_C^0 = \frac{1}{2}(g_- - g_+)(x) & x \in \omega, \\ u_C^0(x) = 0 & x \in \partial\omega. \end{cases} \end{array} \right. \quad (10)$$

On obtient de même :

$$u^1 \equiv 0, \quad (11)$$

puis que u_C^2 est solution de

$$\left[\begin{array}{l} u^2(x, z) = u_C^2(x) + v^2(x, z) \text{ avec} \\ \left\{ \begin{array}{l} v^2 = zg_- - \left(\frac{z^2}{4} + \frac{z}{2} - \frac{1}{12} \right) (g_- - g_+) \\ \int_{-1}^{+1} v^2(x, z) dz = 0 \quad \forall x \in \omega \end{array} \right. \end{array} \right. \quad (12)$$

et

$$u^3 = u_C^3. \quad (13)$$

Mais, comme on peut le voir sur la formule (12) en prenant par exemple pour g_- et g_+ des constantes, en général il est *impossible de satisfaire* $u^2 = 0$ sur le bord latéral.

Cela prouve que l'Ansatz série entière, quoiqu'ayant été satisfaisant pour les premiers termes n'est pas suffisant pour déterminer le comportement asymptotique de $u(\varepsilon)$.

5. Ansatz de couche limite

Pour lever l'obstruction, on va compléter l'Ansatz (3) par une autre série en puissance de ε , avec des coefficients w^k qui sont encore des fonctions de deux arguments; l'un d'eux sera toujours z - une variable que nous avons déjà mise à l'échelle- mais x va être remplacé par une *variante rapide* f , liée aux coordonnées locales près des bords a et b de $\omega =]a, b[$: on remplace $x - a$ et $b - x$ par

$$t = \frac{x - a}{\varepsilon} \text{ ou } t = \frac{b - x}{\varepsilon}.$$

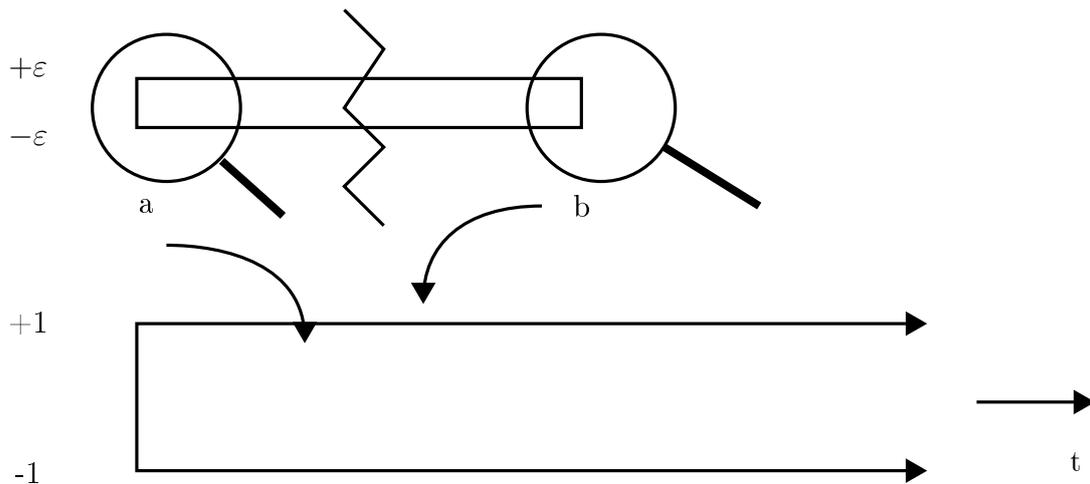


Figure 3

Cela revient à faire une dilatation, isotrope cette fois-ci, des deux extrémités de la poutre Ω^ε , en espérant que les effets aux deux bouts vont être indépendants, autrement dit que les nouveaux profils w^k sont suffisamment décroissants quand $t \rightarrow +\infty$. Comme son nom l'indique, l'Ansatz couche limite est destiné à décrire des effets localisés dans une couche- qui est moralement d'épaisseur ε - et sera impuissant à décrire des effets globaux. On retrouve la problématique des matching asymptotics. On a typiquement un phénomène à deux échelles, comme en homogénéisation de macro-structures périodiques de période ε .

On cherche maintenant $u(\varepsilon)$ sous la forme

$$u(\varepsilon) \sim u^0 + \varepsilon u^1 + \varepsilon^2 u^2 + \dots + \varepsilon^k u^k + \dots$$

$$\varepsilon^2 w_a^2 \left(\frac{x-a}{\varepsilon}, z \right) + \varepsilon^2 w_b^2 \left(\frac{b-x}{\varepsilon}, z \right) + \dots \quad (14)$$

Repartant d'où nous étions arrivés en (12), nous obtenons le problème résiduel suivant en l'extrémité inférieure a de ω

$$\begin{cases} (\partial_{tt} + \partial_{zz}) w_a^2(t, z) = 0, & 0 < t, & z \in]-1, 1[\\ \partial_z w_a^2(t, z) = 0, & 0 < t, & z = \pm 1 \\ w_a^2(0, z) = u^2(a, z), & & z \in]-1, 1[\end{cases} \quad (15)$$

et le problème analogue en b .

Pour résoudre (15), ou avec des notations plus simples

$$\begin{cases} (\partial_{tt} + \partial_{zz}) w(t, z) = 0, & 0 < t, & z \in]-1, 1[\\ \partial_z w(t, z) = 0, & 0 < t, & z = \pm 1 \\ w(0, z) = h(z), & & z \in]-1, 1[\end{cases} \quad (16)$$

on tire avantage du fait que le Laplacien et le domaine sont à variables séparables et on développe toutes les fonctions en z par rapport à la base des fonctions propres de l'opérateur de Neumann sur l'intervalle $] -1, 1[$ défini par :

$$w \mapsto w'' \quad \text{pour} \quad w \text{ tel que } w'(-1) = w'(1) = 0$$

à savoir $\cos P\pi z$ pour $P \in \mathbb{N}$ et $\sin(\ell - \frac{1}{2})\pi z$ pour $\ell \in \mathbb{N}^*$. Développant la donnée au bord

$$h(z) = \sum_{\ell \geq 0} h_\ell^+ \cos \ell \pi z + \sum_{\ell \geq 1} h_\ell^- \sin \left(\ell - \frac{1}{2} \right) \pi z$$

on obtient une solution de (16) par

$$w(t, z) = \sum_{\ell \geq 0} h_\ell^+ \cos \ell \pi z e^{-\ell \pi t} + \sum_{\ell \geq 1} h_\ell^- \sin \left(\ell - \frac{1}{2} \right) \pi z e^{-(\ell - \frac{1}{2}) \pi t}$$

Nous voyons que w est *exponentiellement décroissante* quand $t \rightarrow +\infty$ si et seulement si $h_0^+ = 0$, i.e.

$$\int_{-1}^{+1} h(z) dz = 0$$

Nous voyons ainsi qu'une seule condition à chaque extrémité assure l'existence de deux profils à décroissance exponentielle. Appliquant ce que nous venons de faire au problème (15) et à son analogue en b , nous obtenons les deux profils w_a^2 et w_b^2 pourvu que les traces $u^2(a, z)$ et $u^2(b, z)$ soient de moyenne nulle sur $(-1, 1)$. Vu que par (12), $u^2 = u_C^2 + v^2$, cela signifie que $u_C^2(a) = 0$ et $u_C^2(b) = 0$. Or l'équation (6) pour u^4 montre que le second membre est d'intégrale nulle, donc en utilisant encore une fois (12), que $\partial_{xx} u_C^2 = 0$. Finalement, u_C^2 est l'unique solution du problème de Dirichlet homogène

$$\begin{cases} \partial_{xx} u_C^2 = 0 & x \in \omega \\ u_C^2(x) = 0 & x \in \partial\omega \end{cases} \quad (17)$$

Ainsi $u_C^2 \equiv 0$.

6. Développement asymptotique dans la poutre

Ainsi, continuant de même, nous pouvons montrer que :

$$u(\varepsilon) \sim u_C^0(x) + \sum_{k \geq 1} \varepsilon^{2k} v^{2k}(x, z) + \sum_{k \geq 1} \varepsilon^{2k} \left[w_a^{2k} \left(\frac{x-a}{\varepsilon}, z \right) + w_b^{2k} \left(\frac{b-x}{\varepsilon}, z \right) \right]$$

au sens des développements asymptotiques, autrement dit l'erreur commise en remplaçant $u(\varepsilon)$ par une partie finie de la série est de l'ordre de grandeur du premier terme négligé. En norme uniforme cela donne par exemple :

$$\begin{aligned} \|u(\varepsilon) - u_C^0\|_{L^\infty(\Omega)} &\leq C\varepsilon^2 \\ \|u(\varepsilon) - u_C^0 - \varepsilon^2 (v^2 + w_a^2 + w_b^2)\|_{L^\infty(\Omega)} &\leq C\varepsilon^4 \end{aligned}$$

Par contre si l'estimation de $u(\varepsilon) - u_C^0$ reste du même ordre en norme L^2 , elle est altérée en norme H^1 :

$$\|u(\varepsilon) - u_C^0\|_{H^1(\Omega)} \leq C\varepsilon^{3/2}$$

à cause de la forte variation de la dérivée dans la couche limite.

Dans les problèmes de *plaques*, Ω^ε est défini par $\omega \times]-\varepsilon, \varepsilon[$ avec ω un domaine plan. Pour le Laplacien ou pour l'élasticité linéaire on obtient un développement asymptotique de la forme :

$$u(\varepsilon) \sim u^0(x, y) + \sum_{k \geq 1} \varepsilon^k u^k(x, y, z) + \sum_{k \geq 1} \varepsilon^k w_a^k \left(\frac{r}{\varepsilon}, s, z \right) \quad (18)$$

où r désigne la distance à $\partial\omega$ et s est une abscisse curviligne dans $\partial\omega$. Dans le tableau comparatif suivant, nous comparons les termes apparaissant dans

- un domaine mince bi-dimensionnel pour le Laplacien,
- un domaine mince tri-dimensionnel pour le Laplacien,
- un domaine mince tri-dimensionnel pour l'élasticité.

Tableau comparatif
 u_C ne dépend pas de z :

$$uc = \zeta(x_*)$$

u_{KL} déplacement de
 Kirchhoff-Love

$$(\zeta_*(x_*) - z\nabla_*\zeta_3(x_*), \zeta_3(x_*))$$

	$\Delta, 2d$	$\Delta, 2d$	Elasticité
u^0	u_C^0	u_C^0	u_{KL}^0
u^1	0	0	u_{KL}^1
w^1	0	0	$w^1 = (w_*^1, 0)$
u^2	v^2	v^2	$u_{\text{KL}}^2 + v^2$
w^2	w^2	w^2	w^2
u^3	0	u_C^3	$u_{\text{KL}}^3 + v^3$
w^3	0	w^3	w^3
u^4	v^4	$u_C^4 + v^4$	$u_{\text{KL}}^4 + v^4$
w^4	w^4	w^4	w^4

En dimension 3, des termes supplémentaires apparaissent pour le Laplacien en raison de la courbure du bord. Les déplacements de Kirchhoff-Love jouent pour l'élasticité un rôle similaire aux fonctions constantes en z pour Δ ; mais les interactions, en particulier l'algorithme de construction qui agit sur cinq niveaux simultanément, sont beaucoup plus compliquées et la condition de moyenne nulle valable pour le Laplacien doit être remplacée par quatre conditions liées au principe de Saint-Venant.

L'exemple pourtant simple que nous venons de traiter est assez caractéristique d'un problème aux limites sur des plaques minces [11], ou plus généralement d'un problème de perturbation singulière, voir aussi [3], et peut aussi illustrer la méthode de "matching asymptotics" [8].

Le point de départ de notre travail avec Isabelle Gruais était l'étude des déplacements solutions des équations de l'élasticité linéarisée sur une plaque mince encastrée sur son bord latéral. Après les travaux [1, 2] concernant l'erreur entre le premier terme u^0 et la solution tri-dimensionnelle, nous avons démontré la validité du développement asymptotique complet *série entière- couche limite* (18) [4, 5, 6, 7]. Voir aussi [10, 9].

L'avantage d'un développement asymptotique complet est qu'il fournit sans trop de difficultés des estimations optimales à tous ordres, ce qui permet une validation précise des modèles de dimension inférieure (Reissner-Mindlin par exemple pour les plaques) et constitue un guide pour la construction de méthodes numériques performantes. Le

cas des coques et des équations non linéaires constituerait des extensions certainement plus difficiles mais tout à fait dignes d'intérêt.

Références

- [1] *P. G. Ciarlet*. Plates and Junctions in Elastic Multi-Structures : An Asymptotic Analysis. R.M.A. Vol. 14. Masson and Springer-Verlag, 1990.
- [2] *P. Ciarlet : P. Destuynder*. A justification of the two-dimensional plate model. *J. Mécanique* 18 (1979) 315-344.
- [3] *M. Costabel J M. Dauge*. A singularly perturbed mixed boundary value problem. Prepublication IRMAR 95-29, Rennes 1995.
- [4] *M. Daugef I. Gruais* Complete asymptotics in thin elastic plates and optimal estimates for the Kirchhoff-Love model, Prépublication IRMAR 9S-06, Rennes, 1995.
- [5] *M. Dauge, I. Gruais*. Développement asymptotique d'ordre arbitraire pour une plaque élastique mince encastrée, C. R. A. S. Paris Série I. 821, 1995, 375-380.
- [6] *M, Dauge, I. Gruais*. Asymptotics of arbitrary order for a thin elastic clamped plate. I : Optimal error estimates. A paraitre dans Asymptotic Analysis.
- [7] *M. Dauge, I. Gruais*. Asymptotics of arbitrary order for a thin elastic clamped plate. II : Analysis of the boundary layer terms. A paraitre in Asymptotic Analysis.
- [8] *A.M. It'in*. *Matching of asymptotic expansions of solutions of boundary value problems*, volume 102 of Translations of Mathematical Monographs. American Mathematical Society, Providence, R. I. 1992.
- [9] *V.G. Maz'ya, S.A. Nazarov, B.A. Plamenevskii*. Asymptotische Theorie elliptischer Randwertaufgaben in singular gestörten Gebieten, volume 82 of Mathematische Monographien. Akademie-Verlag, Berhn, 1991.
- [10] *S.A. Nazarov, I.S. Zorin*. Edge effect in the bending of a thin three-dimensional plate. *P. M. M. USSR* 5S (4) (1989) 500-507.
- [11] *C. Schtvab*. Boundary layer resolution in hierarchical models of laminated composites. *Math. Model. Numer. Anal.* 28 (5) (1994) 517-537.

IRMAR (URA CNRS 305), University de Rennes 1
Campus de Beaulieu, 35042 Rennes Cedex
dauge@univ-rennes1.