Milieux poreux fissurés avec double périodicité

Ioana-Andreea Ene

Introduction

L'écoulement des fluides à travers des milieux poreux représente un problème d'une grande importance, avec de nombreuses applications dans l'exploitation des gisements pétroliers, la pollution, la géophysique, etc. Dans la pratique des exploitations pétrolières on rencontre le plus souvent des milieux poreux fissurés. Dans ce cas un problème sur lequel on a beaucoup discuté est la modélisation de ces mouvements. Dans la modélisation mathématique des écoulements des fluides dans les milieux poreux fissurés, le milieu poreux est composé de blocs poreux, qui sont séparés par des fissures qui ont des dimensions plus grandes que celles des pores. Dans ces conditions même s'il existe une seule phase fluide en mouvement, elle va se comporter de manière différente dans les blocs poreux et dans les fissures. Ceci laisse supposer qu'au niveau microscopique on peut avoir deux pressions différentes qui correspond aux deux cas décrits.

En effet on connait les équations proposées par Barenblatt et Zheltov [4] qui introduisent deux pressions différentes dans les blocs poreux et dans les fissures. On décrit, dans ce cas, l'écoulement moyen, ou macroscopique, avec deux équations qui contiennent un terme de transfert entre les blocs poreux et les fissures ; ce terme est représenté par la différence des deux pressions.

En utilisant la méthode de l'homogénéisation on a obtenu une modélisation mathématique de ce type de problème avec deux hypothèses. La première suppose l'existence d'une double périodicité, ce qui correspond aux blocs poreux et aux fissures. La deuxième suppose l'existence d'une double porosité.

En utilisant la méthode de l'homogénéisation, Th. Levy [11] et P. Donato et J. Saint Jean Paulin [6] ont proposé un modèle qui contient une double périodicité. Plus précisément dans les fissures l'écoulement est périodique en ε et dans les blocs poreux en ε^2. Le résultat qu'on obtient en passant à la limite est une loi de Darcy avec un tenseur de perméabilité différent du tenseur classique de la loi de Darcy (E. Sanchez-Palencia [14]).

Un autre modèle d'écoulement dans les milieux poreux fissurés, proposé par T. Arbogast, U. Hornung et J. Douglas [3] et U. Hornung [10], connu comme le modèle de double porosité, consiste dans l'introduction de deux perméabilités très différentes dans les blocs poreux et dans les fissures. Plus précisément si on suppose que la perméabilité des fissures est de l'ordre de l'unité, alors dans les blocs poreux on prend une perméabilité de l'ordre de ε^2. Le résultat du processus d'homogénéisation qu'on obtient est un modèle avec deux pressions et donc avec un terme de transfert lié à la différence des deux pressions.

Les deux modèles semblaient donner des solutions différentes. En partant de cette remarque je me suis située dans mon étude dans le cas d'une double périodicité, mais en étudiant le problème de Neumann, ce qui correspond plus ou moins au cas de la double porosité. Le résultat que j'ai obtenu montre que, du moins dans le cas d'un écoulement stationnaire, le modèle à double porosité et celui à double périodicité coïncident. Au niveau macroscopique j'ai obtenu une loi de Darcy.

D'un point de vue mécanique, on sait que l'écoulement d'un fluide à travers un milieu poreux est décrit par

• la loi de Darcy :

$$v = -k(\nabla p - f)$$

où v est le vecteur vitesse, p la pression, k le tenseur de perméabihté (qui est symétrique et défini positif, cf. E. San& ez-Palencia), et f les forces extérieures.

• l'équation de continuité :

$$\text{div } v = 0$$

• la condition sur les frontières imperméables :

$$v.n = 0$$

On voit donc, que d'un point de vue mathématique, on est conduit à résoudre un problème de Neumann :

$$- \text{div } (A \nabla u) = f$$
$$A \nabla u.n = 0$$

Si l'on considère maintenant que le milieu poreux est formé par des fissures d'ordre ε et des blocs poreux qui contiennent des inclusions (ou des trous d'ordre ε^2), le problème de Neumann qu'on a à résoudre est tel qu'on cherche des solutions doublement périodiques en ε et ε^2.

Quelques résultats de convergence 3-échelle

Definition *Soit u_e une suite bornée dans $L^2(\Omega)$. On dit que u_ε converge 3-échelle vers une limite $u_0(x, y, z) \in L^2(\Omega \times Y \times Z)$ si et seulement si pour toute fonction $\psi(x, y, z) \in \mathcal{D}(\Omega, C_p^\infty(Y \times Z))$ on a :*

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_\Omega u_\varepsilon(x) \psi \left(x, \frac{x}{s}, \frac{x}{s^2} \right) dx = \int_\Omega \int_Y \int_Z u_0(x, y, z) \psi(x, y, z) dx dy dz$$

Théorème (i) *Soit u_ε une suite bornée dans $H^1(\Omega)$, qui converge faiblement vers sa limite $u(x)$, dans $H^1(\Omega)$. Alors u_ε converge 3-échelle vers $u(x)$ et il existe deux fonctions $u_1(x, y) \in L^2(\Omega, H_p^1(Y)/R), u_2(x, y, z) \in L^2(\Omega \times Y, H_p^1(Z)/R)$ telles que, quitte à extraire une sous-suite, ∇u_ε converge 3-échelle vers $\nabla u(x) + \nabla_y u_1(x, y) + \nabla_z u_2(x, y, z)$.*

(ii) *Soient* u_ε et $\varepsilon^2 u_\varepsilon$ *deux suites bornées dans* $L^2(\Omega)$, *respectivement* $(L^2(\Omega))^N$

Alors il existe une fonction $u_0(x,y,z) \in L^2(\Omega \times Y,\ H^1_p(Z)/R)$ *tel que, quitte à extraire une sous-suite,* u_ε *et* ∇u_ε *converge 3-échelle vers* $u_0(x,y,z)$ *respectivement* $\nabla_z u_0(x,y,z)$.

Problème de Neumann dans un milieu poreux fissuré

On veut étudier avec la méthode de l'homogénéisation le système suivant :

$$-\Delta u_\varepsilon = f \quad \text{dans } \Omega_\varepsilon \tag{8}$$

$$u_\varepsilon = 0 \quad \text{sur } \partial\ \Omega \tag{9}$$

$$\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial n} = 0 \quad \text{sur } \partial\ S^\varepsilon_\Omega \tag{10}$$

où $f \in L^2(\Omega)$.

La structure de Ω_ε présente une double périodicité (ε et ε^2). Les zones dans lesquelles les inclusions sont concentrées sont $\varepsilon-$ périodiques et de dimension ε. Les inclusions dans chaque zone sont ε^2-périodiques et de dimension ε^2.

Pour résoudre un tel problème on doit utiliser un opérateur de prolongement $P_\varepsilon \in \mathcal{L}(V_\varepsilon, H^1_0(\Omega))$ (D. Cioranescu et J. Saint Jean Paulin [5]) . Avec cette construction on peut alors donner :

Théorème de convergence

(i) *Quitte à extraire une sous-suite, les convergences suivantes ont lieu* :

$$P_\varepsilon u_\varepsilon \to u(x) \text{ dans } H^1_0(\Omega) \text{ faible}$$

$$P_\varepsilon u_\varepsilon \text{ converge 3-échelle } u(x)$$

(ii) Il existe deux fonctions $u_1(x,y) \in L^2(\Omega,\ H^1_p(Y)/R)$, $u_2(x,y,z) \in L^2(\Omega \times Y, H^1_p(Z)/R)$ *telles que, quitte à extraire une sous-suite on a :*

$$\nabla\left(P_\varepsilon u_\varepsilon\right) \text{ converge 3-échelle } \nabla_x u(x) + \nabla_y u_1(x,y) + \nabla_z u_2(x,y,z)$$

La limite 3-échelle du système est alors :

$$\int_{\Omega\times Y\times Z} \left(\chi_F(y) + \chi_{Y\setminus F}(y)\chi_{Z|S}(z)\right)\left(\nabla_x u(x) + \nabla_y u_1(x,y) + \nabla_z u_2(x,y,z)\right)$$

$$\left(\nabla_x \Phi(x) + \nabla_y \Phi_1(x,y) + \nabla_z \Phi_2(x,y,z)\right) = \left(\frac{|F|}{|Y|} + \frac{|Y\setminus F|}{|Y|}\frac{|Z\setminus S|}{|Z|}\right)\int_\Omega f(x)\Phi(x)dx$$

Pour voir de manière plus claire le système macroscopique on introduit les notations suivantes :

$$A(y,z) = \chi_F(y) + \chi_{Y\setminus F}(y)\chi_{Z\setminus S}(z)$$

$$A_1(y) = \int_{Z\setminus S} A(y,z)\,(Id - \nabla_z w)\,dz$$

$$A^h = \int_F A_1(y)\,(Id - \nabla_y v(y))\,dy.$$

Problème homogénéisée “classique” :

$$- \operatorname{div}_x \left(A^h \nabla_x u(x) \right) = \left(\frac{|F|}{|Y|} + \frac{|Y\setminus F|}{|Y|} \frac{|Z\setminus S|}{|Z|} \right) f(x) \text{ dans } \Omega \tag{11}$$

$$u(x) = 0 \text{ sur } \partial\,\Omega \tag{12}$$

Remarque Un problème qui trouve toute sa place dans le cadre des milieux poreux fissurés est celui de l'étude de l'équation de diffusion :

$$\frac{\partial p^\varepsilon}{\partial t}(x,t) = \nabla \left(d^\varepsilon \nabla p^\varepsilon(x,t) \right) + f(x,t) \text{ dans } \Omega^\varepsilon \times (0,T) \tag{13}$$

$$p^\varepsilon = 0 \,\text{sur}\, \partial\Omega \times (0,T) \tag{14}$$

$$[p^\varepsilon] = 0 \,\text{sur}\, \partial S_\Omega^\varepsilon \times (0,T) \tag{15}$$

$$d^\varepsilon \nabla p^\varepsilon.n = 0 \,\text{sur}\, \left(\partial S_\Omega^\varepsilon \setminus \left(\partial F^\varepsilon \bigcap \partial \Omega_f^\varepsilon \right) \right) \times (0,T) \tag{16}$$

$$d^\varepsilon \nabla p^\varepsilon.n = q^\varepsilon \,\text{sur}\, \partial F^\varepsilon \times (0,T) \tag{17}$$

Les mêmes techniques d'homogénéisation et de convergence 3-échelle nous permet d'obtenir à la limite un système avec deux pressions, et donc de lier ce type de modèle avec celui de Warren et Root et de Brenblatt et Zheltov [4].

Bibliographie

[1] *G. Allaire*, Homogenization and two-scale convergence, SIAM J. Math. AnaJ., 23, 6, l482-15l8, 1992

[2] *G. Allaire, M. Briane*, Multi-scale convergence and reiterated homogenization, Publications du Laboratoire d'Analyse Numérique, Univ. Paris 6, R 94019, l994

[3] *T. Arbogast, J. Douglas, U. Hornung* Derivation of the double porosity model of single phase flow via homogenization theory, SIAM J. Math. Anal., 21, 823-836, 1990

[4] *G. I. Barenblatt, I. P. Zheltov, I. N. Kocina* Basic concepts in the theory of seepage of homogeneous liquide in fissured rocks, J. Appl. Math. Mech., 24, 1286-1303, 1960

[5] *D. Cioranescu, J. Saint Jean Paulin*, Homogenization in open sets with holes, J. Math. Anal. Appl., 71, 2, 590-607, 1979

[6] *P. Donato, J. Saint Jean Pautin*, Stokes flow in a porous medium with double periodicity, Progress in Partial Differential Equatious : the Metz surveys, Eds. M. Chipot, J. Saint Jean Paulin et I. Shafrir, Pitman, Longman Press, 116-129, 1994

[7] *I-A. Ene*, Etude de quelques problèmes d'écoulement dans les milieux poreux, Thèse de Doctorat de l'Université de Metz, 1995

[8] *I-A. Ene, J. Saint Jean Paulin*, On a Model of Fractured Porous Medium, Proceedings of the International Conference Mathematical Modelling of Flow Through Porous Media, eds. A. Bourgeat, C. Carasso, S. Lu& haus et A. Mike- lic, World Scientific, 402 $\to$ 409, 1996

[9] *I-A. Ene, T. Estebenet, B. Noetinger*, Homogénéisation de l'équation de diffusion dans un milieu poreux fissuré (en préparation)

[10] *U. Hornung*, Applications of the homogenization method to flow and transport in porous media, Summer School on Flow and Transport in Porous Media, Ed. Xiao Shutie, World Scientific, 167-222, 1992

[11] *T. Levy*, Filtration in a porous fissured rock : influence of the fissures connexity, European J. Mech., B/Fluids, 9,4, 309-327, 1990

[12] *G. Nguetseng*, A general convergence result for a functional related to the theory of homogenization, SIAM J. Math. Anal., 20, 608-623, 1989

[13] *G. Nguetseng*, Asymptotic analysis for a stiff variational problem arising in mechanics, SIAM J. Math. Anal., 21, 6, 1394-1414, 1990

[14] *E. Sanchez Palencia*, Non-homogeneous media and vibration theory, Lecture Notes in Physics, 127, pn·nger, Berhn, 1980

Ioana-Andreaa Ene
Departement de Mathématiques
Université de Metz, Ile du Saulcy,
F-57045 Metz Cedex, France
ene@poncelet.univ-metz.fr