

## Branches continues de solutions pour un système élliptique et algébrique

*Cristelle Barillon*

Nous nous intéressons au système couplé d'équations élliptique et algébrique suivant :

$$F(u_1) - \alpha(u_1 - u_2) = 0, \tag{1}$$

$$\Delta u_2 - \alpha(u_2 - u_1) = 0, \tag{2}$$

modélisant un problème d'explosion thermique dans un milieu hétérogène (voir par exemple [2], [3]). Dans ces équations,  $u_1$  et  $u_2$  sont les températures de deux phases ( $u_2$  phase gazeuse, et  $u_1$  phase particulaire dans laquelle a lieu une réaction exothermique par exemple), la non-linéarité  $F$  caractérise le taux de production de chaleur, et le paramètre positif  $\alpha$  le taux d'échange de chaleur entre les deux phases. On considère ce problème dans un domaine  $\Omega$  borné assez régulier (de classe  $C^{(2+\delta)}$  par exemple, où  $0 < \delta < 1$ ) de  $R^m$ . La condition sur la frontière est la condition de Dirichlet pour  $u_2$  :

$$u_2 |_{\partial\Omega} = 0 \tag{3}$$

La non-linéarité  $F(u)$  est supposée régulière ( $C^{(2+\delta)}$ ) et positive lorsque  $u$  est non-négatif. Le domaine  $\Omega$  est de plus supposé étoilé, c'est-à-dire qu'il existe un point  $x_0$  à l'intérieur de  $\Omega$  tel qu'à partir de  $x_0$ , on peut atteindre chacun des points de  $\bar{\Omega}$  par un seul segment entièrement inclus dans  $\Omega$ . On peut alors introduire une famille de domaines  $\Omega_L$  obtenus par dilatation d'un domaine fixe  $\Omega$ , de telle sorte que si  $L_1 < L_2$  alors  $\Omega_{L_1} \subset \Omega_{L_2}$ .  $L$  représente la taille du domaine considéré.

La question essentielle de la théorie de l'explosion thermique est de trouver des conditions critiques d'existence et de stabilité des solutions qui dépendent des paramètres du problème, et en particulier, de la taille du domaine.

dans [2], [3] ce problème a été étudié pour une dimension d'espace et pour une forme particulière de la non-linéarité  $F(u) = \exp(u)$ . Par ailleurs, on pourra trouver certains résultats sur les systèmes couplés d'équations différentielles et algébriques dans [4] et les références de cet article.

Dans cet exposé, je parlerai des résultats obtenus en collaboration avec Vitaly Volpert, mon directeur de thèse, à l'Université Claude Bernard, Lyon 1. La partie physique a été discutée avec G.M. Makhviladze, University of Central Lancashire. Le premier outil dont nous avons besoin, concerne les bornes des solutions classiques. En effet, si on exprime  $u_2$  en fonction de  $u_1$  et qu'on le substitue dans (2), on obtient un problème qui peut être dégénéré. D'autre part, si l'on exprime  $u_1$  en fonction de  $u_2$ , on obtient une non-linéarité qui peut être multi-variée. Le théorème suivant concerne les bornes et la régularité pour les solutions classiques de (1)-(3).

**Theorème 1** *Supposons que :*

$$F(u_1^0) = \alpha u_1^0, F(u) < \alpha u, u_1^0 < u \leq u_1^*, F'(u_1) < \alpha, u_1^0 \leq u_1 < u_1^*$$

et  $F'(u_1^*) = \alpha$ . Supposons aussi que  $F''(u_1^*) \neq 0$  et que la fonction inverse de  $u_1 - \frac{1}{\alpha}F(u_1)$  est de Hölder dans l'intervalle  $[u_1^0, u_1^*]$ .

Si  $u = (u_1, u_2)$  est une solution du problème (1)-(3) telle que  $u_1$  soit borné presque partout et  $u_2$  appartienne à  $L^2(\Omega)$ , alors on a en fait les bornes suivantes pour  $u_1$  dans  $\bar{\Omega}$  :

$$u_1^0 \leq u_1(x) \leq u_1^*$$

et les résultats de régularité suivants :

$$u_2(x) \in C^{(2+\delta)}(\bar{\Omega}), u_1(x) \in C^{(\delta)}(\bar{\Omega})$$

pour un certain  $\delta > 0$ . De plus, l'ensemble des points de  $\Omega$  où  $u_1(x) = u_1^*$  est de mesure de Hausdorff nulle.

En plus d'une régularité assez forte pour les solutions, la dernière assertion du théorème précise que le problème sera dégénéré au plus sur un ensemble de mesure nulle.

Le second outil dont nous allons avoir besoin est le théorème de comparaison pour les systèmes semi-linéaires paraboliques dégénérés :

**Theorème 2** *On considère le problème suivant :*

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a\Delta u + \Phi(u) \text{ dans } \Omega, \quad (4)$$

où  $u = (u_1, \dots, u_m)$  et  $a$  est une matrice diagonale constante avec  $a_i = 0, i = 1..k, k < m$  et  $a_i > 0, i = k + 1..m$ . La condition aux limites est celle de Dirichlet pour les  $(m - k - 1)$  dernières composantes de  $u$ . On se donne aussi une condition initiale  $u(x, 0) = f(x)$ ,  $x \in \Omega$ . On fait les hypothèses suivantes de régularité sur la non-linéarité :  $\Phi$  est de classe  $C^1$  sur  $R$ ,  $\Phi'(u)$  est irréductible pour tout  $u$ , et ses éléments non-diagonaux sont positifs.

On note  $u(x, t, f)$  la solution de ce problème associée à la condition initiale  $f$ . Si  $f_1(x) \geq f_2(x)$  dans  $\Omega$ , alors  $u(x, t, f_1) > u(x, t, f_2)$  dans  $\Omega$  et pour tous temps positifs.

Attachons-nous à présent, à la stabilité des solutions. Pour énoncer le théorème principal sur ce sujet, nous avons d'abord besoin de certaines notations. Considérer le problème (1)-(3) dans un domaine  $\Omega_L$  est équivalent au problème renormalisé dans un domaine fixe  $\Omega$  :

$$F(u_1) - \alpha(u_1 - u_2) = 0 \text{ dans } \Omega \quad (5)$$

$$\Delta u_2 + L^2 F(u_1) = 0 \text{ dans } \Omega \quad (6)$$

$$u_2|_{\partial\Omega} = 0. \quad (7)$$

On notera alors pour  $L$  fixé,  $w_m(L)$  le maximum dans  $\bar{\Omega}$  de la première composante  $w_{L,1}$  d'une solution  $w_L = (w_{L,1}, w_{L,2})$  au problème (5)-(7) (nous n'excluons pas ici la possibilité qu'il puisse y avoir plusieurs solutions). Peut-on alors définir la fonction  $L(w_m)$ ? C'est l'objet du théorème suivant concernant la première branche continue et croissante de solutions :

**Théorème 3** *La fonction  $L(w_m)$  est bien définie (i.e. uni-valuée) et croissante sur un intervalle  $[u_1^0, \bar{u}_1]$  ( $\bar{u}_1 < u_1^*$ ) où  $\bar{u}_1$  est un argument de maximum pour  $L(w_m)$ .*

*De plus, les solutions du problème sur cette branche sont stables.*

L'idée de la preuve repose sur la théorie du degré topologique (voir par exemple [1]). Si l'on désigne par  $A_L$  l'opérateur agissant de  $C^{(s)}(\bar{\Omega}) \times C_0^{(2+\delta)}(\bar{\Omega})$  à valeurs dans  $C^{(\delta)}(\bar{\Omega}) \times C^{(\delta)}(\bar{\Omega})$  qui correspond au premier membre des équations (5)-(7), alors on montre que l'on peut définir le degré topologique pour cet opérateur. Pour  $L = 0$  ce degré est égal à 1; en effet, il existe une unique solution  $w_0 = (u_1^0, 0)$  correspondant à  $L = 0$  dans un certain borné  $G$  de  $C^{(\delta)}(\bar{\Omega}) \times C_0^{(2+\delta)}(\bar{\Omega})$  contenant  $w_0$ . D'une part, grâce à l'invariance par homotopie, ce degré reste constant dans  $G$  pour tout  $L$  fini tel qu'il n'y ait pas de solution au problème sur la frontière de cet ensemble. D'autre part, on peut démontrer qu'il existe une section du plan  $(w_m, L)$  contenant le point  $(u_1^0, 0)$ , telle que le spectre de l'opérateur  $A_L$  linéarisé autour d'une solution dont la première composante n'excède pas un certain  $\tilde{u}_1$ , est entièrement inclus dans le demi-plan gauche. On obtient donc que l'index de chaque solution (i.e. le degré topologique calculé sur un très petit voisinage) correspondant à cette section est égal à 1. Le degré étant la somme des index, on a le premier résultat : l'unicité des solutions qui donne que la courbe  $L(w_m)$  est bien définie dans une section du plan  $(w_m, L)$ . Au passage, on obtient aussi la stabilité de ces solutions. Ensuite, pour montrer que cette branche est croissante, on va se servir du théorème de comparaison.

Supposons alors que nous ne sommes pas sur une branche croissante. Dans ce cas, il existe  $w_{L_1}$ , et  $w_{L_2}$  solutions correspondant respectivement aux domaines  $\Omega_{L_1}$ , et  $\Omega_{L_2}$ , avec  $L_1 < L_2$  et  $w_m(L_1) > w_m(L_2)$ . On décroît continuellement la taille du domaine de  $L_1$  à 0. Il existe alors  $L^*$  tel que  $w_{1,L^*}(x_0) = w_{1,L_2}(x_0)$  en un point  $x_0$  du domaine et  $w_{1,L^*}(x) < w_{1,L_2}(x)$  partout ailleurs. On considère le problème parabolique dans  $\Omega_{L_2}$  associé au problème (1)-(3). On choisit comme condition initiale la fonction  $f(x) = (f_1(x), f_2(x))$  avec  $f_1(x) = u_1^0$  et  $f_2(x) = 0$  dans  $\Omega_{L_2}/\Omega_{L^*}$ ,  $f_1(x) = w_{1,L^*}(x)$  et  $f_2(x) = w_{2,L^*}(x)$  dans  $\Omega_{L^*}$ . La solution du problème parabolique avec cette condition initiale est strictement croissante en temps et converge vers une solution stationnaire qui est nécessairement  $w_{L_2}$  par l'unicité. On a donc une contradiction avec le théorème de comparaison. Pour finir, on montre que tous les points de la courbe  $L(w_m)$  appartenant à la branche croissante issue de  $(u_1^0, 0)$  correspondent à des solutions asymptotiquement stables. Ceci prouve que l'on atteint bien un maximum local en un certain  $\bar{u}_1$  et achève la démonstration.

## Bibliographie

- [1] *K. Deimling*. Nonlinear Functional Analysis. Springer-Verlag 1985.
- [2] *I.G. Dik, A. Yu. Krainov*. Ignition regims of a gas suspension in a vessel with heated walls. Combustion, Explosion and Shock Wawes, 1984, 20, No. 5, pp 58-61
- [3] *M.A. Gurevich, G.E. Ozerova, A.M. Stepanov*. Ignition limit of a monofractional gas suspension. Combustion, Explosion and Shock Wawes, 1974, 10, No. 1, pp 83-93
- [4] *R.E. O'Malley, L. V. Kalachev*. Regularization of nonlinear differential-algebraic equations. SIAM J. Math. Anal., 1994, 25 No. 2, pp 615-629

Christelle Barillon  
U.M.R. 5585 LAN Université Claude Bernard Lyon 1  
43, bd du 11 Novembre 1918, 69622 Villeurbanne CEDEX  
barillon@iris.univ-lyon1.fr