Linéarisation de certaines structures de Poisson

Véronique Chloup-Arnould

La notion de structures de Poisson apparaît naturellement en mécanique dans l'étude des systèmes Hamiltoniens et généralise la notion de structure symplectique. Si le rang de Λ (tenseur de Poisson sur la variété M) est constant et égal à la dimension de M alors Λ est inversible et son inverse definit une structure symplectique sur M. Le théorème de Darboux affirme que deux variétés symplectiques de même dimension sont localement isomorphes. On peut se demander si un résultat similaire est vrai pour les structures de Poisson générales, i.e. si deux structures de Poisson de même rang en un point donné sont localement isomorphes. La réponse à cette question est non et c'est précisément cela qui rend intéressante l'étude du comportement local de ces structures.

L'étude locale des structures de Poisson se fait de la façon suivante : on utilise d'abord le théorème de décomposition de Weinstein [9] pour décomposer localement une variété de Poisson (M, Λ) en un produit d'une variété symplectique et d'une variété avec une structure de Poisson nulle en un point. Un tel produit est un produit de Poisson. En utilisant cette décomposition on se ramène à l'étude des structures de Poisson nulles en un point.

Une structure de Poisson sur une variété M est la donnée d'un crochet de Lie sur $\mathbb{C}^\infty(M)$, noté $\{\ ,\ \} : \mathbb{C}^\infty(M) \times \mathbb{C}^\infty(M) \to S(M)$ et vérifiant la règle de Leibniz :

$$\forall f, g,\ h \in C^\infty(M)\ \{f, gh\} = \{f, g\}h + g\{f,\ h\}.$$

Dans des coordonnées locales quelconques $(x^1, \ldots, x^n)$, on obtient :

$$\{f, g\} = \sum_{1 \leq i,j \leq n} \Lambda^{ij} \frac{\partial f}{\partial x^i} \frac{\partial g}{\partial x^i}$$

où Λ est un champ de tenseurs deux fois contravariant antisymétrique vérifiant

$[\Lambda,\ \Lambda] = 0$ ($[\ ,\ ]$ désigne le crochet de Schouten).

Si Λ s'annule en e, dans des coordonnées locales quelconques $(x^1, \ldots, x^n)$ centrées en e, on peut écrire

$$\Lambda^{ij}(x) = \sum_{1 \leq k \leq n} C_k^{ij} x^k + R^{ij}(x)$$

où les R^{ij} représentent les termes non linéaires dans le développement en série de Taylor de Λ^{ij} et où les C_k^{ij} sont les constantes de structure d'une algèbre de Lie $\mathcal{H}$ appelée *la linéarité de la structure* (Weinstein [9]).

La structure de Poisson Λ sera dite *linéarisable* si on peut trouver des nouvelles coordonnées locales $(y^1, \ldots, y^n)$ dans lesquelles Λ s'écrive

$$\Lambda^{ij}(y) = \sum_{1 \leq k \leq n} C_k^{ij} y^k$$

V. Arnold a montré, le premier, que toute structure de Poisson dont la linéarisée est l'algèbre de Lie non triviale de dimension deux est linéarisable.

La question de la linéarisation de structures de Poisson telles que $\mathcal{H}$ soit semi-simple a été soulevée dans Weinstein [9] ; si la linéarisée d'une structure de Poisson est une algèbre de Lie semi-simple, alors Λ est formellement linéarisable. De plus, J. Conn [4] a démontré que si Λ est analytique, la linéarisation est anaJytique. Dufour [6] a démontré que la semi-simplicité n'est pas nécessaire en exhibant une algèbre résoluble de dimension 3 vérifiant la même propriété. J. Conn [5] a démontré que dans le cas d'une structure de Poisson C^∞, si la linéarisée $\mathcal{H}$ est semi-simple de type compact alors la linéarisation est C^∞. Weinstein [10] a exhibé des exemples de structures de Poisson C^∞ ayant pour linéarisée une algèbre de Lie semi-simple, de type non compact et de rang réel au moins deux, qui ne sont pas linéarisables par un changement de coordonnées C^∞.

Le problème de la linéarisation formelle se traduit en un problème de cohomologie. Notons $\Lambda^{ij}(x) = \sum_{1\leq k\leq n} C_k^{ij}x^k + \Lambda_{(k)}^{ij}(x) + \Lambda_{(k+1\}}^{ij}(x) + \ldots$ le développement de Λ^{ij} en série formelle où $\Lambda_{(k)}^{ij}(x)$ est le terme homogène de degré k en les $x^1, \ldots, x^n (k \geq 2)$.

L'idée de la linéarisation formelle est de repousser les termes de degré k en des termes de degré supérieur par un changement de coordonnées locales de degré k. Posons donc $y^i = x^i + f^i(x)$ où les f^i sont des polynômes homogènes de degré k. On peut alors considérer $\Lambda_{(k)} : \mathcal{H}\wedge\mathcal{H} \to S^k(\mathcal{H})$ définie par $\Lambda_{(k)}(x^i\wedge x^j) \mapsto \Lambda_{(k)}^{ij}$. La relation $[\Lambda,\ \Lambda] = 0$ se traduit à l'ordre k par $\partial_2\Lambda_{(k)} = 0$ où ∂_2 est l'opérateur de cohomologie de Chevaley de $\mathcal{H}$ associé à la représentation adjointe de $\mathcal{H}$ sur $S(\mathcal{H})$: $(\partial_2(f))(x\wedge y\wedge z) = \underset{x,y,z}{S}(ad(x)f(y\wedge z) + f(x,[y,z]))$. Donc $\Lambda_{(k)}$ est un 2-cocycle. Considérons $f_{(k)}$: $\mathcal{H} \to S^k(\mathcal{H})x^i \mapsto f_{(k)}^i$. Alors $\left(\{y^i, y^j\} - \sum_k C_k^{ij}y^k\right)$ est d'ordre strictement supérieur à k si et seulement si $(\Lambda_{(k)} + \partial_1 f_{(k)})(x^i, x^j) = 0$.

Ainsi, *si* le 2-cocycle $\Lambda_{(k)}$ est un cobord, on repousse les termes de degré k en des termes de degré $k+1$.

En itérant le processus on obtient une suite $\{x_\nu^i\}$ qui détermine un système de coordonnées formelles limite $x_\infty^i = x^i + g_\infty^i(x)$ dams lequel Λ est linéaire. On parlera de *linéarisation formelle.*

En particulier, Λ est formellement linéarisable si $H^2(\mathcal{H},\ S(\mathcal{H})) = 0$. C'est le cas si $\mathcal{H}$ est semi-simple ou si par exemple $\mathcal{H} = \mathcal{G}_1 \oplus \mathbb{R}$ où $\mathcal{G}_1$ est semi-simple (dans ce cas, la linéarisation est même analytique, cf. Molinier [7]).

Nous nous intéressons au problème de la linéarisation des tenseurs de Lie-Poisson. Tous ces résultats se trouvent dans Chloup-Arnould [1].

Soit G un groupe de Lie et P un tenseur de Poisson sur G. (G, P) est un *groupe de Lie-Poisson* si P est multiplicatif, i.e. s'il vérifie : $P(xy) = L_{x\star}P(y) + R_{y_\star}P(x)$. En particuIier $P(e) = 0$.

La linéarisation des structures de Lie-Poisson est un cas particulier de la linéarisation locale d'une structure de Poisson. Le cadre Lie-Poisson dans cette étude se justifie d'une part par le fait que la structure de Lie-Poisson est automatiquement analytique réelle. D'autre part, sur le groupe $\mathbb{R}^n$, toute structure de Lie-Poisson est linéarisable alors que certaines structures de Poisson générales ne le sont pas. De plus une structure de Lie-Poisson est entièrement déterminée par sa partie linéaire sans être toujours linéarisable (voir M. Cahen, S. Gutt et J. Rawnsley [3]).

Soit $\mathcal{G}$ une algèbre de Lie. $(\mathcal{G}, \mathcal{G}^*)$ (aussi notée $(\mathcal{G}, p)$) est une *bigèbre de Lie* s'il existe une structure d'algèbre de Lie sur $\mathcal{G}*$ telle que son application duale, notée p, soit un cocycle sur $\mathcal{G}$, i.e. $p : \mathcal{G} \to \mathcal{G} \wedge \mathcal{G}$ vérifie : $p([X, Y]) = [p(X), Y] - [p(Y), X]$.

Soit (G, P) est un groupe de Lie-Poisson, alors $P_r(x) = R_{x}^{-1}{}_{*} P(x)$ est un cocycle pour la representation Ad, i.e. $P_r(xy) = P_r(x) + AdxP_r(y)$. Alors $p = P_{r*\varepsilon}$ définit une structure de bigèbre de Lie sur $\mathcal{G}$ l'algèbre de Lie de groupe de Lie G. Réciproquement si $(\mathcal{G}, p)$ est une bigèbre de Lie, alors (G, P) est un groupe de Lie-Poisson, où G est le groupe de Lie connexe et simplement connexe d'algèbre de Lie $\mathcal{G}$ et où P est donné dans un voisinage de e par : $P(\exp X) = R_{\exp X,} \frac{e^{\mathrm{ad}\, X} - 1}{adX} p(X)$. Ainsi la structure est déterminée par sa partie linéaire et la linéarisée coïncide avec $\mathcal{G}^*$.

Nous généralisons le résultat obtenu par J. Conn [4] en prenant comme point de départ l'algèbre de Lie $\mathcal{H} = \mathcal{G}^*$. Nous nous intéressons au cas où $g*$ est réductive :

Théorème 1 *Soit G un groupe de Lie connexe et simplement connexe d'algèbre de Lie $\mathcal{G}$. Soit P un tenseur de Lie-Poisson sur G tel que $\mathcal{G}^*$, le dual de $\mathcal{G}$, s'écrive $\mathcal{G}* = \mathcal{G}_1 \oplus \mathcal{R}$ en produit direct où $\mathcal{R}$ est un idéal abélien et où $\mathcal{G}_1$ est une algèbre de Lie semi-simple. Alors P est analytiquement linéarisable.*

Ce théorème n'est pas vérifié pour certains tenseurs de Poisson généraux (non Lie-Poisson) ayant la même linéarisée $\mathcal{H} = \mathcal{G}_1 \oplus \mathcal{R}$. Soit P un tenseur de Poisson sur $\mathbb{R}^{n+r}$ (où $n = dim\mathcal{G}_1$ et $r = dim\mathcal{R}, r > 2$), s'annulant en 0 et tel que :

$$P^{ij}(x) = \sum_{1 \le k \le n} C_k^{ij} x^k + B^{ij}$$

où les C_k^{ij} sont les constantes de structure de $\mathcal{H} = \mathcal{G}_1 \oplus \mathcal{R}$ dans la base $> e_1, \ldots,\ e_{n+r} <$ où $e_i \in \mathcal{G}_1, \forall i \le n$ et $e_j \in \mathcal{R}, \forall j > n$ et où B^{ij} sont les termes non linéaires de P^{ij}, et nous supposons que $B^{ij} = 0$ pour i ou $j \le n$.

Alors si B n'est pas nul, la dimension maximale des feuilles symplectiques pour la structure linéaire est différente de la dimension maximale des feuilles symplectiques pour P, donc P n'est pas linéarisable.

Thérème 2 *Soit G un groupe de Lie connexe et simplement connexe d'algèbre de Lie $\mathcal{G}$. Soit P un tenseur de Lie-Poisson sur G tel que $\mathcal{G}^*$, le dual de $\mathcal{G}$, s'écrive $\mathcal{G}^* = \mathcal{G}_1 \oplus \mathcal{R}$ en produit direct où $\mathcal{R}$ est un idéal de dimension r et où $\mathcal{G}_1$ est une algèbre de Lie semi-simple de dimension n. Alors $P = L \oplus T$ où L est le tenseur de*

Lie-Poisson linéaire donné par les constantes de structure de $\mathcal{G}_1$ *et* $T(x^1, \ldots, x^{n+r}) = \sum_{n+1 \leq i,j \leq n+r} T^{ij}(x^{n+1}, \ldots, x^{n+r}) \frac{\partial}{\partial x^i} \wedge \frac{\partial}{\partial x^j}$. Ce théorème n'est pas vérifié pour certains tenseurs de Poisson généraux (non Lie-Poisson) ayant la même linearisée $\mathcal{H} = \mathcal{G}_1 \oplus \mathcal{R}$; on a le résultat suivant (également obtenu par Wade [8]) :

Proposition *Soit* Λ *une structure de Poisson sur une variété* M*, s'annulant en un point* z *et telle que la linéarisée en* z *soit* $\mathcal{H} = \mathcal{G}_1 \ltimes \mathcal{R}$ *le produit semi-direct d'une sous-algèbre de Lie semi-simple de dimension* n *et d'un idéal de dimension* r*.*

Alors il existe des coordonnées formelles $(x^1, \ldots, x^n, y^1, \ldots, y^r)$ *au voisinage de* z *telles que dans ces coordonnées, on ait :*

$$\begin{aligned}
\{x^i, x^j\} &= \sum_{1 \leq k \leq n} C_k^{ij} x^k \\
\{x^i, y^\alpha\} &= \sum_{1 \leq \gamma \leq r} C_\gamma^{i\alpha} y^\gamma \\
\{y^\alpha, y^\gamma\} &= \sum_{1 \leq \nu \leq r} C_\nu^{\alpha\gamma} y^\nu + R^{\alpha\gamma}(x, y)
\end{aligned}$$

où *les* C_k^{ij} *sont les constantes de structure de* $\mathcal{H}$ *et où les* $R^{\alpha\gamma}$ *sont des séries en* x *et* y *d'ordre supérieur à deux.*

D'autre part, nous regardons le problème de linéarisation des structures de Lie-Poisson en suivant une autre approche : le point de départ est alors G (voir Chloup-Arnould [2] ou [1] pour les calculs détaillés).

Bibliographie

[1] *V. Chloup-Arnould*, Groupes de Lie-Poisson, Thèse de l'université de Metz (1996).

[2] *V. Chloup-Arnould*, Linearization of some Poisson-Lie tensor, Journal of Geometry and Physics 815 (sous presse).

[3] *M. Cahen, S. Gutt, J. Rawnsley*, Non linearizability of the Iwasawa Poisson-Lie structure, Lett. Math. Phys. 24 (1992) p79-83.

[4] *J.F. Conn*, Normals forms for analytic Poisson structures, Ann. of Mathematics 119 (1984) p577-601.

[5] *J.F. Conn*, Normals forms for smooth Poisson structures Ann. of Math. 121 (1985) (3) p. 565-593.

[6] *J.P. Dufour*, Linéarisation de certaines structures de Poisson, J. Diff. Géo. 32 (5) (1990) p 415 → 428.

[7] *Molinier*, Linéarisation de stuctures de Poisson, thèse de l'université de Montpellier II (1993).

[8] *A. Wade*, *Normalisation de structures de Poisson*, Thèse de l'université de Montpellier II (1996).

[9] *A. Weinstein*, The local structure of Poisson manifolds, J. Differential Geometry 18 (1983) p 523-557.

[10] *A. Weinstein*, Poisson geometry of the principal series and non linearisable structures, J. Differential Geometry 25 (1987) p 55-73.

Véronique Chloup-Arnould
Département de Mathématiques
Université de Metz, Ile du Saulcy,
F-57045 Metz Cedex, France
chloup@poncelet.univ-metz.fr