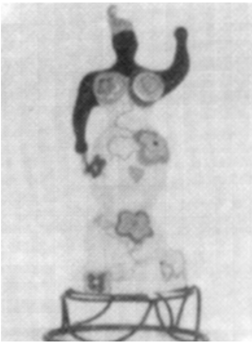
femmes & math

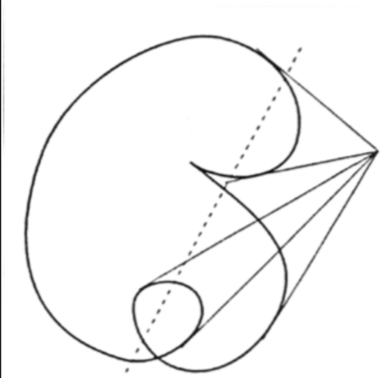


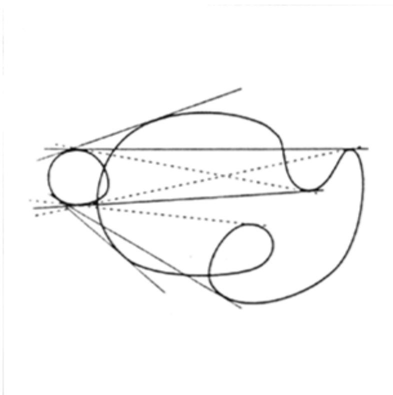
N°3

Janvier 1999

Sommaire

Editorial
Vie de l'association
A propos de *mathématiques*
A propos de *femmes*





Revue de l'Association
femmes et mathématiques

Institut Henri Poincaré
11 rue Pierre et Marie Curie
75231 Paris Cedex 05

Niki de St Phalle
Nana with Golden turt
1986

Women's art magazine
Sept/oct 1993

Eileen Cooper
Woman with birds
1989

L'ouvert

juin 1994

Women's art magazine
jan/feb 1992

Claude Cahun
Autoportrait
1929

L'ouvert

juin 1994

Women's art
magazine
sept/oct 1995

Editorial

Voici, avec un grand retard dû à un problème de secrétariat, le numéro 3 de *femmes & math*, la revue de l'association *femmes et mathématiques* ; ce n'est pas toujours facile de respecter un calendrier.

Comme d'habitude, plusieurs rubriques sont présentes dans ce numéro :

• **Vie de l'association** , avec, pour ce numéro, un compte-rendu des journées de *femmes et mathématiques* qui se sont déroulées récemment à Bordeaux et un compte-rendu du congrès international de mathématiques qui s'est tenu l'été dernier à Berlin.

• **A propos de mathématiques** , avec un article de *Elise Benlolo* et *Yasmine Sanderson* sur les variétés orbitales et un article de *Annick Lesne* sur la renormalisation en physique. Ces deux articles font suite à des exposés ayant eu lieu lors des réunions de l'association. Un effort de présentation a été fait pour qu'ils soient compréhensibles par un/e mathématicien/ne non nécessairement spécialiste du sujet.

• **A propos de femmes** , avec le compte-rendu d'un travail mené en classe de seconde sur les biographies de femmes mathématiciennes, avec une présentation d'une activité de l'association MATh en JEANS, avec des statistiques sur l'évolution récente de la répartition des élèves dans les filières du secondaire, et enfin, avec un complément de bibliographie qui s'ajoute au numéro 2 de notre revue.

Nous remercions toutes celles qui ont participé à cet ouvrage.

Julianne Unterberger
Présidente de *femmes et mathématiques*

Compte-rendu des journées bordelaises

Francine Delmer

Les journées *"femmes, mathématiques, musique"*, organisées par Christine Bachoc et Francine Delmer ont réuni les 27 et 28 novembre, malgré les grèves de trains, une trentaine de participantes venues de toute la France, d'Allemagne et du Luxembourg et ont mobilisé à l'université Bordeaux 1 une partie importante de la communauté mathématicienne, environ quatre-vingt personnes ont assisté aux six conférences et au concert.

Les conférencières ont eu à coeur de donner un point de vue large et synthétique de domaines aussi variés que la classification des sous-groupes maximaux de matrices rationnelles (Gabriele Nebe), la monodromie (Françoise Michel), les liens entre informatique et théorie des nombres (Brigitte Vallée), la complexité des suites doubles (Valérie Berthé) et certains aspects de théorie combinatoire (Mireille Bousquet-Mélou).

Transition avec le concert de musique contemporaine, la dernière conférence a lancé quelques pistes de réflexion sur les liens éventuels entre les musicien(ne)s et les mathématicien(ne)s (Jean-Paul Allouche).
Est-ce la démarche de pensée, la conceptualisation qui rapproche mathématiques et musique, les rapports sont-ils de pure coïncidence ou bien y a-t-il similitude au niveau du langage ? Où se situe enfin la part de l'artiste ?

Le concert, programmé en soirée autour de la compositrice Pascale Jakubowski, a été pour tous un moment de grâce éblouissant, suspendu, mettant en lumière, s'il en est besoin, la magie de la musique.
La compositrice a choisi cette occasion pour que soient interprétées en création mondiale deux de ses pièces. Par sa fraîche et ferme présentation, elle nous a permis d'entrer plus loin dans son oeuvre, nous livrant quelques désirs et quelques clés dont elle l'a marquée.
La voix, le piano et le violoncelle se sont tour à tour donné le plaisir de nous hypnotiser par l'intermédiaire d'interprètes délicats et inspirés ; il s'agit de Sylvie Deguy, mezzo-soprano, (ex mathématicienne) Béatrice Peignois, pianiste et David Simpson, violoncelliste.

Une soirée informelle réunissant l'ensemble des participant(e)s a permis de délier l'émotion et de prolonger le discours dans un climat chaleureux.

Le rendez-vous du samedi matin était donné dans les salons de la Librairie Mollat pour trois conférences centrées sur l'histoire des femmes dans la création.
Devant un large public, Danielle Roster et Jeanne Peiffer ont évoqué les combats livrés tant à l'extérieur que sur elles-mêmes qu'ont eu à mener les compositrices (Clara Schumann-Wieck, Fanny Mendelssohn, Ethel Smyth, Alma Mahler-Schindler...) et les mathématiciennes (Emmy Noether, Sophie Germain, Sofia Kovalevskaïa...) au dix-neuvième siècle. A son tour Pascale Jakubowski prit le soin de donner à la fois un aperçu sur les compositrices du vingtième siècle (Betsy Jolas, Edith Canat de Chizy, Christine Mennesson...) de situer son propre cas et d'ouvrir le dialogue. On ne peut que constater les similitudes des difficultés rencontrées encore par celles qui se risquent dans des carrières liées à la création au plus haut niveau.

Questions et débat ont montré la pertinence et l'actualité des points évoqués par les conférencières. Cependant, un optimisme excessif ne s'est pas dégagé sur des changements possibles de mentalité hors de milieux sociaux-culturels très restreints et déjà sensibilisés au problème des femmes dans la vie publique.

Un accueil chaleureux a été réservé aux congressistes par la Mairie de Bordeaux, au cours d'un vin d'honneur dans les salons du Palais Rohan. Enfui la réunion de l'Association *"femmes et mathématiques"* s'est tenue au Capc Musée, après une visite de l'exposition admirable d'Anish Kapoor et la découverte du lieu magique que sont les Entrepôts Lainé.

Deux journées bien remplies qui laissent des traces.

Francine Delmer et *Christine Bachoc*
Chargée de mission aux affaires culturelles
delmer@math.u-bordeaux.fr
tel : 05 56 84 24 73
bachoc@math.u-bordeaux.fr

Université Bordeaux 1
351 cours de la Libération
33405 Talence

Congrès international des mathématiciens

Berlin, 18-27 août 1998

Sylvie Paycha

Un quotidien berlinois titrait un article daté du 18 août "Un pas pour sortir de la tour d'ivoire" ("Ein Schritt hinaus aus dem Elfenbeinturm")....il s'agissait de la tour d'ivoire des mathématiques. La journaliste y présentait le congrès mondial des mathématiques qui commençait à peine sous le signe de la popularisation des mathématiques, citant à l'appui le programme de plusieurs conférences et manifestations adressées au grand public organisées dans le cadre du congrès autour de thèmes mathématiques (programme de films vidéo, présentation d'oeuvres musicales basées sur des modèles mathématiques, jeux mathématiques,...).

Ce congrès, qui réunissait environ 3500 mathématiciens/ennes d'au moins 90 pays différents, a donc au moins le mérite d'avoir ouvert une petite porte de la tour d'ivoire des mathématiques au grand public (berlinois en l'occurrence).

Mais c'est probablement sa portée symbolique qui a le plus contribué à sa popularisation ; il n'y avait pas eu de congrès mondial des mathématiques en Allemagne depuis 1904. Rappelons que la période nazie a laissé des marques indélébiles dans l'histoire des mathématiques allemandes ; l'exposition "Terreur et exil", organisée par la société mathématique allemande (D.M.V), présentait le sort d'une cinquantaine de mathématiciens/ennes berlinois/ses pendant cette période. La plupart ont émigré parce que victimes de persécutions, soit pour leur origine “non aryenne”, (la loi du 7 avril 1933 ordonnait l'expulsion de leur institution des fonctionnaires d'ascendance “non aryenne”, terminologie employée par les nazis), soit, comme par exemple Hanna von Caemmerer (1914-1971), par solidarité. Certains classés dans la catégorie “aryens”, comme Helmut Grunsky (1904-1986) qui fut éditeur du “Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik”, ont continué à travailler à Berlin en luttant contre la pression exercée sur eux pour ne pas embaucher des “non aryens”.

Parmi les noms les plus célèbres de ce groupe de mathématiciens berlinois citons John Von Neumann (1903-1957) qui accepta en 1930 un poste à Princeton et abandonna définitivement son poste à l'université de Berlin en 1933, Isaai Schur (1875-1941) qui, affaibli après 6 années de persécutions et d'humiliations sous le régime nazi, s'est finalement résigné en 1939 à quitter l'Allemagne pour rejoindre la Palestine, Richard von Mises (1883-1953) qui bien que classé “juif” (selon la terminologie employée par les nazis), n'a pas été directement touché par la loi du 7 avril 1933 pour avoir participé à la première guerre mondiale. Cette exposition rappelle qu'il y eut malheureusement aussi des mathématiciens qui soutenaient ouvertement l'idéologie nazie comme, par exemple, Ludwig Bieberbach (1886-1982), membre du parti national socialiste.

L'organisation pratique de ce congrès qui comportait 21 conférences plénières d'une heure, environ 192 conférences parallèles de 45 minutes et 1250 communications de 15 minutes a été, je crois, très appréciée par les participants ; le programme des conférences présenté de manière claire et agréable, complété par deux volumes des actes du congrès comportant les textes des conférences de 45 minutes et un volume de résumés des conférences plénières, permettait de s'orienter facilement dans le dédale des thèmes proposés.

On peut cependant regretter quelques maladresses d'organisation comme la sous-estimation du nombre d'auditeurs pour la première conférence d'un lauréat de la médaille Fields qui se pressaient dans un salle déjà comble et le manque de moyens efficaces de communication entre les participants (limité à un “panneau de messages” mal situé).
Rappelons les noms des quatre lauréats de la médaille Fields :

- ☐ Richard Borcherds (Cambridge, *algèbres de Kac-Moody, formes automorphes*),
- ☐ Timothy Gowers (Cambridge, *espaces de Banach, combinatoire*),
- ☐ Maxim Kontsevich (I.H.E.S, *physique mathématique, géométrie algébrique et topologie*),
- ☐ Curtis Mc Mullen (Harvard, *dynamique complexe, géométrie hyperbolique*)

Le programme de ce dernier congrès mondial des mathématiques du 20ème siècle reflète les interpénétrations qui ont eu lieu au cours de ce siècle entre diverses branches des mathématiques, comme, par exemple, (on pourrait en citer bien d'autres) entre les systèmes dynamiques et la topologie ou la géométrie. L'exposé d'Andrew Wiles, auquel a été décerné un prix spécial pour sa démonstration de la conjecture de Fermat, montrait bien comment un problème aussi ancien que celui posé par Fermat avait amené à ouvrir de nouveaux champs mathématiques.

Plusieurs conférences plénières révélaient aussi « l'efficacité déraisonnable »de la mise en pratique, dans certaines branches des mathématiques, d'idées provenant de la physique. Cette expression fait référence à une réflexion citée plusieurs fois au cours du congrès et attribuée par Cumrum Vafa à A.Einstein qui s'étonnait de l'efficacité déraisonnable ("the unreasonable effectiveness") des mathématiques à résoudre des problèmes en physique.

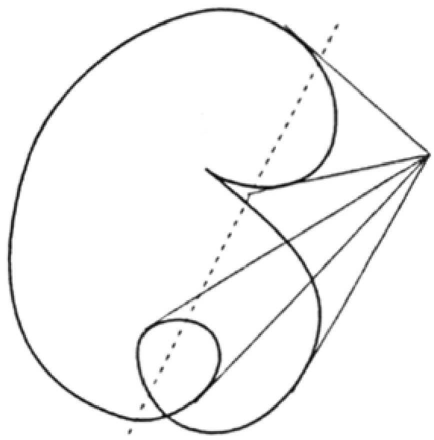
Si, comme le dit Y. Manin dans une entrevue du journal de la D.M.V (D.M.V Mitteilungen 2/98, numéro consacré au congrès), le programme avec lequel on aborde le 21ème siècle est celui de la "quantification de la mathématique" (au sens de la construction de versions quantifiées de notions anciennes) conduisant à de nouvelles théories comme la cohomologie quantique, l'informatique quantique (ou quantum computing ; voir à ce propos l'exposé de Peter Shor qui a reçu le prix Nevanlinna), les groupes quantiques (j'y ajouterais les probabilités quantiques à ma connaissance absentes à ce congrès), ce congrès peut se targuer d'être tourné vers l'avenir, plusieurs conférences évoquant l'une ou l'autre de ces notions. Finalement, j'ai apprécié le souci de la part des organisateurs d'inclure des exposés de mathématiques appliquées (par exemple à la géophysique) parmi la liste des conférences plénières.

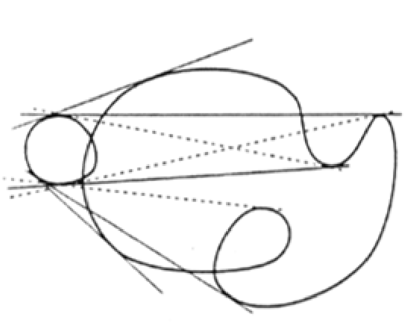
Après les louanges, quelques critiques ; je regrette personnellement que le programme de ce congrès ait laissé dans l'ombre plusieurs branches des mathématiques encore en plein essor comme la théorie des opérateurs, la géométrie non commutative, la géométrie des espaces de lacets, l'analyse stochastique sur les variétés pour ne citer que quelques "absences" qui m'ont frappée. Bien que le programme propose quelques conférences "invitées" sur la didactique ou l'histoire des mathématiques, on peut aussi regretter que ces thèmes n'aient pas eu leur place parmi les conférences plénières. Les femmes étaient encore trop peu présentes dans la liste des conférenciers : 1 femme pour 20 hommes pour les conférences plénières, 12 femmes pour environ 180 hommes pour les conférences de 45 min. Mentionnons aussi l'exposé de Cathleen Morawetz qui a fait une conférence plénière dans le cadre des "Noether lectures" et exprimait, à cette occasion, son souhait de voir arriver le jour où une telle conférence (réservée à une femme) n'aurait plus lieu d'être.

J'attendais aussi d'un congrès qui se dit mondial de représenter les mathématiques qui se font dans les divers continents ; or de grandes régions du monde comme l'Inde, la Chine, l'Amérique latine (en dehors du Brésil), le continent africain ne figuraient pas, à ma connaissance, parmi les pays d'origine des quelques 192 conférenciers invités.
Il me semble important de souligner ces "incongruités" dans un congrès qui s'est tenu à l'aube du 21ème siècle ; les organisateurs du prochain congrès qui se tiendra à Pékin en 2002 pallieront probablement à certaines d'entre elles (en assurant un meilleur équilibre géographique) mais malheureusement probablement pas encore à toutes !

Département de Mathématiques et Informatique
Complexe universitaire des Céseaux
Université Blaise Pascal
BP 45, 63177 Aubière Cedex

à propos de mathématiques





L’ouvert

juin 1994

L’ouvert

juin 1994

Introduction à la quantification des variétés orbitales [1]

Elise Benlolo et Yasmine Sanderson

1. Rappels de quelques définitions et propriétés

Toutes les définitions et notions qui suivent sont formulées de façon à faciliter la compréhension de cet exposé. Des formulations plus précises se trouvent dans [3] et [4], par exemple.

Une $\mathbb{C}$-*algèbre de Lie* est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel muni d'un crochet anti-symétrique $[,]$ qui vérifie l'identité de Jacobi : pour tous X, Y et Z de cet espace vectoriel,

$$[X,\ [Y,\ Z]] + [Y,\ [Z,\ X]] + [Z,\ [X,\ Y]] = 0.$$

Exemple : dans $gl_n(\mathbb{C})$, i.e. le $\mathbb{C}$-espace des matrices $n \times n$ sur $\mathbb{C}$, le crochet de Lie est : $\forall A, B \in gl_n(\mathbb{C})$, $[A, B] = AB - BA$. *Un groupe algébrique* est un groupe muni d'une structure de variété algébrique. Nous ne définirons cette notion que dans le cas particuher des variétés affines. Quand on ignore la structure d'espace vectoriel de $\mathbb{C}^n$, on appelle $\mathbb{C}^n$ le $\mathbb{C}$-*espace affine de dimension* n. Tout sous-ensemble de $\mathbb{C}^n$ défini par un nombre fini d'équations polynômiales est appelé *variété affine*. Les variétés affines constituent les fermés de $\mathbb{C}^n$ pour la *topologie de Zariski*. Soit $GL_n(\mathbb{C})$ le groupe des matrices $n \times n$ sur $\mathbb{C}$ inversibles. On peut regarder ce groupe comme une variété affine. En effet, on peut l'identifier à l'ensemble $\{(a_{11}, \ldots,\ a_{nn},\ b) \in \mathbb{C}^{n^2+1}\,;\ b det(a_{ij}) = 1\}$. Donc $GL_n(\mathbb{C})$ est un groupe algébrique. Tout sous-groupe fermé de $GL_n(\mathbb{C})$ est appelé *groupe linéaire algébrique*. Il y a un lien étroit entre les groupes linéaires algébriques et les algèbres de Lie : si G est un groupe linéaire algébrique, on peut lui associer une algèbre de Lie (de même dimension), $Lie\ (G)$, en munissant 1'espace tangent de G en l'identité de G d'une structure d'algèbre de Lie.
Exemples :
- Si $G = GL_n(\mathbb{C})$ alors $Lie\ (G) = gl_n(\mathbb{C})$,
- Si $G = SL_n(\mathbb{C})$ (i.e. le groupe des matrices $n \times n$ sur $\mathbb{C}$ de déterminant égal à 1), alors $Lie(G) = sl_n(\mathbb{C})$ (i.e. l'algèbre des matrices $n \times n$ sur $\mathbb{C}$ de trace nulle). Dans la suite, nous considérerons essentiellement le cas de $G = SL_n(\mathbb{C})$. Nous noterons $\underline{g} = Lie(G)$.

2. Variétés orbitales : définition et exemple

Le groupe G opère sur $\underline{g}$ par l'action de conjugaison. Donc l'orbite d'un élément X de $\underline{g}$ est l'ensemble $\{aXa^{-1}; a \in G\}$, qu'on notera $G.X$.
Une *orbite nilpotente* est l'orbite d'une matrice nilpotente (i.e. une matrice qui s'annule à une certaine puissance, ou, en d'autres termes, une matrice qui admet 0 comme unique valeur propre).
Une *sous-algèbre de Cartan* d'une algèbre de Lie est une sous-algèbre de Lie commutative maximale, dont les éléments sont semi-simples (i.e. diagonalisables dans le cas de $gl_n(\mathbb{C})$).
Elle sera notée $\underline{h}$. Daeis notre exemple de base, $\underline{h}$ est la sous-algèbre des matrices diagonales de $sl_n(\mathbb{C})$.
Les *racines d'une algèbre de Lie* sont certaines formes linéaires définies sur une sous-algèbre de Cartan.

1. Cet exposé a été présenté par les auteurs à l'Assemblée Générale de *Femmes et Mathématiques* du 15 mars 1997.

Description d'un système de racines de $sl_n(\mathbb{C})$
Pour tous $i, j \in \{1, \dots, n-1\}, i \neq j$, soit $\alpha_{ij} : \underline{h} \to \mathbb{C}$, la forme linéaire définie par : *diag* $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \mapsto \lambda_i - \lambda_j$.
L'ensemble $R^+ := \{\alpha_{ij}; 1 \leq i < j \leq n\}$ correspond à l'ensemble des racines dites *positives.* L'ensemble $R^- := \{\alpha_{ij}; 1 \leq j < i \leq n\}$ correspond à l'ensemble des racines dites *négatives.* On a $R^- = -R^+$. L'ensemble $R := R^+ \cup R^-$ est un *système de racines* relatif à $\underline{h}$. Les racines $\alpha_i := \alpha_{i,i+1}, i = 1, \dots, n-1$, correspondent aux *racines simples.* L'ensemble $S := \{\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}\}$ est une *base de racines* relative à $\underline{h}$. On remarquera que :

1. $\forall \alpha_{ij} \in R^+, \alpha_{ij} = \alpha_i + \alpha i + 1 + \cdots + \alpha_{i+k}$, où $j = i+k+1$. Donc toute racine positive s'écrit comme somme de racines simples consécutives. Pour $\alpha_{ij} \in R^-$, on a $\alpha_{ij} = -\alpha_{ji}$.

2. Chaque racine positive α_{ij} peut être identifiée au vecteur $(0, .., 1, .., -1, .., 0)$ de $\mathbb{R}^n$, où toutes les composantes sont nulles sauf la composante i-ème (qui est 1) et la composante j-ème (qui est -1).

Le groupe de Weyl associé à un système de racines
Soit R un *système de racines* relatif à une sous-algèbre de Cartan $\underline{h}$ d'une algèbre de Lie semi-simple complexe $\underline{g}$. Alors $R \subset \underline{h}^*$ (i.e. les racines sont certaines formes linéaires de $\underline{h}$) . Soit $\alpha \in R$. Il existe alors un unique elément $\check{\alpha}$ de $(\underline{h}^*)^* \cong \underline{h}$ tel que :

$$\langle \alpha, \check{\alpha} \rangle = 2 \text{ et } \forall \beta \in R, (\beta - \langle \beta, \check{\alpha} \rangle \alpha) \in R.$$

Soit $s_\alpha : \underline{h}^* \to \underline{h}^*$ l'application linéaire définie par $s_\alpha(\lambda) = \lambda - \langle \lambda, \check{\alpha} \rangle \alpha$, pour tout $\lambda \in \underline{h}^*$. Alors s_α est une réflexion (i.e. $(s_\alpha)^2 = Id$).
Le groupe W engendré par $\{s_\alpha | \alpha \text{ racine simple}\}$ est appelé le *groupe de Weyl* de $\underline{g}$.
Exemple 1 : On a vu que, dams $sl_n(\mathbb{C})$, les racines positives peuvent être identifiées aux vecteurs $(0, \dots, 1, \dots, -1, \dots, 0)$ de $\mathbb{R}^n$ (voir remarque 2 dams la description des racines de $sl_n(\mathbb{C})$) . En identifiant $(\mathbb{R}^n)^*$ à $\mathbb{R}^n$, l'opération $\langle ., . \rangle$ est le produit scalaire ordinaire dans $\mathbb{R}^n$. Avec ces identifications, on vérifie aisément que

$$\forall i, j \in \{1, \dots, n\}, \langle \alpha_i, \alpha_j \rangle = \begin{cases} 2 & ; \quad j = i \\ -1 & ; \quad j = i+1 \text{ ou } j = i-1 \\ 0 & ; \quad \text{autrement} \end{cases}$$

Par linéarité de $\langle ., \check{\alpha} \rangle$, les seules valeurs possibles pour $\langle \beta, \check{\alpha} \rangle$, où $\alpha \in S$ et $\beta \in R$, sont $2, -2, 1, -1, 0$.
Le groupe de Weyl de $sl_n(\mathbb{C})$ est isomorphe au groupe symétrique S_n.
On notera $s_i := s_{\alpha_i}, i = 1, \dots, n-1$.

Description de la décomposition triangulaire de $sl_n(\mathbb{C})$
Soit pour tout $\alpha = \alpha_{ij} \in R, X_\alpha := E_{ij}$ la matrice dont tous les coefficients sont nuls sauf le coefficient d'indice (i, j) , qui est 1. Pour $\alpha = \alpha_i \in S$, on désigne par $H_\alpha := E_{ii} - E_{i+1,i+1}$ la matrice diagonale dont le coefficient d'indice (i, i) est 1, le coefficient d'indice $(i+1, i+1)$ est -1, et les autres coefficients sont nuls.
Soit $\underline{n}_+ := \oplus_{\alpha \in R^+} \mathbb{C} X_\alpha$, la sous-algèbre des matrices triangulaires supérieures nilpotentes.
Soit $\underline{n}_- := \oplus_{\alpha \in R^-} \mathbb{C} X_\alpha$, la sous-algèbre des matrices triangulaires inférieures nilpotentes.
Soit $\underline{h} = \oplus_{\alpha \in S} \mathbb{C} H_\alpha$, la sous-algèbre de matrices diagonales. L'ensemble $\{X_\alpha; \alpha \in R\} \cup \{H_\alpha; \alpha \in S\}$ forme une base de $\underline{g}$. Donc on a une décomposition $\underline{g} = \underline{n}_+ \oplus \underline{h} \oplus \underline{n}_-$, qni est en fait une somme directe de sous-algèbres de Lie de $\underline{g}$. C'est donc une décomposition triangulaire de $sl_n(\mathbb{C})$.

Definition d'une variété orbitale
Soit $O = G.X$ une orbite nilpotente de $\underline{g}$. On peut considérer $O \cap \underline{n}_+$ comme une varété algébrique (muni de la topologie de Zariski). Il est connu que cet espace a un nombre fini de composantes irréductibles (connexes).

Chaque composante irréductible de $O \cap \underline{n}_+$ est appelée *variété orbitale*. Toute variété orbitale V peut être considérée comme une sous-variété de la variété affine $\underline{n}_+$. Notons $\dim \underline{n}_+ = k$: on peut alors identifier 1'adhérence (pour la topologie de Zariski) $\overline{V}$ de V dams $\underline{n}_+$ à un sous-espace de $\mathbb{C}^k$.
L'*idéal de définition* de $\overline{V}$, noté $I(\overline{V}\rangle$, est l'idéal de $\mathbb{C}[X_1, \ \ldots, X_k]$ engendré par tous les polynômes qui s'annulent sur $\overline{V}$.
Exemple 2 : Dans $sl_3(\mathbb{C})$, on a $S = \{\alpha_1, \ \alpha_2\}, R^+ = \{\alpha_1, \ \alpha_2, \ \alpha_1 + \alpha_2\}$,
et $\underline{n}_+ = \mathbb{C}X_{\alpha_1} \oplus \mathbb{C}X_{\alpha_2} \oplus \mathbb{C}X_{\alpha_1+\alpha_2}$.
Les orbites nilpotentes sont paramétrées par les partitions de 3 via les formes de Jordan :

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightleftharpoons (1,1,1), \ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = X_{\alpha_1} \rightleftharpoons (2,1)$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = X_{\alpha_1} + X_{\alpha_2} \rightleftharpoons (3).$$

On a donc 3 orbites nilpotentes :
$O_1 =$ 1'orbite nulle, $O_2 = G.X_{\alpha_1}$ et $O_3 = G.(X_{\alpha_1} + X_{\alpha_2})$, où $G = SL_3(\mathbb{C})$.
Notons que O_3 est l'orbite nilpotente de dimension maximale. Cette orbite est dense dams la variété de tous les éléments nilpotents de $sl_3(\mathbb{C})$. La variété $O_1 \cap \underline{n}_+ = \{0\}$ est bien sûr irréductible. On peut montrer que la variété $O_3 \cap \rightarrow$ n est aussi irréductible.
Par un calcul direct, on montre que : $O_2 \cap \underline{n}_+ = V_1 \text{U} V_2$, où

$$V_1 = \{ \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \ ; \ (a, \ b) \in \mathbb{C}^2 \backslash \{(0,0)\} \ \}$$

$$V_2 = \{ \begin{pmatrix} 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \ ; \ (a,b) \in \mathbb{C}^2 \backslash \{(0,0)\} \ \}.$$

Les idéaux de définition de $\overline{V}_1$ et $\overline{V}_2$ sont donc :

$$I(\overline{V}_1) = X_{\alpha_2}\mathbb{C}[X_{a_1}, \ X_{\alpha_1+\alpha_2}, \ X_{\alpha_2}] \text{ et } I(\overline{V}_2) = X_{\alpha_1}\mathbb{C}[X_{\alpha_1}, X_{\alpha_1+\alpha_2}, X_{\alpha 2}].$$

3. Modules de plus haut poids

Soit L un $\mathbb{C}$-espace vectoriel. On appelle *représentation* de $\underline{g}$ dams L un homomorphisme ρ de $\underline{g}$ dams $gl(L)$. Pour tout $x \in \underline{g}$, et pour tout $v \in L$, on pose $\rho(x)(v) := x.v$, et on dit que L est un $\underline{g}$-module. Soit L un $\underline{g}$-module. On dit qu'un élément $\lambda \in \underline{h}^*$ est un *poids* de L si l'espace $L_\lambda := \{v \in L | h.v = \lambda(h)v, \ \forall h \in \underline{h}\}$ n'est pas réduit à $\{0\}$, auquel cas cet espace est appelé *espace de poids* λ. Soit $\lambda \in \underline{h}^*$ un *poids* de L, on dit que $L = L(\lambda)$ est un *module de plus haut poids* λ si

a) $\dim L_\lambda = 1$
b) $\underline{n}_+.L_\lambda = \{0\}$
c) $L = U(\underline{g}).L_\lambda = U(\underline{n}_-).L_\lambda$,

où $U(.)$ désigne 1'algèbre enveloppante. Un tel module est engendré par un *vecteur de plus haut poids*. Tout module simple de dimension finie est un module de plus haut poids. Un module de plus haut poids L se décompose en somme directe des espaces de poids : $L = \oplus_{\mu \text{ poids}} L_\mu$. Pour tout poids $\mu, dim L_\mu$ est finie. Le *caractère* du *module de plus haut* *poids* L est alors défini par :

$$\chi(L) := \sum_{\mu \text{ poids}} (dim L_\mu) e^\mu,$$

où e^μ est l'application de $\underline{h}^*$ dams $\mathbb{Z}$, qui vaut 1 en μ et 0 ailleurs.

.Soit $P = \{\mu \in \underline{h}^* | \langle \mu, \check{\alpha} \rangle \in \mathbb{Z} \ , \ \forall \alpha \in R\}$ l'ensemble des poids *entiers* et $\mathbb{Z}[P]$ le réseau des poids entiers, i.e. l'ensemble des applications de $\underline{h}^*$ dams $\mathbb{Z}$ qui ne s'annulent que pour un nombre fini d'éléments de P. Alors $e^\mu \in \mathbb{Z}[P]$, pour tout $\mu \in P$. Dorénavant, on suppose que tous les poids sont entiers. Soit α une racine simple. On définit un opérateur $\triangle_\alpha : \mathbb{Z}[P] \to \mathbb{Z}[P]$ par

$$\begin{aligned} \Delta_\alpha (e^\mu) &:= \tfrac{1 - e^{-\alpha} s_\alpha}{1 - e^{-\alpha}} e^\mu \\ &= \begin{cases} e^\mu + e^{\mu - \alpha} + \cdots + e^{\mu - \langle \mu, \check{\alpha} \rangle \alpha} \, ; & \langle \mu, \check{\alpha} \rangle \geq 0 \\ 0 \, ; \langle \mu, \check{\alpha} \rangle = -1 \\ -e^{\mu + \alpha} - e^{\mu + 2\alpha} - \cdots - e^{\mu - (\langle \mu, \check{\alpha} \rangle + 1)\alpha} \, ; \langle \mu, \check{\alpha} \rangle \leq -2 \end{cases} \end{aligned}$$

Soit $w = s_{i_1} \dots s_{i_k}$ une décomposition réduite de $w \in W$, c'est à dire que k est le nombre minimal de réflexions avec lequel on peut écrire w. On définit $\Delta_w := \Delta_{\alpha_{i_1}} \dots \Delta_{\alpha_{i_k}}$. Les opérateurs $\triangle_w$, qui ne dépendent pas du choix de la décomposition réduite de w, sont appelés *opérateurs de Demazure.* Ces opérateurs sont connectés aux $\underline{g}$-modules de la façon suivante : si L est un module simple de dimension finie de plus haut poids λ et si $w_0 \in W$ est l'élement de longueur maximale, alors on a la formule de caractère de Demazure :

$$\chi(L) = \Delta_{w_0} e^\lambda$$

Modules gradués

Nous n'introduirons ici que les notions et notations nécessaires à la compréhension du paragraphe 5. Pour plus de détails, consulter [4].

Il existe une filtration canonique $(U_n(\underline{g}))_{n \geq 0}$, où les $(U_n(\underline{g}))(n \geq 0)$ sont des sous$-\underline{g}$-modules de $U(\underline{g})$ de dimension finie, qui satisfont $U_n(\underline{g}) U_p(\underline{g}) \subset U_{n+p}(\underline{g})$, pour tous $n, p \geq 0$.

L'algèbre

$$gr(U(\underline{g})) := \bigoplus_{n \geq 0} (U_n(\underline{g}) / U_{n-1}(\underline{g}))$$

est *l'algèbre graduée* associée à l'algèbre filtrée $U(\underline{g})$. C'est une algèbre commutative. Soit M un $U(\underline{g})$-module engendré par une partie A. Alors

$$gr(M) := \bigoplus_{n \geq 0} (U_n(\underline{g}) A / U_{n-1}(\underline{g}) A)$$

est *le module gradué* associé à M. Dans le cas où M est un module de plus haut poids λ, on prend $A = M_\lambda$. Alors on a $gr(M) = S(\underline{n}_-) gr(M)_\lambda$. Si I un idéal bilatère de $U(\underline{g})$, alors

$$gr(I) := \bigoplus_{n \geq 0} ((I \cap U_n(\underline{g})) / (I \cap U_{n-1}(\underline{g})))$$

est *l'idéal gradué* associé à I.

Travail de Joseph

La méthode des orbites de Kirillov motive une grande partie de la recherche actuelle dans la théorie de la représentation. Kirillov avait établi une bijection entre les représentations unitaires et les orbites coadjointes d'une algèbre de Lie nilpotente. La méthode des orbites consiste à imiter ce résultat pour d'autres groupes, en particulier les groupes semi-simples. Il est maintenant accepté qu'il n'existe pas de telle bijection mais il semble exister une forte connexion naturelle entre les deux. Celle que Joseph propose est entre les variétés orbitales et les représentations de plus haut poids. Soit V une variété orbitale. Par la forme de Killing, on identifie $\underline{n}_+^*$ avec $\underline{n}_-$, donc $S(\underline{n}_-) \simeq \mathbb{C}[\underline{n}_+]$. De plus, $R(\overline{V}) = S(\underline{n}_-)/I(\overline{V})$. Soit $L(\lambda) = U(\underline{n}_-)e_\lambda$ un module de plus haut poids engendré par le vecteur e_λ. On pose $A = \mathrm{Ann}_{U(\underline{n}_-)}e_\lambda$. On a $L(\lambda) = U(\underline{n}_-)/A$. Donc $grL(\lambda) = S(\underline{n}_-)e_\lambda = S(\underline{n}_-)/gr(A)$. Joseph a proposé la relation suivante :

Conjecture 1 : *Il existe un module simple de plus haut poids $L(\lambda)$ tel que*

$$I(\overline{V}) = gr(Ann_{U(\underline{n}_-)}e_\lambda) \ .$$

La *quantification* consiste à trouver un tel module. Une conséquence de cette conjecture serait que $\chi(R(\overline{V})) = e^{-\lambda}\chi(L(\lambda))$. Cette première conjecture a été vérifiée pour toutes les variétés orbitales de $sl_n(\mathbb{C})$, pour $n \leq 5$, et dans $sl_6(\mathbb{C})$, il y a exactement deux contre-exemples à cette conjecture dans, respectivement, les orbites $O_1 = G.(X_{\alpha_1} + X_{\alpha_3} + X_{\alpha_5})$ et $O_2 = G.(X_{\alpha_1} + X_{\alpha_2})$[1], [2]. Ceci a conduit Joseph à modifier cette première conjecture.

Conjecture 2 : *Il existe un module de plus haut poids $H(\lambda\rangle$ (non nécessairement simple) et tel que $I(\overline{V}) = gr(Ann_{U(\underline{n}_-)}e_\lambda)$* . Dans [2], il a été vérifié que les deux contre-exemples trouvés pour la conjecture 1 satisfont la conjecture 2. Dams un preprint récent [5], Joseph a montré que : si V est une variété orbitale dams une orbite nilpotente de dimension minimale non nulle de $\underline{g}$, alors il existe un module de plus haut poids $L(\lambda)$ tel que $\chi(L(\lambda)) = e^\lambda\chi(S(\underline{n}_-)/I(\overline{V}))$. De plus, il montre que pour une telle variété orbitale V, il existe un sous-ensemble σ_V de l'ensemble des racines positives de $\underline{g}$ et il existe $w \in W$ tels que :

$$(*)\ \chi(R(\overline{V})) = \Delta_w(\frac{1}{\prod_{\alpha\in\sigma_V}(1-e^{-\alpha})})$$

Exemple : On considère, dans la $SL_3(\mathbb{C})$-orbite nilpotente de dimension minimale, i.e. l'orbite $G.X_{\alpha_1}$, notée O_2 précédemment (voir 2, exemple 2), la variété orbitale

$$V_1 = \{\begin{pmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; (a,b) \in \mathbb{C}^2\backslash\{(0,0)\}\}$$

Alors $\overline{V}_1$ est stabilisée par le sous-groupe parabolique P, dont l'algèbre de Lie, $\underline{p}$, est engendrée par $\underline{h} \cup \{X_\alpha; \alpha \in R^+\}\mathrm{U}\{X_{-\alpha_2}\}$, i.e.

$$\underline{p} = \{\begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & d & e \\ 0 & f & g \end{pmatrix}; a,b,c,d,e,f,g \in \mathbb{C} \ \text{ et } \ a+d+g=0\}.$$

On a la décomposition : $\underline{p} = \underline{r} \oplus \underline{m}$, où

$$\underline{\mathbf{r}} = \{\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & d & e \\ 0 & f & g \end{pmatrix}; a,d,e,f,g \in \mathbb{C} \ \text{ et } \ a+d+g=0\} \text{ et}$$

$$\underline{\mathbf{m}} = \{ \begin{pmatrix} 0 & b & c \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} ; b, c \in \mathbb{C} \}$$

On vérifie facilement que $\overline{V} = \underline{m}$ et que V est un R-module, où R est un groupe algébrique d'algèbre de Lie $\underline{\mathbf{r}} \simeq \mathbb{C} \times sl_2(\mathbb{C})$. Pour établir (*) dans ce cas, on calcule la partie à gauche :

$$\begin{aligned}
\chi(R(\overline{V})) &= \chi\left(\mathbb{C}\left[X_{-\alpha_1}, X_{-\alpha_1-\alpha_2}\right]\right) \\
&= \sum_{n,m \geq 0} e^{n\alpha_1} e^{m(\alpha_1+\alpha_2)} \\
&= \frac{1}{1-e^{-\alpha_1}} \frac{1}{1-e^{-\alpha_1-\alpha_2}}
\end{aligned}$$

D'autre part, pour calculer la partie à droite, on choisit $\sigma_V = \{\alpha_1\}$ et $w = s_{\alpha_2}$. Comme $\langle \alpha_1, \overline{\alpha}_2 \rangle = -1$, on a

$$\begin{aligned}
\Delta_{\alpha_2}\left(\frac{1}{1-e^{-\alpha_1}}\right) &= \sum_{n \geq 0} \Delta_{\alpha_2}\left(e^{-n\alpha_1}\right) \\
&= \sum_{n \geq 0} e^{-n\alpha_1}\left(\frac{1-e^{-(n+1)\alpha_2}}{1-e^{-\alpha_2}}\right) \\
&= \frac{1}{1-e^{-\alpha_2}}\left(\sum_{n \geq 0} e^{-n\alpha_1} - e^{-\alpha_2} \sum_{n \geq 0} e^{-n(\alpha_1+\alpha_2)}\right) \\
&= \frac{1}{1-e^{-\alpha_2}}\left(\frac{1}{1-e^{-\alpha_1}} - \frac{e^{-\alpha_2}}{1-e^{-(\alpha_1+\alpha_2)}}\right) \\
&= \frac{1}{1-e^{-\alpha_1}} \frac{1}{1-e^{-\alpha_1-\alpha_2}} = \chi(R(\overline{V}))
\end{aligned}$$

Donc la formule (*) est vérifiée. Ceci a conduit Joseph à établir la conjecture suivante : **Conjecture 3** [5] : Pour chaque variété orbitale V, il existe un sous-ensemble σ_V de l'ensemble des racines de $\underline{g}$, $w \in W$ et un poids λ tels que :

$$\chi(R(\overline{V})) = e^{-\lambda} \Delta_w \left(\frac{e^\lambda}{\prod_{\alpha \in \sigma_V}(1-e^{-\alpha})}\right)$$

L'intérêt de cette nouvelle conjecture est qu'on n'est pas obligé de trouver un module de plus haut poids pour décrire la structure de $R(\overline{V})$. Comme nous l'avons précédemment signalé, cette conjecture a été v''erifiée pour les variétés orbitales dans les orbites nilpotentes de dimensions minimales. On peut également vérifier cette conjecture pour les variétés orbitales dites de Richardson, i.e. $\overline{V}$ est une certaine sous-algèbre de $\underline{n}_+$ (plus précisément : le nilradical de la sous-algèbre parabolique maximale laissant V stable).

Bibliographie

[1] E. Benlolo, *Étude des variétés orbitales dans $sl_n(\mathbb{C})$*, C.R. Acad. Sci. Paris 315 Série I (1992), 537-540.

[2] E. Benlolo, *Sur la quantification de certaines variétés orbitales*, Bull. Sci. math. 118 (1994), 225-243.

[3] J. Dixmier, *Algèbres enveloppantes*, Paris, Gauthiers-Villars (Cahiers Scientifiques, 37), (1974).

[4] J. E. Humphreys, *Introduction to Lie Algebras and representation theory*, (Springer-Verlag) (Graduate Texts in Mathematics, 9), (1980).

[5] A. Joseph, *Orbital varieties of the minimal orbit*, Preprint (1996).

Laboratoire de Mathématiques
U.F.R. Sciences, B.P. 1039
51687 Reims cedex 02
elise. b enlolo@univ-reims. fr
sanderso@math. rut gers. edu

La renormalisation : un outil mathématique multiforme pour une nouvelle approche de la réalité physique

Annick Lesne

Les méthodes de renormalisation sont devenues un outil sinon incontournable du moins omniprésent en physique théorique. Elles sont indispensables dams l'étude des *propriétés asymptotiques* (grandes échelles d'espace et de temps) de systèmes où les *fluctuations* jouent un rôle essentiel. Bien plus, en déterminant le lien entre les différents modules effectifs représentant un même système physique lorsqu'on fait varier les échelles de la description, ces méthodes donnent accès à des propriétés intrinsèques, indépendantes des détails microscopiques et insensibles aux possibles lacunes et erreurs entachant la modélisation. Le développement de ces méthodes a accompagné celui des notions *d'invariance d'échelle* illustrée par exemple dans les structures fractales, et *d'universalité*, à rapprocher de celles de forme normale et de robustesse.

Après une brève présentation de ce que recouvre le terme de « renormalisation »des déplacements de sens qu'il a connu, nous présenterons quelques principes communs à toutes les méthodes de renormalisation ; nous montrerons que c'est le statut même des *modèles (physiques)* qu'elles ont bouleversé ; nous terminerons par quelques applications illustrant l'interêt de la renormalisation dams des problèmes mathématiques.

1. Bref historique : les différents usages du terme « renormalisation »

La « renormalisation »a d'abord été un adjectif. L'idée remonte au siècle dernier où, dans le contexte hydrodynamique, la *masse « renormalisée »*d'un corps en mouvement dans un fluide est sa masse apparente, c'est-à-dire le coefficient d'inertie m intervenant dans l'expression de son énergie cinétique $1/2mv^2$ et dams l'équation fondamentale de son mouvement ($mdv/dt = 3D$ résultante des forces). Cette masse renormalisée est supérieure à la masse au repos car elle prend en compte une contribution due au fluide déplacé, l'énergie cinétique de ce dernier s'ajoutant à celle du corps considéré [1]. Plus généralement, une grandeur *renormalisée* est la valeur *apparente* de cette grandeur, obtenue en ajoutant à la valeur intrinsèque des contributions de même dimension resultant d'interactions, d'influences extérieures ou de degrés de liberté n'apparaissant pas explicitement dams la description. On distingue par exemple les corrélations directes entre deux particules d'un fluide et les corrélations renor- malisées, ces dernières reflétant les interactions implicites (relayées par le reste du système) entre les particules.

La renormalisation est ensuite apparue en électrodynamique quantique, et plus généralement dams les théories quantiques de champs, avec le sens de *régularisation* [5]. Une théorie *renormalisable* est une theorie où l'influence des phénomènes de très grande fréquence (ou de façon équivalente, de très grande energ.e) peut être prise en compte de façon implicite en remplaçant les paramètres initiaux θ par des *paramètres effectifs* $\tilde{\theta}$; conjointement, on ne décrit expIicitement que les modes de fréquences w inférieures à une valeur de coupure Ω. L'expression des paramètres effectifs dépend bien sûr du choix *arbitraire* de Ω. On appelle (*opérateurs de) renormalisation* les transformations $R_{\Omega,\infty}$ et $'R_{\Omega_1,\Omega_O}$ reliant les paramètres initiaux et les paramètres renormalisés

$$\tilde{\theta}(\Omega) \equiv \mathcal{R}_{\Omega,\infty}(\theta) \qquad \tilde{\theta}(\Omega_1) = 3D\mathcal{R}_{\Omega_1,\Omega_0}[\overline{\theta}(\Omega_0)] \tag{1}$$

La condition de cohérence de la démarche est la loi de groupe génèralisée (groupe « non autonome »)

$$\mathcal{R}_{\Omega_1,\infty} = 3D\mathcal{R}_{\Omega_1,\Omega_0}\mathcal{R}_{\Omega_0,\infty} \quad \mathcal{R}_{\Omega_2,\Omega_0} = 3D\mathcal{R}_{\Omega_2,\Omega_1}\mathcal{R}_{\Omega_1,\Omega_0} \tag{2}$$

Lorsque $\mathcal{R}_{\Omega_1,\Omega_0}$ ne dépend que du rapport $k = 3D\Omega_0/\Omega_1$, on retrouve une loi de groupe usuelle $\mathcal{R}_{k_2}\mathcal{R}_{k_1} = 3D\mathcal{R}_{k_2k_1}$. L'intérêt de cette structure de groupe est si grand qu'on parle du *groupe de renonnalisation.* Ce groupe n'est bien sûr pas unique : chaque méthode de renormalisation fait appel à un groupe différent ! Sa dimension dépend du nombre de facteurs d'échelle (tels $k = 3D\Omega_0/\Omega_1$) indépendants intervenant dams la transformation de renormalisation $\mathcal{R}$. Cette structure de groupe permet tout d'abord de mettre en oeuvre la renormalisation en utilisant les outils de théorie des groupes (algèbres de Lie, représentations...) dèjà largement utilisés pour exploiter l'existence de groupes de symétrie. Mais bien au-delà de cet argument technique, les groupes de symétrie d'un système physique déterminent une grande partie de ses propriétés observables ; le groupe de renormalisation apparaît comme un groupe de symétrie particulier, et on peut souvent traduire en informations quantitatives les proprietés *d'invariance par renormalisation* du système physique. Devenus indispensables dans de nombreux problèmes d'électrodynamique quantique, les groupes de renormalisation ont ensuite investi la mécanique statistique. Ils sont maintenant l'outil privilégié pour étudier les *phénomènes critiques*, c'est-à-dire tous les phénomènes où la divergence d'une longueur de corrélation interdit de découpler les échelles et de remplacer les degrés de liberté microscopiques par quelques grandeurs moyennes.

La renormalisation permet de déterminer la *façon dont s'organisent les fluctuations aux différentes échelles* et d'expliciter les lois d'échelle découlant de cette organisation.

La renormalisation a ensuite été utilisée dans le contexte des systèmes dynamiques pour étudier l'apparition du *chaos*. La clé pour relier cette renormalisation avec celles utilisees en mécanique statistique est de traduire les dépendances et grandeurs *spatiales* en dépendances et grandeurs *temporelles*. Depuis lors, les méthodes de renormalisation se rencontrent dans les domaines les plus variés de la physique théorique.

Nous allons maintenant présenter quelques principes généraux communs à toutes ces méthodes, qui justifient l'emploi d'un unique vocable pour les désigner.

2. Les principales étapes d'une méthode de renormalisation

Insistons avant tout sur le fait que la renormahsation va opérer sur des *modèles* $\mathcal{M}$, c'est-à-dire sur des représentations en partie *subjectives* du système physique S, dépendant par exemple des phénomènes qu'on choisit d'étudier et, de fagon essentielle, de l'*échelle minimale* a qu'on peut apprécier (résolution de l'appareil de mesure, par exemple). Cette échelle a, que nous qualifierons de *microscopique* par opposition à l'échelle *macroscopique* L de l'observation, détermine les sous-systèmes de S qui seront considérés comme des constituants élémentaires, sans structure interne et décrits par un petit nombre de grandeurs, noté s de façon abrégée. Un constituant élémentaire sera typiquement une cellule d'extension linéaire a, assimilée à un point dans le modèle $\mathcal{M}_a$. A l'échelle microscopique, l'état de S sera décrit par une *configuration* $\overline{s} \equiv (s_1, \ \dots \ , \ sN)$ donnant l'état des N constituants élémentaires (par exemple $N = 3D(L/a)^d$ dans un espace de dimension d). Nous pouvons maintenant préciser les ingrédients définissant un modèle $\mathcal{M}$:

- *l'espace de phase* du modèle est l'ensemble $\mathcal{E} = 3D\{\overline{s}\}$ des configurations (il dépend donc de a et de N) ;

- les caractéristiques physiques macroscopiques sont associées à des fonctions de l'état microscopique $\overline{s} \mapsto A(\overline{s})$ définies sur $\mathcal{E}$;

- l'épine dorsale du modèle est une fonction $\phi(\overline{s})$ que nous appellerons la *règle de structure* ; dams une situation d'équilibre, elle determine le poids statistique de la configuration $\overline{s}$ dans les propriétés macroscopiques de S ; dans un problème hors d'équilibre, elle determine l'évolution de la configuration $\overline{s}.\phi$ sera par exemple l'Hamiltonien du système en mécanique statistique, la loi d'évolution pour un système dynamique ou les probabilités de transition pour un processus stochastique. Au lieu de faire intervenir un ensemble fonctionnel $\Phi = 3D\{\phi\}$, on suppose souvent que la règle de structure est de forme paramétrée connue $\phi = 3D\phi_K$. Le modèle est alors déterminé par un jeu de *paramètres*, noté de façon compacte $K \in \mathcal{K}$.

Les ingrédients de base de toute méthode de renormalisation sont une décimation, des changements d'échelle et une transformation des paramètres que l'on remplace par des paramètres effectifs. Introduits bien antérieurement, ils sont déjà en eux-mêmes des outils efficaces. La nouveauté apportée par les méthodes de renormalisation est *d'itérer* une combinaison adéquate de ces trois étapes, combinaison appelée *transformation de renormalisation*, et d'étudier l'action de cette transformation dans l'*espace des modèles.*

• *La décimation* : ce terme désigne toute procédure traduisant 1'effet sur la configuration $\overline{s} \in \mathcal{E}$ d'un changement de résolution $a \to ka$. On va ainsi regrouper les constituants élémentaires en « paquets »(« *coarse-graining* ») et relier la configuration $\overline{s}'$ de ces paquets à la configuration initiale $\overline{s}' = 3DT_k(\overline{s})$. On a ainsi réduit le nombre N de degrés de liberté d'un facteur k^d en dimension d (ou, à N constant, augmenté d'nn facteur k le champ L de l'observation). En contrepartie, cette décimation s'accompagne nécessairement d'une perte d'information sur les échelles inférieures à ka. La transformation T_k sera choisie de façon à préserver au mieux les informations et les propriétes dont on *pense* qu'elles jouent un rôle crucial aux grandes echelles. Cette étape, en partie arbitraire, est un point délicat de la démarche de renormalisation, où une compréhension préalable du phénomène étudie' est utile, sinon néssaire. Notons que dans l'espace conjugué (fréquences et vecteurs d'onde), la décimation se traduit par un changement $\Omega \to \Omega/k$ de la valeur de coupure $\Omega = 3B2\pi/a$ (« *cutoff* ») : le modèle renormalisé ne décrit plus explicitement les modes de très grandes fréquences et de très grands vecteurs d'onde.

• *Les changements d'échelle* : ils permettent de conserver l'échelle minimale apparente, le but étant :

- d'une part de conserver le même espace de phase (nécessité technique)

- d'autre part de mettre en évidence les propriétés d'auto-similarité (même principe qu'une loupe).

Si n facteurs d'échelles sont impliqués, il n'y a en general qu'une famille

$(k,\ k^{\alpha_2},\ \dots\ ,\ k^{\alpha_\hbar})_{k\geq 1}$ conduisant à une limite $k \to \infty$ non triviale, ce qui fournit la valeur α_2, .. . , α_n de certains exposants. Prenons l'exemple d'une marche aléatoire en temps discret, sans biais (c'est-à-dire sans composante déterministe qui donnerait une dépendance linéaire par rapport au temps). Elle obéit à la loi de diffusion $< |\vec{r}(t)1^2 >= 3DDt$ si $\tilde{r}(t)$ est la position atteinte à l'instant t sachant qu'on part de O à $t = 3D0$. Si on contracte le temps d'un facteur k, en ne regardant que les positions $[\vec{r}(kt)]_{t\geq 0}$, il faut contracter l'espace d'un facteur $\sqrt{k}$ pour obtenir une trajectoire statistiquement identique. Ce facteur $\sqrt{k}$ est le seul pour lequel on obtient une limite $k \to \infty$ non triviale : si on contracte d'un autre facteur $k^{-\alpha}, \alpha \neq 1/2$, on obtient un coefficient de diffusion renormalisé $D_{k\to\infty} = 3D0$ (si $\alpha > 1/2$) ou $D_{k\to\infty} = 3D\infty$ (si $\alpha < 1/2$).

• *Les paramètres effectifs* : pour que l'on continue à décrire le *même système physique*, l'effet conjoint de la décimation et des changements d'échelle doit être « compensé} »par une transformation de la règle de structure ϕ du module en $R_k(\phi)$, de façon à ce que $R_k(\phi)$ décrive la statistique ou l'évolution de $T_k(\overline{s})$. Par exemple, si ϕ engendre une distribution de probabilité P_ϕ dans l'espace de phase, on aura

$$P_{R_k\langle\phi)}(s^{\lrcorner}) = 3D \sum_{s \in T_k^{-1}[5']} P_\phi(\overline{s}) = 3DP_\phi(T_k^{-1}[\overline{s}']) \tag{3}$$

R_k, agissant dans l'espace fonctionnel Φ, est appelé *l'opérateur de renormalisation.* Dams le cas d'un module paramétré $(\phi_K)_{K\in\mathcal{K}}$, on écrira

$$R_k(\phi_K) \approx \phi_{r_k(K)} \tag{4}$$

en général au prix d'approximations dont il faudra ensuite discuter la pertinence. Les paramètres $r_k(K)$ sont appelés les *paramètres renormalisés*; ils intègrent l'effet aux échelles supérieures à ka des détails microscopiques d'échelle inférieure à ka.

Une notion essentielle sur laquelle reposent les méthodes de renormalisation est ainsi celle de *covariance.* Elle exprime la condition de cohérence que doit vérifier une transformation conjointe des différents ingrédients de $\mathcal{M}$ pour que le modèle $\mathcal{M}'$ obtenu décrive *la même réalité physique.* Ici, la propriété de covariance, explicitée dans des exemples dans les équations (3) et (4), assure que le modèle initial et le modèle renormalisé décrivent le *même* système physique (en particulier, la renormalisation conservera les invariants physiques du problème). Cette propriété exprime la (nécessaire) inaltérabilité de la réalité physique lorsque change *notre* façon de l'observer et de la décrire. Remarquons que cette notion se rencontre dans la formulation de n'importe quelle invariance par symétrie du système. On retrouve le fait qu'un groupe de renormalisation n'est rien d'autre qu'un groupe de symétrie particulier. Par exemple, l'invariance par rotation d'un système décrit par un champ de vecteurs $V(\overline{r})$ s'écrit : pour toute rotation R, $R[V(\vec{r})] = 3DV(R\tilde{r})$. Dams le cas géneral, si $(T_9)_{g\in G}$ décrit l'action du groupe de symétrie G sur les configurations $\overline{s}$ du systéme, l'expression de l'invariance par symétrie fait intervenir une représentation T de G dans l'espace vectoriel E où la règle de structure ϕ prend ses valeurs et s'écrit : $\forall g \in G, T_g[\phi(\overline{s})] = 3D\phi[T_g(\overline{s})]$.

Une notion plus forte est celle *d'invariance par renormalisation.* Elle s'écrit

$$R_k(\phi^*) = 3D\phi^* \tag{5}$$

Elle exprime une *propriété du système*, à savoir son *auto-similarité* : le système observe à l'échelle ka est identique à 1'image observée à l'échelle a et dilatée d'un facteur k. Les points fixes de la renormahsation sont ainsi, par contruction nêine de R_k, associés à des systèmes présentant une invariance d'échelle exacte. Les points fixes jouent un rôle crucial dans 1'analyse par renormahsation pour les raisons suivantes :

• tous les modules convergeant vers un point fixe sous 1'action de la renormalisation manifesteront les mêmes propriétés aux grandes échelles ;

• du fait des changements d'échelle inclus dans la renormalisation, l'échelle caractéristique ξ^* (typiquement une longueur ou un temps de corrélation) associée à un point fixe, devant vérifier $\xi^* = 3Dk\xi^*$, sera ou bien nulle, ou bien infime. Si $\xi^* = 3D0$, le point fixe est un modèle idéal où il n'y a *aucun couplage* entre les constituants élémentaires. Si $\xi^* = 3D\infty$, le point fixe est un modèle décrivant un *phénomène critique* ;

• le résultat essentiel est que l'analyse de R_k au voisimage d'un point fixe ϕ^* critique ($\xi^* = 3D\infty$) determine explicitement les lois d'ècheUe asymptotiques décrivant les phénomènes critiques se rattachant à ce point fixe (les modèles associés convergent vers le point fixe sous 1'action de la renormalisation). On montre en particulier [2,6] que les *exposants critiques* sont simplement reliés aux valeurs propres de l'opérateur de renormalisation linearisé en ϕ^*.

3. Un changement de point de vue : vers une description objective de la réalite physique

Revenons au cas fondamental de la renormalisation utilisée dans les théories quantiques de champs, présenté schématiquement au 1. Le modèle de départ - notons le $\mathcal{M}_\infty$ - sans coupure (c'est-à-dire sans limitation supérieure des vecteurs d'onde et des fréquences), est assurément incorrect. En effet, nous manquons d'informations expérimentales sur les phénomènes de très grande énergie et ce modèle ne peut être obtenu qu'en extrapolant les mécanismes connus jusqu'à des fréquences et des vecteurs d'onde arbitrairement grands. Il s'ensuit des divergences dites « ultra-violettes » ; elles reflètent simplement l'inadéquation de notre description au-delà de certaines énergies, et non une catastrophe physique observable. Le modèle $\mathcal{M}_\Omega$, associé à une coupure Ω et à des paramètres renormalisés $\tilde{\theta}(\Omega)$, ne présente évidemment plus de divergences ultra-violettes puisque par construction, il ne décrit que des modes $|\omega| < \Omega$. Cependant, la prise en compte dans $\tilde{\theta}(\Omega)$ des phénomènes de fréquence $|\omega| > \Omega$ est nécessairement entachée d'erreur puisque nous ne pouvons faire que des conjectures sur ces phénomènes. Les modèles $\mathcal{M}_\Omega$ sont donc *subjectifs* (choix arbitraire de Ω) et *approchés*. Par contre, le lien entre ces modèles donne accès à des propriétés intrinsèques. Ce lien est précisément donné par les transformations de renormalisation $\mathcal{R}_{\Omega_1,\Omega_0}$. Elles décrivent comment doit changer *notre* modélisation $\mathcal{M}_\Omega$ de la réalité quand change *notre* échelle de description $|\omega| < \Omega$ La transformation $\mathcal{R}_{\Omega_1,\Omega_0}$ décrit l'influence aux échelles $|\omega| < \Omega_1$ des modes $\Omega_1 < |\omega| < \Omega_0$. Les transformations de renormalisation $\mathcal{R}$ décrivent ainsi *la façon dont coopèrent les différentes échelles.* En s'attachant à décrire l'*organisation* des phénomènes plus que les phénomènes eux-mêmes, les méthodes de renormalisation conduisent à des résultats intrinsèques, insensibles aux inévitables approximations intervenant dans la description théorique.

Pour illustrer notre propos, considérons une courbe fractale. Sa « longueur »est une grandeur subjective $L(a)$ dépendant du pas a avec lequel on arpente la courbe. Par contre, le *lien* entre des mesures $L(a)$ et $L(ka)$ obtenues en choisissant des échelles minimales a et ka différentes donne accès à une caractéristique intrinsèque : la *dimension fractale* D_f de la courbe, définie à travers $L(ka) = 3Dk^{1-D_f}L(a)$. Cette dernière relation exprime l'auto-similarité - l'invariance d'échelle - de la courbe fractale.

Cette discussion dépasse largement le cadre des théories quantiques de champs. *Construire un modèle physique, c'est choisir de se mettre des oeillères* : échelles minimales et maximales, délimitation du système $\mathcal{S}$ et de ses degrés de liberté, simplification du mi- lieu extérieur et de ses interactions avec $\mathcal{S}, \ldots$. Un modèle est donc nécessairement subjectif et imparfait. La démarche usuelle, consistant à déduire le maximum d'informations sur le comportement d'un système idéal décrit par le modèle, est donc par construction entachée d'incertitudes, voire d'erreurs. Les méthodes de renormalisation proposent une approche complètement différente. L'analyse se déplace de l'espace de phase dans un *espace de modèles*; en reliant entre eux des modèles, les groupes de renormalisation réalisent une partition de l'ensemble de modèles considéré en *classes d'universalité*, regroupant des modèles conduisant aux mêmes propriétés asymptotiques. Notons qu'un groupe de renormalisation n'est rien d'autre qu'un système dynamique dans l'espace des modèles. Il est immédiat de voir que le flot associé (« le flot de renormalisation ») structure cet espace autour des points fixes de la transformation de renormalisation. Les classes d'universalité sont les bassins d'attraction des points fixes stables ou les variétés stables des points fixes hyperboliques.

Il suffit alors de déterminer la classe d'universalité à laquelle appartient le système physique– pour cela, un module rudimentaire suffit– pour prédire correctement ses propriétés aux grandes échelles. Les exposants apparaissant dans les lois d'échelle asymptotiques seront les mêmes que ceux du représentant typique de la classe d'universalité (le point fixe associé).

Les méthodes de renormalisation permettent de déterminer si une perturbation du modèle détruit (« perturbation essentielle ») ou ne détruit pas (« perturbation inessentielle ») les prédictions macroscopiques. On peut ainsi prouver la *robustesse* des résultats par rapport aux modifications des détails microscopiques et par là même la *validité du modèle*, puisque ses possibles inexactitudes microscopiques sont sans conséquences à l'échelle de l'observation.

4. Perspectives : la renormalisation en mathématiques

L'irruption de la renormalisation dans un journal de mathématiques est doublement justifiée. D'une part, c'est un bel exemple d'utilisation d'outils mathématiques sophistiqués (analyse spectrale d'opérateurs linéaires fonctionnels, par exemple) pour résoudre des problèmes physiques bien tangibles (transitions de phase, dynamique chaotique, diffusion, physique des polymères, croissance fractale,. . .). D'autre part, les méthodes de renormalisation peuvent être dégagées de leur contexte physique et appliquées à des questions mathématiques.

• Un premier exemple est celui des *méthodes perturbatives singulières*, où la renormalisation offre une autre approche que celle dite « des echelles multiples ». Pour fixer les idées, nous envisagerons le cas de fonctions $f(t)$ dépendant d'une seule variable temporelle t ; la généralisation à plusieurs variables est immédiate. La situation typique est la suivante : étant donnée une certaine équation fonctionnelle dépendant d'un petit paramètre $\epsilon \ll 1$, on cherche à expliciter sa solution $f(\epsilon,\ \theta, t)$, en particulier son comportement asymptotique (temps $t \to \infty$) et la dépendance de ce dernier par rapport au(x) paramètre(s) θ. La solution d'ordre 0 (correspondant à $\epsilon = 3D0$) est supposée connue. La résolution perturbative en ϵ est dite *singulière* lorsque le développement associé

$$f(\epsilon, \theta, t) = 3D \sum_{n=3D0}^{\infty} \epsilon^n f_n(\theta, t) \tag{6}$$

n'est pas uniformément convergent en t et θ, par exemple si $\lim_{t\to\infty} f_n(\theta, t) = 3D\infty$. La *méthode des échelles multiples*[1] consiste à découpler les dépendances temporelles d'échelles caractéristiques différentes, ce qui permet de contourner le problème des divergences séculaires. La solution est cherchée sous la forme

$$f(\epsilon, \theta, t) = 3D \sum_{n=3D0}^{\infty} \epsilon^n F_n(\theta, t_0, t_1,\ \ldots, t_k\rangle \tag{7}$$

où $t_0 = 3Dt, t_1 = 3D\epsilon t, \ldots, t_k = 3D\epsilon^k t$ sont considérées comme $k + 1$ variables *indépendantes*. L'approche par renormalisation consiste au contraire à « absorber la contribution

1. A.H. Nayfeh, Perturbation methods, Wiley, New York (1973).

divergente »de la série dans une transformation du (ou des) paramètre(s) θ :

$$f(\epsilon, \theta, t) = 3Dg[\epsilon,\ \Theta(\epsilon, \theta,\ t),\ t] \tag{8}$$

Le *paramètre renormalisé* $\tilde{\theta}(\epsilon, \theta,\ t)$ est construit de façon à ce que $g(\epsilon,\ \Theta,\ t)$ admette un développement en puissances de ϵ *uniformément convergent par rapport à* Θ *et à* t. Cette approche permet par exemple de déterminer le comportement aux grandes échelles spatiotemporelles des solutions d'équations aux dérivées partielles dépendant de façon singulière d'un petit paramètre ϵ [3].

• La renormalisation des processus de Markov [4] montre l'équivalence asymptotique (aux grandes échelles temporelles) des marches aléatoires browniennes et des processus de Wiener. On peut montrer [2] par cette méthode qu'une mémoire fine (la distribution d'un pas dépendant de la réalisation des k pas précédents, $1 < k < \infty$) et qu'un « faible désordre »(probabilités de transition aléatoires, variant à chaque pas de temps) ne détruisent pas la diffusion normale $< X^2(t) >\sim Dt$ (pour $t \to \infty$).

On peut aussi déterminer la loi de diffusion $< X^2(t) >\sim Dt^{2\nu}$ asymptotique de processus non-Markoviens (marches aléatoires auto-évitantes [3]) et calculer son exposant $\nu \neq 1/2$.

Enfin, la renormalisation met naturellement en évidence le caractère *auto-similaire* des lois stables et des processus browniens fractals ; ceux-ci sont en effet des points fixes d'une transformation de renormalisation adéquate. Cette propriété peut être exploitée pour dégager, par renormalisations successives, la partie asymptotiquement auto-similaire d'une évolution stochastique [4].

• Dans le contexte des équations aux dérivées partielles stochastiques, la renormalisation permet [4] de tester la stabilité structurelle d'une équation aux dérivées partielles *déterministe* par rapport à une perturbation stochastique additive. En revenant dans le cadre physique, ce « bruit »modélise 1'influence des degrés de liberté microscopiques non pris en compte explicitement dans le modèle. On justifie ainsi la capacité de l'équation déterministe à représenter la réalité physique telle qu'elle est perçue à notre échelle.

• Un problème ouvert est de clarifier le lien entre la renormalisation et 1'*analyse non standard* [5]. Cette dernière est susceptible de fournir un langage particulièrement adapté à la mise en oeuvre de méthodes de renormalisation. Il serait très certainement fructueux de considérer des transformations de renormalisation dépendant de facteurs d'échelle non standard. Inversement, certaines notions de base de l'analyse non standard peuvent être formulées en termes de transformations de renormalisation. Par exemple, 1'étude des singularités locales d'une fonction f fait appel à l'opérateur de renormalisation fonctionnel $R_{\alpha,x_0,\epsilon}$ défini par

$$[R_{\alpha,x0,\epsilon}f](x) = 3Df(x_0) + \frac{f[x_0 + \epsilon(x - x_0)] - f(x_0)}{\epsilon^\alpha}(\epsilon \text{ infiniment petit}) \tag{9}$$

On a bien sûr la loi de groupe $R_{\alpha,x_0,\epsilon_1}R_{\alpha,x_0,\epsilon\text{a}} = 3DR_{\alpha,x_O,\epsilon_1\epsilon 2}$ pour tout couple $(\epsilon_1,\ \epsilon_1)$

2. J. Bricmont et A. Kupiainen, Rigorous renormalization-group and disordered systems, Physica A, **163**, 31-37 (1990). Renormalization group for diffusion in a random medium, Phys. Rev. Lett., **66**, 1689-1692 (1991).

3. P-G. De Genmes, Scaling concepts in polymer physics. 2ème édition. Cornell Univ. Press, Ithaca (1984).

4. Voir par exemple D. Forster, D.R. Nelson et M.J. Stephen, Large-distance properties of a randomly stirred fluid, Phys. Rev. A **16**, 732-749, (1977) ou l'appendice 5D de [4].

5. F. Diener et G. Reeb, Analyse Non Standard, Hermann, Paris (1989). A. Lesne, Renornalization-group insights in nonstandard analysis (and reciprocally), preprint (1998).

de nombres infiniment petits (donc non standard). La transformation $R_{\alpha,xo,\epsilon}$ agit sur f comme une loupe *parfairement locale* puisque son champ de vision est réduit au halo de x_0. Rappelons que le halo de x_0 est l'ensemble $\{x_0 + \epsilon\}$ où ϵ décrit l'ensemble des nombres infiniment petits (donc non standard) ; le seul élément standard du halo de x_0 est x_0. L'approche se généralise aux mesures fractales [6], où le caractère local de $R_{\alpha,x_0,\epsilon}$, apporte une précieuse simplification technique. En effet, les halos de points différents étant disjoints, il n'y a plus à se soucier du « recollement »des opérateurs $(R_{\alpha,x0,\epsilon})_{x0}$; on construit ainsi une transformation d'échelle « ponctuelle »qui permet d'élargir considèrablement la notion d'auto-similarité d'une fonction ou d'une mesure.

5. Conclusions

Les méthodes de renormalisation apparaissent comme un outil rigoureux et néanmoins constructif pour étudier des phénomènes s'étendant sur une *large gamme d'échelles* (d'espace et/ou de temps), à utiliser lorsque les méthodes usuelles fondées sur la séparation des échelles échouent. Cet échec reflète l'existence de couplages entre les échelles, conduisant à des *lois d'échelle* dès qu'ils sont « homogènes le long de l'axe des échelles », c'est-à-dire lorsque le lien entre l'échelle a et l'écheUe ka dépend de k mais non de a. On parle alors *d'auto-simitarité*. Bien que leur champ d'application soit très large, les méthodes de renormalisation sont fondées sur les mêmes principes (décimations ou coupures, prise en compte des degrés de liberté éliminés dans des paramètres effectifs, changements d'échelle) et leur mise en oeuvre suit les mêmes étapes (construction de l'opérateur de renormalisation, analyse du flot de renormalisation dans un espace de modèles, si possible paramétré).

Le choix délibéré d'abandonner la description des détails « microscopiques »rend possible une vision globale du système, centrée sur la description des phénomènes coopératifs et des liens entre les différentes échelles présentes dans le problème. Les résultats sont non seulement qualitatifs (*preuve* de l'existence de comportements auto-similaíres décrits par des lois d'échelle) mais aussi *quantitatifs* (valeur des exposants et expression des fonctions universelles intervenant dans ces lois d'échelle). Ils sont surtout *robustes* puisqu'ils sont identiques pour tous les modèles d'une même classe d'universalité ; ils ne sont donc pas invalidés par la possible méconnaissance du système aux petites échelles. En ce sens, les méthodes de renormalisation permettent de dépasser les limitations expérimentales et la « subjectivité »des théories physiques. A ce titre, elles marquent un tournant de la physique théorique.

Bibliographie

[1] Laurie M. Brown, *Renormalization, from Lofentz to Landau (and beyond)*, Springer, BerLin (1993).

[2] Michael E. Fisher, *The renormalization-group and the theory of critical behavior*, Rev. Mod. Phys. 46, 597-616, (1974).

Renormalization group theory : its basis and formulation in statistical physics , Rev. Mod. Phys. 70, 653-681, (1998).

[3] Nigel Goldenfeld, *Lectures on phase transitions and the renormalization-group*, Series Frontiers in Physics, vol. 85, Addison-Wesley, Reading (1992).

6. B. Mandelbrot et C.J.G. Evertz, Exactly self-similar left-sided multifractals. Dans « Fractals and disordered systems », édité par A. Bunde et S. Havlin, Springer, Berlin (1991). Voir aussi [4], 7.2.

[4] Annick Lesne, *Méthodes de renormalisation*, Eyrolles, Paris (1995).

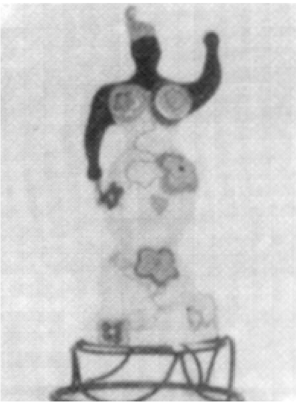
[5] Annick Lesne, *A comparative introduction to the renormalization methods used in statistical mechanics and for dynamical systems ; Renormalization : a few words to avoid confusion*,

Actes du congrès Workshop on renormalization in mathematics and physics, organisé par European Women in Mathematics et Femmes et Mathématiques. Paris, IHP, 14-15 Juin 1996.

[6] Gérard Toulouse et Pierre Pfeuty, *Introduction au groupe de renormalisation*, Presses Universitaires de Grenoble (1974).

Laboratoire de Physique Théorique des Liquides
Université Pierre et Marie Curie
Case courrier 121, 4 Place Jussieu, 75252 Paris Cedex 05,France.
lesne@lptl.jussieu.fr

à propos de femmes



		Niki de St Phalle Nana with Golden turt 1986 Women's art magazine Sept/oct 1993
	Eileen Cooper Woman with birds 1989 Women's art magazine jan/feb 1992	
		Claude Cahun Autoportrait 1929 Women's art magazine sept/oct 1995

Biographies de femmes mathématiciennes en classe de seconde

Anne-Marie Farrenq

Introduction

Ceci est le compte rendu d'un travail mené, de septembre 1996 à mai 1997, avec une classe de seconde au lycée Guillaume Apollinaire de Thiais (94) où j'enseigne les mathématiques Je tiens à remercier chaleureusement Colette Guillopé, présidente de l'association « *femmes et mathématiques* » et professeur à l'Université de Créteil, et Nicole Berline, professeur à l'Ecole Polytechnique pour l'aide et les encouragements qu'elles m'ont apportés. Je suis adhérente à l'association et je considère ce compte rendu comme une contribution à la vie de notre association qui est bien « un lieu de rencontre entre mathématiciennes et enseignantes de mathématiques »

Femmes mathématiciennes dans l'histoire

C'est le thème de travail proposé par le professeur de mathématiques dès la prise de contact avec la classe de seconde 4, en septembre 1996.

Objectifs

Les objectifs du professeur sont d'ordre pédagogique :

- Sensibiliser une classe de seconde dite indifférenciée, trilingue, composée essentiellement de filles, (et où trois garçons, dès le début de l'année, semblaient avoir du mal à trouver leur place), à l'apport des femmes dans une discipline majoritairement mal accueillie par la classe, et où on s'attend peu à y trouver des femmes.
- Associer la diversité des langues étudiées par les élèves à la diversité des nationalités des mathématiciennes retenues.
- Faire découvrir des destins de femmes qui n'ont pu réaliser leur oeuvre mathématique que dans l'adversité, sensibiliser la curiosité sur les biographies, le niveau des connaissances en mathématiques en classe de seconde ne permet pas de développer les découvertes de ces mathématiciennes.
- Travailler en interdisciplinarité avec les collègues de lettres, d'histoire et de langues intervenant comme moi-même dans la classe.
- Utiliser les ressources du Centre de Documentation et d'Information de l'établissement ainsi que les compétences des documentalistes pour guider le travail de recherche des élèves.
- Apprendre à travailler en groupe pour les recherches, et faire, ensuite, et enfin, découvrir **l'effort individuel de synthèse et de rédaction** pour un devoir en fin de parcours, qui sera évalué comme les autres devoirs de mathématiques.
- Contribuer à l'enrichissement culturel de chacun par les mathématiques, en écartant à priori les questions de réussite et d'échec en mathématiques, la classe de seconde étant, comme chacun ne peut l'ignorer, une classe de sélection où les mathématiques jouent un rôle incontestable.
- Faire réfléchir tous les partenaires de cette expérience sur les évolutions d'aujourd'hui, et le rôle de l'école publique dans ce domaine.

Etapes de cette aventure de septembre 1996 à mai 1997

1 - En septembre et octobre 1996

- L'intérêt de la classe étant immédiat, nous utilisons en septembre et octobre 1996, quelques séquences des modules pour investir, par groupes, le C. D. I du lycée.
- Les garçons se regroupent et perturbent, nécessitant l'intervention de la documentaliste, puis on mixte les groupes.
- Première découverte intéressante : le **CD ROM UNIVERSALIS** dont est équipé notre C.D.I ne connaît que les « mathématiciens » et **ignore les « mathématiciennes » !** La curiosité s'aiguise, et les élèves recherchent et découvrent alors dans la bibliothèque les ouvrages suivants : Dictionnaire de femmes célèbres , Encyclopédie Larousse, Encyclopédie Robert qui citent les noms suivants :

HYPATIA, MARIA-GAETANA AGNESI, SOPHIE GERMAIN, EMMY NOETHER, SONIA KOVALEWSKAIA, et ADA BYRON.

A cette étape, le travail des élèves, par groupe de module, consiste à prendre des notes de lectures puis à les archiver dans leur classeur de mathématiques

2- En novembre et décembre 1996, le professeur demande une aide pour la suite à donner :

- au proviseur adjoint, qui se montre favorable, avec l'accord des documentalistes, à l'organisation au C.D.I d'une exposition sur ce thème , avec six panneaux , un par mathématicienne, en y ajoutant un septième comportant une étude statistique faite par le professeur, sur la différenciation filles-garçons dans toutes les sections du lycée, scientifiques et non-scientifiques , l'exposition occupant le CDI durant les deux dernières semaines avant les vacances de printemps. Il est prévu que l'exposition soit annoncée dans le « journal des élèves » et la « lettre d'information du proviseur » ,
- à l'association « Femmes et Mathématiques » pour solliciter, d'une part des documents complémentaires à ceux du CDI (revues « Tangente » , « Quadrature » , « Pour la science » , ouvrage de l'IREM de Besançon, livre de Jacqueline Detraz sur Sonia Kowalevskala, livre sur Ada Byron), et d'autre part la venue d'une conférencière, Nicole Berline, mathématicienne et professeur à l'école Polytechnique, durant l'exposition, avec visite et rencontre avec la classe.

4 - En janvier et février 1997
On forme, sur la base du volontariat, six groupes de travail, un groupe par mathématicienne, que les élèves surnomment « fan-club » , chaque groupe ayant en charge :

- de regrouper les notes prises au CDI en septembre et octobre , comme à partir de la lecture des ouvrages proposés par « femmes et mathématiques » (ils ont été depuis acquis par le CDI),
- d'en faire une sélection,

a d'en assurer la reprographie prise en charge par l'établissement,

- de confectionner les panneaux pour l'exposition,
- et de garder individuellement ces notes, en vue d'un devoir personnel qui comptera dans la moyenne des résultats de chacun au troisième trimestre.

5 - Réalisation de l'exposition au CDI du lundi 17 mars au samedi 27 mus et la venue de Nicole Berline le jeudi 20 mars 1997

Un seul panneau a été oublié ! Une élève bien insouciante, qui s'était chargée de la reprographie des documents, a fait disparaître Sophie Germain aux yeux des visiteurs du CDI, provoquant la colère des autres élèves de ce groupe, qui ont recorrunencer les recherches pour réaliser le devoir réaliser pour le mois de mai !

Des professeurs de lettres, de sciences physiques et d'histoire sont venus visiter l'exposition avec leurs classes, mes collègues de mathématiques se montrant quelque peu indifférents. Nicole Berline, professeur l'école Polytechnique a passionné le jeudi 20 mars, durant deux heures, la plus grande partie de la classe, ainsi que moi-même et ma collègue Khamsa Khérief, aussi bien par ses motivations, son travail de recherche, que par son histoire personnelle ; elle a très simplement répondu toutes les questions des élèves. A partir de leurs connaissances sur les nombres multiples, elle a donné une approche de la structure d'anneau noethérien, dont l'introduction est due la mathématicienne Emmy Noether. J'ai demandé la classe de bien vouloir prendre des notes sur son intervention, pour la réalisation du devoir rendre au mois de mai , mais peu d'élèves, mon grand regret, ont suivi mes conseils.

6 - En avril et mai 1997 : après consultation de mes collègues littéraires et historiens sur le sujet et sur l'évaluation, préparation du devoir sur cette activité peu commune aux dires des élèves, â rendre le 15 mai ; en voici l'énoncé :

- « A partir des documents qui vous ont été proposés sur le thème des « femmes mathématiciennes dans l'histoire » , expliquer comment vous avez fait vos choix. »
- « A partir de vos choix , faire la présentation de la vie et l'ceuvre de la mathématicienne que vous avez choisie. »
- « Qu'avez-vous retenu des propos de Nicole Berline, professeur de mathématiques l'école Polytechnique et mathématicienne contemporaine, lors de la conférence du jeudi 20 mars 1997 ? »

L'ensemble de ces devoirs est inégal ; j'ai noté ce travail entre 8 et 17 sur 20. Quelques un(e)s des élèves n'ont rien rendu , et d'autres se sont contenté(e)s de rendre , sous dossier plastifié , les documents qui leur avaient été donnés ! (ma collègue de lettres se plaignant de la même caractéristique de la classe dès qu'il s'agit de travaux faisant appel â la réflexion personnelle).

J'ai , par contre, trouvé dans certains devoirs, même si ils étaient mal construits, des réflexions pertinentes, dont les plus courantes sont les suivantes :

- le destin de ces femmes est tragique
- leur opiniâtreté est impressionnante
- on découvre l'effort individuel pour réussir !
- ces femmes sont toutes « d'origine bourgeoise »
- l'école est absente dans leur itinéraire
- on sait maintenant la différence entre un professeur qui répète toute sa carrière les mathématiques qu'il a étudiées et un mathématicien qui crée des mathématiques on cherche toujours à faire disparaître (certains ont dit « voler »), les découvertes mathématiques des mathématiciennes
- les filles réussissent mieux que les garçons

- ce travail nous a permis de découvrir « d'autres mathématiques que celles qu'on nous inculque à l'école »

Conclusion

J'en ai appris autant que mes élèves, et l'avenir me dira si mes objectifs sont atteints.
Cette aventure mérite d'être diffusée en espérant que d'autres auront de meilleures idées que moi.
Dans ce but, je me propose d'adresser un exemplaire de mon modeste compte-rendu au bureau des IPR de mathématiques de l'académie de Créteil, qui publie un polycopié intitulé « modulo » diffusé auprès de tous les professeurs de mathématiques de l'académie de Créteil, et par correction j'adresse un exemplaire au proviseur adjoint de mon établissement qui m'a facilité la tâche et qui a rencontré Nicole Berline le 20 mars lors de sa venue au Lycée Guillaume Apollinaire.

Anne-Marie Farrenq
1 place du moutier
94800 Villejuif
juillet 1997

MATh en JEANS

	M	éthode
d'	**A**	pprentissage
des	**Th**	éories mathématiques
	en	
	J	umelant
des	**E**	tablissements
pour une	**A**	pproche
	N	ouvelle
du	**S**	avoir

Annick Boisseau

L'idée

Offrir à des élèves de collège, de lycée et parfois de primaire ou du supérieur, la possibilité de "faire des mathématiques autrement", en les mettant en situation de recherche et ceci en relation avec des mathématicien-ne-s et des jeunes d'autres établissements. Etablir un lien entre le monde de l'école et celui de la recherche.

Le principe

Jumelage de deux établissements de niveau équivalent (en général) : dans chacun d'eux, des élèves volontaires travaillent en groupes durant toute l'année scolaire, à raison de deux heures par semaine, sur les mêmes sujets proposés par un chercheur.

Les temps forts sont :

- Les séminaires (3 ou 4 par an), au cours desquels élèves et professeurs des deux établissements se réunissent avec le chercheur pour faire le point, comparer les démarches et les résultats, trouver de nouvelles pistes...
- Le congrès, qui rassemble tous les participants à MATh en JEANS venant des établissements de toute la France, et parfois de l'étranger, ainsi que des mathématiciennes et des personnalités du monde scientifique. Pour chaque sujet, les élèves communiquent leurs travaux et résultats par un exposé devant un public composé de collégien-ne-s et de lycéen-ne-s, mais aussi d'observateurs variés. Entre les exposés des élèves, s'intercalent quelques conférences de professionnels. D'autre part, les élèves réalisent des panneaux ayant trait à leur recherche et présentés lors d'un forum : lieu d'échanges et de rencontres. Le congrès est l'occasion de nombreux débats entre jeunes, mais aussi avec les chercheurs présents.
- La rédaction des actes. Etape délicate pour les élèves car d'une part le congrès leur semble un aboutissement, d'autre part le travail de synthèse et d'écriture ne leur est pas spontané, et intervient en fin d'année scolaire. Etape motivante, néanmoins, due à l'attrait d'un article personnel dans une brochure.

Le fonctionnement

La mise en oeuvre d'un jumelage nécessite la volonté de plusieurs acteurs, à commencer par celle d'un-e ou deux enseignant-e-s dans un établissement. Ils peuvent trouver eux-mêmes leurs partenaires ou faire appel à l'association MATh en JEANS.
Il arrive qu'un établissement se retrouve sans 'jumeau' : il manque alors une part importante des échanges entre élèves.
Le démarrage d'une telle expérience dans un établissement peut se heurter à une certaine réticence de la part des collègues ou de l'administration. L'organisation concrète présente souvent quelques difficultés : information des élèves, horaires... Dans certains établissements, MATh en JEANS est reconnu comme atelier scientifique, d'où l'attribution d'heures supplémentaires et de crédits (variables selon les académies), d'autres ne disposent d'aucune subvention.
Au moment de la mise en route, motiver les élèves est un élément déterminant. Il s'agit, au départ, de convaincre des élèves 'volontaires' de venir régulièrement, pour faire des mathématiques, en plus de leur emploi du temps déjà chargé et souvent mal équilibré dans la semaine.

Comment se déterminent les élèves ?

On observe que :

1). quelques élèves peuvent être issus des classes dont le ou les professeur(s) animant MATh en JEANS ont la charge ;

2). les motivations sont difficiles à cerner et sont assez variées. En voici quelques unes :

- l'intérêt pour les mathématiques,
- accompagner un ou une camarade,
- chercher à résoudre ses propres difficultés,
- faire une activité avec un professeur ou simplement un adulte,
- le désir de partager la recherche avec d'autres élèves, en particulier ceux de l'établissement jumelé,
- l'envie de rencontrer un mathématicien, une mathématicienne ;
- les élèves qui s'engagent à MATh en JEANS ne sont pas nécessairement les meilleurs en mathématiques. Ce qui les caractérise est la curiosité d'esprit ; le moment le plus délicat se situe en début d'année, lorsque le sujet n'est pas encore cerné ; une fois qu'ils ont effectivement commencé cette activité, les élèves la poursuivent jusqu'en fin d'année.

Dans les lycées, on trouve une moyenne de 10 à 12 élèves par établissement, ce qui est très peu par rapport à un effectif total moyen de 1300.
Au collège, les participants sont souvent plus nombreux. Comment expliquer ce phénomène ?

- par un choix poussé par les parents ?
- cette activité est-elle considérée comme plus valorisante ?
- par une image des mathématiques moins négative à ce niveau ?
- les collégien-ne-s disposent-ils de plus de temps ?
- par le fait que les élèves de collège n'ayant pas encore été contraints d'effectuer un choix d'orientation sont plus ouverts ?

Parmi les lycéens, les différents niveaux sont représentés, avec en Première et Terminale, une majorité d'élèves des classes scientifiques : environ les 2/3 des lycéens.

Répartition des établissements et des élèves

Depuis les débuts de MATh en JEANS en 1989, il est très difficile de recueillir des données précises et complètes, il n'a donc pas été fait de statistiques, et a fortiori, on ne dispose que d'informations parcellaires sur les établissements : leur nombre exact, leur nature ; sur les élèves : leur classe, leurs motivations ; sur la proportion de filles et de garçons : leur répartition dans les groupes, leur choix de sujet...
Les seules données disponibles sont celles contenues dans les actes édités chaque année. Ils contiennent les articles produits par les différents groupes, précédés d'une liste des participants (élèves, professeurs, chercheurs), ainsi que le compte rendu des conférences de professiormels et des informations plus générales. Cette étude s'appuie sur les actes publiés jusqu'à 1996.

Plusieurs questions se posent pour l'exploitation de ces documents :

- les listes sont-elles constituées de tous les acteurs du groupe ou seulement de ceux ayant participé au congrès ?
- certains groupes ont participé au congrès mais n'ont pas fait parvenir d'article, donc pas de liste d'élèves ;
- dans quelques cas, on parle d'un groupe de tant d'élèves et de tel établissement, sans autre précision ;
- certains jumelages n'ayant pas participé au congrès ne sont pas présents dans les actes ;
- la classe et l'établissement ne sont pas toujours indiqués, pour les élèves d'un même groupe ;
- la connaissance des prénoms ne permet pas toujours la distinction fille/garçon.

Une vingtaine d'établissements du secondaire participe chaque année à cette activité, dont certains, depuis le début.
Jusqu'à 1997, les lycées sont largement majoritaires dans cette action, entre 10 et 15 selon les années ; viennent ensuite les collèges, entre 2 et 5. La situation semble s'inverser en 1997-98. Les écoles primaires interviennent de façon plus épisodique : 2 en tout. L'enseignement supérieur est régulièrement représenté depuis 1993-94 par des groupes d'étudiants en DEUG ou en DEA, et l'a été auparavant par quelques élèves de Math Sup. Géographiquement, la région parisienne est chaque année sur-représentée, mais de façon variable. La proportion d'établissements de province varie de 10 à 40%. Par contre, les deux universités engagées sont basées a Marseille et à Grenoble.
Des tentatives d'ouverture de MATh en JEANS vers des pays européens, ont amené quelques établissements danois et belge à participer à certains congrès.

Où sont les femmes ?

Une timide référence aux filles se trouve dans un document de présentation de MATh en JEANS : "Les professeurs assurent l'encadrement pédagogique, la promotion de MATh en JEANS dans leurs établissements (particulièrement en direction des filles), l'accès à la documentation, ils assurent la corrélation avec les mathématiques scolaires, gèrent le nouveau contrat didactique et facilitent l'expression écrite (dont le rôle de mémoire est capital)".
Cette activité s'adresse à toutes et à tous les élèves sans distinction de niveau ou de section, et pourtant : si on considère l'année 1995-96 par exemple, les filles représentaient environ

38% des élèves participant d MATh en JEANS, soit nettement moins que la proportion de filles au lycée (environ 53%) et moins aussi que celle des filles en Terminale S (41%).
La même année, parmi les chercheurs encadrant des jumelages, on ne trouvait aucune femme. L'une des trois conférences de professionnels au congrès qui s'est déroulé au CNRS en mars 1996, a été faite par une mathématicienne : Maria J. Esteban.
Seules les enseignantes étaient à parité, ce qui reflète la proportion des femmes parmi les professeurs de mathématiques dans le secondaire.

Plus généralement, depuis le début de MATh en JEANS et jusqu'à 1995-96, la proportion des filles a varié entre 27% et 45%, celle des enseignantes entre 31% et 50%, quant à. celle des chercheuses, entre 0% et 20%.
Dans les années précédentes, trois mathématiciennes ont encadré des jumelages : Catherine Goldstein, Michèle Vergne et Jacqueline Zizi. Au congrès de mars 1997 à l'université de Villetaneuse, sur les trois conférences de professionnels, deux ont été présentées par des fe=es : Laure Quivy et Marie-Claude Viano.
A l'intérieur des groupes d'élèves, on trouve toutes les répartitions possibles, que ce soit en nombre : de 1 à 15, en comptant ensemble les élèves d'un même groupe venant des deux établissements, ou par sexe : depuis les groupes non mixtes, jusqu'à une répartition équilibrée.

Lors d'un congrès, après une conférence de mathématicien sur le métier de chercheur, une question a été posée dans la salle : "Vous avez parlé des chercheurs au masculin et je voulais savoir si c'était un monde exclusivement masculin ou s'il y avait aussi des femmes qui cherchaient".
La réponse commence ainsi : " Il y a dans la salle une chercheuse qui est infiniment plus connue et importante que moi (...). Il n'y a pas de machisme du milieu. Mais..." et là, tout se gâte et peut se résumer par : les filles sont meilleures au niveau élémentaire, mais moins bonnes dans le supérieur, quand les choses deviennent sérieuses, d'ailleurs les statistiques le prouvent.
La note de la rédaction suivant ce texte est plutôt rassurante : elle donne une autre interprétation des statistiques et conclut sur la nécessité d'éduquer parents et enseignants, tout en faisant référence à l'associationfemmes *et mathématiques.*

Sur le plan mathématique

Les thèmes d'études proposés par les chercheurs sont très variés : sujets sur l'histoire des mathématiques ou sur des questions connues, ou au contraire des sujets plus ouverts portant sur des questions mathématiques actuelles. Les différents domaines des mathématiques sont abordés.

Quelques sujets liés à l'histoire des mathématiques : numération, fractions continues, pi, solides platoniciens et formule d'Euler ;
à des situations de modélisation ou de mathématiques appliquées : tracé de courbes à partir d'équations différentielles, boussoles ;
à des questions récentes : coloriage, pavage du tore, tresses, nombres p-adiques, géométrie discrète, graphes ;
aux nouvelles technologies : pixels, automates finis ;
en vrac : empilements de sphères, pavages, brenoms, découpages de solides, stratégies de jeux, maths et musique...

Il est clair que les mathématiques produites par les élèves ne constituent pas des avancées. Néanmoins par leur imagination, leur inventivité, il leur arrive d'étonner des chercheurs en utilisant des démarches originales. Un chercheur ayant animé un jumelage conclut : "MATh

en JEANS a été vraiment très agréable pour moi et certains groupes m'ont réellement surpris par leur capacité d'imagination".
La faculté de compréhension par les jeunes de notions qui dépassent largement les programmes scolaires actuels peut surprendre. "L'assimilation de ce qu'est une distance padique a semblé si rapide que les élèves avaient parfois du mal en exposant, à comprendre pourquoi les autres étaient déconcertés" écrit une chercheuse à propos d'un groupe qu'elle a encadré sur ce sujet.

Quels sont les thèmes choisis par les filles ?
D'après Pierre Duchet, l'un des créateurs de MATh en JEANS, les problèmes liés au mouvement et à l'espace intéressent plus les filles.
Au vu des actes, on peut remarquer que les filles choisissent fréquemment des thèmes liés aux nombres, dans leurs différentes dimensions : historique, arithmétique, combinatoire, artistique, comparative... L'introduction de l'article d'un groupe de cinq filles ayant travaillé sur le thème : 'Tous les nombres peuvent-ils s'écrire sous forme de fractions ?' explique leur choix : "Nous aimons manipuler les nombres, et l'étude de leur nature ne se fait malheureusement pas dans l'enseignement secondaire".
Ici encore, généraliser s'avère difficile : on constate la présence de filles plus ou moins nombreuses dans tous les types de sujets.

La manière de s'organiser qu'ont les différents groupes d'élèves pour présenter l'exposé au congrès mérite aussi d'être observée. On y trouve toutes les répartitions possibles. Certains groupes découpent leur exposé en parties à peu près équivalentes en durée et en complexité, de façon à ce que chaque membre puisse en présenter une. Dans d'autres, au contraire, un partage se fait entre les élèves qui parlent et ceux, plus souvent celles, qui, silencieusement, placent les transparents sur le rétroprojecteur et éventuellement montrent ce que dit le ou la camarade.

L'expérience intéresse aussi bien la communauté mathématique que les instances éducatives. Le CNRS en a toujours été partie prenante, en particulier avec les *'Actions Passion-Recherche'* et en accueillant les congrès de 1996 et 1998. En 1992, la SMF a attribué le Prix d'Alembert à MATh en JEANS et à Ivar Ekeland. Depuis ses débuts, MATh en JEANS a participé à différents événements : Science en fête, Congrès Mathématique Junior, Fête des maths (médailles Fields), Entretiens de la Villette et autres colloques. Des actions de formation ou d'information en direction des enseignants ont été réalisées (universités d'été, stages MAFPEN...). L'Inspection de mathématiques reconnaît l'apport d'une telle activité à la formation mathématique des jeunes, sans pour autant avoir les moyens d'intervenir sur le plan financier ou organisationnel.

Il importe de souligner le caractère non sélectif et non compétitif de MATh en JEANS. Ce qui lui confère une position un peu particulière dans la réflexion menée actuellement, à l'initiative de la SMF, sur les clubs, olympiades et autres compétitions mathématiques.

Pour conclure

Le but a été ici de présenter l'activité MATh en JEANS dans ses différents aspects. Mais ce tableau ne serait pas complet si le plaisir n'était pas évoqué.
D'abord le plaisir évident des élèves à se retrouver pour faire des mathématiques et les communiquer. Le sentiment de réaliser quelque chose d'original dans leur établissement, les relations privilégiées entre eux et avec les adultes, l'émotion intense partagée avec le groupe au moment de l'exposé au congrès, en sont quelques éléments.
Pour les professeurs aussi, dont certains pratiquent MATh en JEANS depuis plusieurs années, il est gratifiant d'assister à l'élaboration de démarches et de raisonnements, à la

construction de savoirs mathématiques chez les jeunes qu'ils aident et soutiennent tout au long de l'année. La complicité qui s'établit avec les élèves, liée à une modification des rôles habituels permet des échanges très riches.

Lycée Fragonard, Allée Verte
95560 Montsoult
Mars 1998

Bibliographie

Les Actes des Congrès des années 1991 à 1997 sont disponibles, à l'exception de ceux de 1993 qui sont épuisés, auprès de :

Association MATh en JEANS, c/o Hervé Grac
148, rue de Charonne, 75 011 PARIS
Tél. : 01 43 79 50 31

Quelques observations sur l'évolution récente dans l'enseignement secondaire

Annick Boisseau et Gwenola Madec

La réforme

Elle a été mise en place au niveau Seconde la rentrée 1992 et s'est poursuivie en classe de Première en 1993, puis en Terminale la rentrée 1994. La réforme des classes préparatoires aux grandes écoles est entrée en vigueur la rentrée 1995.
Les anciennes séries C, D, E sont regroupées et forment la série S (Scientifique), les séries Ai, A2, A3 sont réunies pour former la série L (Littéraire) et la série B s'appelle désormais ES (Economique et Sociale).
Dans la voie technologique, les nombreuses et très diverses séries F, G, H sont réparties en STL (Sciences et Teclmiques de Laboratoire), STT (Sciences et Technologies Tertiaires), STI (Sciences et Teclmologies Industrielles), SMS (Sciences Médico-Sociales), auxquelles il faut ajouter les séries Arts appliqués, Hôtellerie, TMD (Technique de la Musique et de la Danse) ainsi que des brevets de techniciens.

En Seconde, en plus des options de langues (vivantes ou anciennes), arts, ... l'élève doit choisir entre SVT (Sciences et Vie de la Terre) et TSA (Technologie des Systèmes Automatisés) : ce qui induit une orientation future vers une série générale ou technologique. La série S de la voie générale est appelée S-SVT, celle de la voie technologique S-TI, elle comspond l'ancienne série E.
Dans l'enseignement général, le choix de certaines options en Première est plus ou moins déterminant selon les séries, pour le choix de la dominante en Terminale appelée 'enseignement de spécialité'. Il l'est donc aussi pour certaines orientations des études supérieures.

On peut remarquer :

1. une absence d'option 'mathématiques' en Première S, alors qu'il existe une option 'sciences expérimentales' ;
2. la possibilité pour les élèves de ES de choisir la spécialité 'mathématiques' en Terminale sans avoir suivi l'option correspondante en Première. Ceci devrait changer avec les nouveaux programmes de l'option et de la spécialité 'mathématiques' en 1997 et 1998 ;
3. au contraire, l'impossibilité en série L, de suivre la spécialité 'mathématiques' en Terminale sans avoir suivi l'option correspondante en Première.

L'un des objectifs de cette réforme était de parvenir un meilleur équilibre entre les différentes séries et en particulier de lutter contre la 'suprématie' des filières scientifiques et une hiérarchisation du prestige des séries.
De fait, comme le souligne le Doyen Paul Attali dans une note adressée aux professeurs de mathématiques des lycées en octobre 1995, « l'analyse de l'évolution des effectifs en Première et Terminale aux rentrées 1993, 1994 et 1995 met en évidence une baisse sensible de la série S, non seulement en nombre d'élèves, mais aussi en pourcentage ; cette baisse est encore accentuée pour l'ancienne série E. »

Répartition des élèves dans les différentes filières

On observe toujours une répartition fortement sexuée des filières, avec des situations extrêmes correspondant à. des métiers considérés comme spécifiquement 'féminins' (96% de filles en SMS) ou 'masculins' (6,6% de filles en STI) et des cas où la réalité est masquée derrière un chiffre global, par exemple en hôtellerie : les filles représentent -42,2% de l'effectif, mais sont diversement réparties selon les options de cette série.

Il semble que la réforme s'accompagne d'une modification de la répartition des filles comme des garçons entre les sections scientifiques et non scientifiques de l'enseignement général. Depuis la réforme, les élèves de Seconde choisissent en plus grand nombre l'option SVT menant aux baccalauréats généraux : +1% pour les filles, +4,4% pour les garçons entre les rentrées 1991 et 1995. Ils étaient ainsi respectivement 94,2% et 76,8%, en 1995-96 avoir fait ce choix.
Sur la même période, on constate dans les sections scientifiques, une évolution plus marquée chez les garçons (baisse de 2,4%) que chez les filles (augmentation de 0,6°A) au niveau Terminale (figure 1). Est-ce une conséquence d'une tentative de diversifier les parcours d'excellence ?

Répartition des filles et des garçons de Terminale dans l'enseignement général

Section	1994-1995		1995-1996	
	F	G	F	G
Ensemble des sections scientifiques	23,2	42,2	23,8	39,8
Ensemble des sections non scientifiques	76,8	57,8	76,2	60,2
Total Terminales	100	100	100	100

Source : Ministère de l'Education Nationale
Figure 1

La baisse des effectifs en séries scientifiques depuis 1992 en Première, est situer dans le contexte de la diminution globale des effectifs, amorcée en 1991 au niveau Première. Elle s'accompagne d'tme baisse de la proportion : les élèves de Terminale S-SVT représentent actuellement environ 42,5% de l'effectif dans l'enseignement général, ceux des Terminales C et D réunies formaient 44°A de l'effectif avant la réforme. On observe aussi une diminution de la proportion d'élèves choisissant la spécialité 'mathématiques' en Terminale scientifique : 37,9% en 1994-95, 35,2% en 1995-96, "ce fléchissement étant de plus très variable selon le profil des établissements" (P. Attali).

Il en est de même pour l'option 'mathématiques' dans les séries non scientifiques L et ES : en section littéraire, la chute est particulièrement brutale : en 1993-94, 48% des élèves de Terminales littéraires étaient en Ai (lettres et mathématiques), alors que 29,8% des élèves de TL ont choisi la spécialité 'mathématiques' en 1995-96 ; en Première ES, 75% des élèves suivaient l'option 'mathématiques' en 1993-94, ils n'étaient plus que 72% en 1995-96. Cette diminution risque de s'amplifier avec la création d'une option 'sciences politiques' en Première ES la rentrée 1996.

Quant l'option 'enseignement scientifique' regroupant les trois disciplines scientifiques, proposée en section ES, elle est en voie de disparition : 19,5% en 1993-94 et 14% en 1995-96 au niveau Première, puis 10% en 1994-95 et 8,5% en 1995-96 au niveau Terminale. Ces phénomènes sont peut-être rapprocher du fait que certains établissements préfèrent fermer une option ou une spécialité, quand elle ne draine pas 'suffisamment' d'élèves.

Différences de perception et de stratégies

On ne dispose pas d'enquête récente équivalente celle de l'opération '50 lycées', qui mettait en évidence, chez les filles et les garçons, une différence de perception de ses propres compétences et capacités, ainsi que des mathématiques. On peut penser que dix ans plus tard ces facteurs continuent jouer.
En tout état de cause, on peut toujours observer des stratégies différentes dans la gestion du travail scolaire et dans les choix : les filles fournissent, en général, un travail plus soutenu dans les disciplines où elles se sentent plus fragiles elles ont tendance sous-estimer leurs capacités et leurs résultats, contrairement aux garçons
elles sont plus nombreuses choisir une, voire plusieurs options facultatives il semblerait qu'elles soient plus nombreuses passer de Première S Terminale L ou ES avec spécialité 'mathématiques'.
Il faut pourtant rappeler que les filles arrivent plus jeunes au baccalauréat et que leur taux de réussite est plus élevé que celui des garçons. Elles sont plus présentes et/ou réussissent mieux que les garçons dans certains secteurs scientifiques comme la biologie, la médecine, la pharmacie.

Evolution de la répartition filles / garçons en section scientifique

La proportion de filles en Terminales scientifiques a atteint un maximum en 1981 où elle était de 46,6%, puis a diminué rapidement pour se stabiliser autour de 40%. Après une chute 35,2% en 1994-95, il semblerait que s'amorce une légère remontée de cette proportion : 44,4% en 1995-96 (figure 2), peut-être soutenue par la réforme ?

Le choix que font les filles de leur spécialité en Terminale scientifique n'est pas toujours celui qui conduit aux filières les plus prestigieuses.
L'évolution en cours fait apparaître des modifications de la répartition des filles selon la spécialité en Terminale S-SVT.

Filles et garçons en Terminales scientifiques

	1994-1995				1995-1996			
Spécialité	Filles	Garçons	Ensemble	% Filles	Filles	Garçons	Ensemble	% Filles
Mathématiques	15805	30139	45944	34,4	15993	23539	39532	40,5
Physique-chimie	5819	23275	29094	45,6	23106	20627	43733	52,8
Sciences et Vie de la Terre	21061	25125	46186	45,6	23106	20627	43733	52,8
Total	42685	78539	121224	35,2	49833	62516	112349	44,4

Source : Ministère de l'Education Nationale
Figure 2

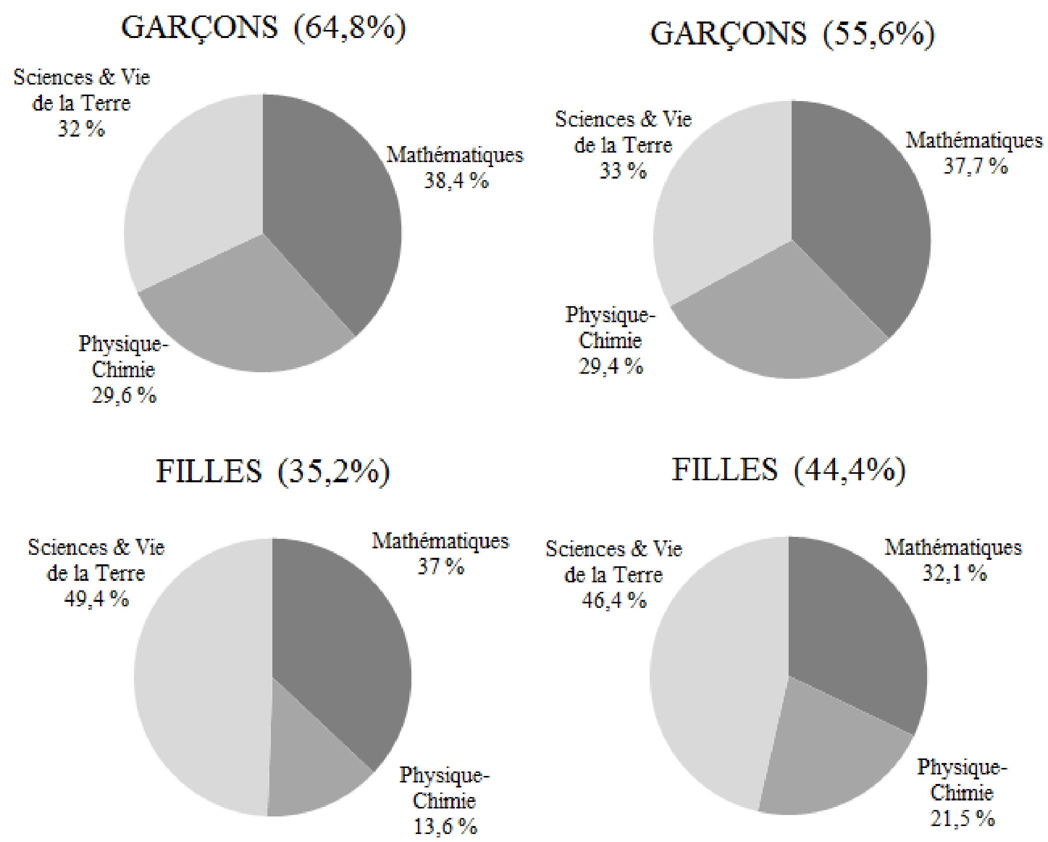
Remarque : les données de ce tableau, ainsi que les graphiques suivants qui en sont extraits, portent uniquement sur les effectifs de l'enseignement public.

Avant la réforme, la répartition des filles entre les sections C et D avait évolué au profit de la section C, passant de 30,5% en 1981 à 41% en 1994, contre 69,5% et 59% en D. Dans la mesure où la comparaison avec la série D a un sens, on constate que les filles n'étaient que 49,3% en 1994-95, puis 46,4% en 1995-96 à choisir la spécialité 'SVT' (figure 3).

De plus, sur ces deux années, la diminution du choix par les filles, des spécialités 'SVT' et surtout 'mathématiques' (baisse de 5%) s'est faite au profit de la spécialité 'physique-chimie' où leur nombre a presque doublé (figures 2 et 3). Au contraire, la répartition des garçons selon la spécialité est restée stable sur ces deux années, avec toutefois un très léger glissement vers 'SVT'(fig.3).

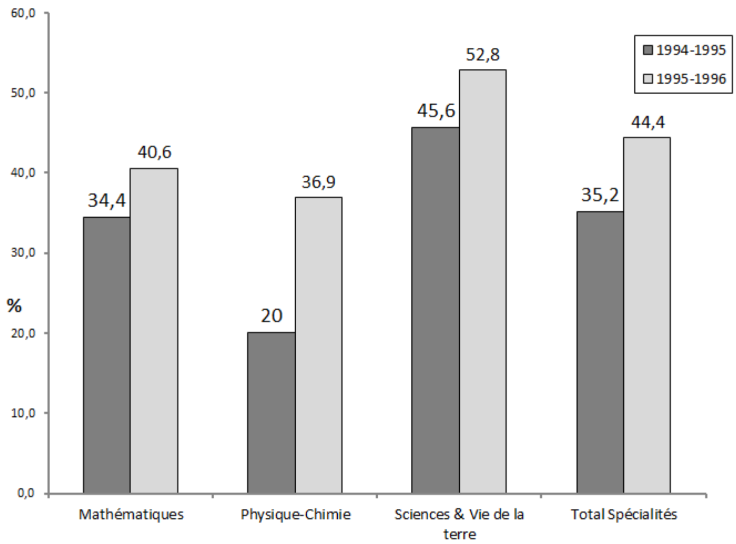
Répartition des filles et des garçons par spécialité (fig.3)

Année scolaire 1994-1995 **Année scolaire 1995-1996**



Répartition des filles et des garçons
par spécialité (fig.3)

Si on considère la répartition filles/garçons dans chaque spécialité en Terminale scientifique, la proportion de filles a augmenté de façon significative entre les deux années 94-95 et 95-96 ; cela est dû a une diminution importante du nombre de garçons de 16 023 soit une baisse de 20%, alors que le nombre de filles a augmenté de 7 148 soit 17% de hausse (figure 4).



Pourcentage de filles dans chaque spécialité
Figure 4

Pour conclure

Il est trop tôt pour tirer des conséquences de cette réforme : l'observation sur deux années, si elle peut indiquer des tendances, ne permet pas d'en déduire une quelconque évolution future.

Dans les classes préparatoires aux grandes écoles scientifiques, sur la période 1981-1995, l'augmentation de la proportion de filles en première année a été particulièrement forte en Biologie (+22%), passant de 34,4% a 56,4%, ou Vétérinaire (+25,6%), passant de 35,1% à 60,7%. Elle a été significative en MP (+6,4%), passant de 16,7% à 23,1%. Cette évolution ne se re-trouve pas en deuxième année dans la section M' où l'augmentation n'est que de 0,4%, par contre en P', l'augmentation a été de 10,7%. L'ordre s'est inversé entre les sections M' et P' : en 1981, les filles représentaient 16,9% de l'effectif de M' et 13,8% de celui de P', en 1995 les proportions étaient devenues 17,3% en M' et 23,1% en P'.

De nouveau, les comparaisons s'avèrent difficiles après la mise en place de la réforme des classes préparatoires en 1995-96. Comment interpréter, en effet, les 24,7% de filles en MPSI ou 24% en PCSI ?
On peut toutefois noter un point positif : la proportion de filles en première année de classes préparatoires scientifiques a augmenté de 1% entre 1994-95 et 1995-96, mais pour atteindre seulement 27,3%.

Quelle sera l'évolution du parcours des filles au lycée, dans ces nouvelles classes préparatoires scientifiques. et au-dela ?

On ne peut que rester prudentes dans l'analyse et l'interprétation des variations en cours et de la redistribution qui semble s'amorcer autour des deux maillons du système éducatif que sont le cycle terminal du lycée et l'année post-bac.
L'évolution de la répartition des filles et des garçons entre les filières scientifiques et non scientifiques d'une part, autour des trois spécialités de la série S d'autre part, s'oriente-t-elle vers un rééquilibrage ?

Pour l'instant, l'un des effets de la réforme est une diminution de l'impact des mathématiques au lycée.

Annick Boisseau et *Gwenola Madec*
Lycée Fragonard
95290 L'Isle-Adam

Institut Galilée
Université de Paris-Nord
93430 Villetaneuse

RUBRIQUE BIBLIOGRAPHIQUE

Raphaelle Supper

La bibliographie qui a fait l'objet du supplément au numéro 1 de cette revue (paru en octobre 1996) continue s'étoffer... les références ci-dessous représentent un échantillon des nouveaux titres collectés depuis. Si vous en connaissez d'autres, n'hésitez pas à me les communiquer.

1. Biographies. Histoire

- André DELEDICQ et Dominique IZOARD, *Histoire de maths,* ACL — Les Editions du Kangourou, 1998.
- Kamil FADEL, *Les femmes et le noyau atomique,* Revue du Palais de la Découverte, décembre 1998, Vol.27 n°263, 49-52.
- Bertrand HAUCHECORNE et Daniel SURATTEAU, *Des mathématiciens de A à Z,* Ellipses, 1996.
- Michelle PERROT, *Les femmes ou les silences de l'histoire,* Flammarion, 1998.
- Patricia ROTHMANN, *Women in the history of mathematics from antiquity to the nineteenth century,* 1997, London Univ. College, London.

HYPATIA (v. 370-415)

- Margaret ALIC, *Women and Technology in ancient Alexandria : Maria and Hypatia,* Women's Studies Int. Quart., Vol.4 (1981), 305-312.
- L. CAMERON, *Isidore of Miletus and Hypatia of Alexandria,* On the Editing of Mathematical Texts, Greek, Roman and Byzantine Studies 31 (1990), 103-127.
- Nancy NIETUPSKI, *Hypatia of Alexandria, Mathematician, Astronomer and Philosopher,* ALEXANDRIA, The Journal of Cosmology, Philosophy, Myth and Culture (edited by David FIDELER), n°2, 1993.
- Kari VOGT, *The rightfull Mistress of Philosophy : Hypatia from Alexandria* (370-415), 9-23, in Kari VOGT (Ed.) : *The hidden Tradition : creative Women in the History of Civilization,* Norway, Sigma, 1982.
- *http ://turnbull.dcs.st-and.ac.uk/history/References/Hypatia. html*
- *http ://cosmopolis.com/people/hypatia.html*

Emilie du CHATELET (1706-1749)

- Camille AUBAUD, *Lire les femmes de lettres,* Dunod, Paris, 1993.
- Olivier COURCELLE, *Clairaut la Comète,* Quadrature, Magazine de mathématiques pures et appliquées, n°27, 15-20, janvier-février-mars 1997.
- R. DEBEVER, *La Marquise du Châtelet traduit et commente les Principia de Newton,* Acad. Roy . Bel. Cl. Sci. (5) 73, n°12, 509-527, 1987.
- Linda Gardiner JANIK, *Searching for the Metaphysics of Science : the Structure and Composition of Madame du Châtelet 's « Institutions de physique »*1737-1740, Stud. Voltaire 18^{th} century, 85-116, 1982.

- Keiko KAWASHIMA, *La participation de Madame du Châtelet la querelle sur les forces vives,* Historia Sci., n°40, 9-28, 1990.
- René TATON : *Madame du Châtelet, traductrice de Newton,* Archives internationales d(histoire des sciences, Vol. 22, 185-210, 1969.
- Mary TERRALL, *Emilie du Châtelet and the Gendering of Science,* Hist. Sci. 33, n°101, part 3, 283-310, 1995.
- René VAILLOT, *Avec Madame du Châtelet, (1734-1749),* Oxford, Voltaire Foundation Taylor Institution, 1988.
- *http ://www.scottlan.edu/iriddle/women/chronol.htm*
- *http ://turnbull.dcs.st-andac.uk/history/References/Chatelet.html*

Mary Lucy CARTWRIGHT (1900-1998)

- Mary Lucy CARTWRIGHT, : *Some exciting mathematical episodes involving John Edenson Littlewood,* Bull. Inst. Math. Appl. 12, n°7, 201-202, 1976.
- Mary Lucy CARTWRIGHT, : *Moments in a girl 's life,* Bull. Inst. Math. Appl. 25, n°3-4, 63-67, 1989.
- Freeman DYSON, *Review of « Nature 's Numbers »by Ian Stewart,* Mathematical Intelligencer, 19 (**??**), 65-67, 1997.
- N.P. ERUGIN, *Mary Lucy CARTWRIGHT,* Differensialnye 25, n°9, 1642-1646, 1989.
- Shawnee L.Mc MURRAY and James J. TATTERSALL, *The Mathematical Collaboration of M.L. Cartwright and J.E. Littlewood,* American Mathematical Monthly, Vol.103, n°10, 833-845, December 1996.
- Shawnee L. Mc.Murran and James J. TATTERSALL, *Cartwright and Little-wood on Van der Pol'equation,* Harmonic Analysis and non-linear Differential Equations (Riverside, CA, 1995), 265-276, Contempor. Math., 208, Amer. Mat. Soc., Providence, RI, 1997.
- Caroline SERIES, *Obituary : Dame Mary Lucy Cartwright DBE (1900-1998),* European Mathematical Society Newsletter, Issue 30, 21-23, December 1998.
- *Girton College Register,* Vol.2, 1944-1969.
- *Personalities and Presidents,* The Mathematical Gazette, Vol.80, 22-23, March 1996.
- *Obituary,* Daily Telegraph, London, April 7, 1998.
- *Obituary,* The Times, London,, April 7, 1998.
- *http ://www. history. mcs. st-andrews ac.uk/history/Mathematicians/Cartwright.html*
- *http ://www.scottlan.edu/iriddle/women/cartwght.htm*

2. Education. Enseignement des mathématiques

- Michèle BAQUET (préface de Stella BARUK), *Les maths sans problèmes, ou comment éviter d'en dégoûter votre écolier,* Calman-Lévy, 1996.
- Marie-Agnès EGRET et Claudine KAHN, *Des kilos, de l'alcool et des chapeaux,* L'Ouvert n°93, décembre 1998, 45-49.
- R. ESTABLET, *Quelques aspects sociologiques de l'enseignement des filles,* L'Ouvert n°70, mars 1993, 10-19.
- Anne HOLDEN RONNING et Mary-Louise KEARNY (Eds.), *L 'Université au féminin,* Editions UNESCO, ISBN :92-3-203404-2, 1997.
- Bérangère MASSIGNON, *L'image des femmes dans les cartoons,* Bulletin du cercle des jeunes membres de l'AFFDU, n°3, 1998.

- MICHEL, *Non aux stéréotypes ; vaincre le sexisme dans les manuels scolaires et les livres pour enfants,* UNESCO, 1986.
- Aviva SPIRGLAS, *En fait, rien n'a changé,* Gazette des mathématiciens, n°74, 86-87, octobre 1997.
- *Vers la parité dans les instances de décision ? La place des filles dans une filière de formation des cadres, du lycée aux grandes écoles scientifiques,* Colloque organisé par l'AFFDU, Réseau Demain la parité, le 11 janvier 1997, au Palais du Luxembourg, Paris.

3. Profession : Mathématicienne

- Heidrun GRAFE und Ingrid HOLZLER, *Rolle der Frau in der Mathematik vor und nach der Wende,* Otto-von-Guericke Universita, Fakultat fur Mathematik, Magdeburg, 1996.
- Claudia HENRION, *Women in Mathematics : the Addition of Difference,* Indiana University Press, 1997. Reviewed by Ann HIBNER KOBLITZ in the Notices of the AMS, Vol.45, n°5, 606-609, May 1998.
- Marla PARKER (Ed.), *She Does Math ! real-Life Problems from women on the Job,* The Mathematical Association of America, 1995.
- Andrew STERETT (Ed.), *101 Careers in Mathematics,* The Mathematical Society of America, 1996.
- Marie A. VITUELLI and Mary E. FLAHIVE, *Are Women getting all the jobs ?* Notices of the AMS, Vol.44, n°3, 338-339, March 1997.

4. Femmes et Société

- Jean-Pierre ALBERT, *Diables de femmes !* Le Monde de l'Education, avril 1998.
- Françoise BARRET-DUCROCQ, *Gestion personnelle et gestion collective des carrières féminines ou « laisser faire le temps, la vaillance et la loi »,Diplômées,* AFFDU, n°185, 52-56, juin 1998.
- A.M. CATTELAIN, L *'Europe au féminin, 172 millions d'Européennes au jour le jour, Ramsay, Paris, 1992.*
- Nicole et Albert DU ROY, *Citoyennes ! il y a cinquante ans, le vote des femmes,* Paris Flammarion, 1994.
- Michel HABIB, *Le cerveau divisé au masculin et au féminin,* p.78 in Michael GAZZANIGA, *Le cerveau divisé,* Pour la Science, n°251, 72-79, septembre 1998.
- Véronique HELFT-MALZ et Paule H. LEVY, *Encyclopédie des femmes politiques sous la Vème République,* Editions P. Banon, Paris, 1996.
- Agnès HUBERT, *L'Europe et les femmes,* Editions Apogée, Collection Politique Européenne, 1998.
- Laura A. LISWOOD, *Women World leaders, fifteen great politicians tell their stories,* Pandora, Harper Collins Publishers, London, San Francisco, 1995 et 1996.
- Janine MOSSUZ-LAVAU, *Femmes/hommes, pour la parité,* Preses de Sciences-Po, 1998.
- Jacqueline NONON, *Faire carrière au* 21ème *siècle, un défi pour les Européennes,* Diplômées, AFFDU, n°185, 66-79, juin 1998.
- Brice PEDROLETTI, *Japon : la révolte des « office ladies »,* Le Monde TRM, dimanche 16/lundi 17 août 1998.
- Michelle PERROT, *Femmes publiques,* Paris, Textuel 1997.
- Michelle PERROT, *Nous entrerons dans la carrière..., Les femmes et le droit à la carrière : une difficile conquête,* Diplômées, AFFDU, n°185, 57-65, juin 1998.
- Marc SAUTET, *Les femmes ? De leur émancipation,*(« entretiens », avec Confucius, Platon, Aristote, Augustin, Avicenne, Thomas d'Aquin, Hume, Schopenhauer, Stuart

Mill, Nietzshe), Edition Jean-Claude Lattès, Collection « Les philosophes la question », 1996.

- *1000 femmes qui font bouger la France,* l'Express n°2414, octobre 1997.
- *L'opinion souhaite l'égalité hommes-femmes plutôt que la parité,* dossier p.13, Le Monde, samedi 31 octobre 1998.

5. Expositions. Tables rondes.

- Carolyn C. CONNELL, *Exemplary women in mathematical careers,* Thursday 14 January 1999, Panel sponsored by the MAA Women in Mathematical Network, 82^{nd} annual meeting of the MAA, San Antonio, Texas, Notices of the AMS, Vol.45, n°9, p. 1269, October 1998.
- Anne-Lise MAUGUE, *Représentations du politique et de la masculinité chez Drieu la Rochelle et Nizan,* mardi 9 juin 1998, Table ronde *intellectuelles,* Du genre en histoire des intellectuels, IEP, 9 rue de la Chaise, 75007 Paris.
- Florence ROCHEFORT, *Naissance des intellectuelles, de la femmes savante à l'intellectuelle,* mardi 9 juin 1998, Table ronde *intellectuelles,* Du genre en histoire des intellectuels, IEP, 9 rue de la Chaise, 75007 Paris.
- Kathleen A. SULLIVAN, *Outreach programs for women and girls in mathematics,* Thursday 14 J January 1999, Poster session sponsored by the MAA Women in Mathematical Network, 82^{nd} annual meeting of the MAA, San Antonio, Texas, Notices of the AMS, Vol.45, n°9, p. 1269, October 1998.
- Exposition la Villette, *Carnets de physiciennes,* 14 décembre 1998-27 février 1999, Cité des Sciences et de l'Industrie, niveau 1, Paris 19.

UFR de Mathématiques et Informatique
Université Louis Pasteur
67084 Strasbourg Cedex
supper@math.u-strasbg.fr

Femmes & math
Revue de l'association *femmes et mathématiques*
Institut Henri Poincaré
11 rue Pierre et Marie Curie
75231 Paris cedex 05
fetm@ihp.jussieu.fr

Numéro 3

Coordination du numéro 3 : *Julianne Unterberger*
Directrice de Publication : *Julianne Unterberger*
Imprimerie de l'Université Rennes I
Numéro ISSN : 1271-3546
Dépôt légal : mars 1999
Prix du numéro : 60 FF