Invariants d'algèbres à involution

Anne Quéguiner

Étant donnée une algèbre A, on peut lui associer une forme quadratique de façon naturelle, en considérant l'application $x \in A \mapsto \mathrm{Tr}(x^2)$. Cette forme est un invariant de l'aJgèbre, c'est-à-dire que deux algèbres isomorphes ont des formes traces isométriques. En tant que telle, elle a beaucoup été étudiée, en particulier quand l'aIgèbre A est un corps de nombres, i.e. une extension finie du corps des nombres rationnels $\mathbb{Q}$ (cf. par exemple [1]).

On s'intéresse ici à la situation suivante : K est un corps de caractéristique différente de 2, A est une algèbre centrale simple sur K, et σ est une involution de A. On considère alors la forme quadratique $T_\sigma : x \in A \mapsto \mathrm{Trd}_A(\sigma(x)x)$. On va montrer comment son étude permet de définir des invariants de l'algèbre à involution (cf. [6]).

1 Notations et rappels

1.1 Algèbres centrales simples

Grâce au théorème de Wedderburn, une algèbre centrale simple A sur le corps K est simplement une algèbre de matrices $A = M_r(D)$, à coefficients dans un corps gauche (i.e. non nécessairement commutatif) D dont le centre est le corps K (cf. par exemple [7]). Deux algèbres centrales simples A et A' sont dites similaires si les corps gauches D et D' qui leurs sont associés par le théorème précédent sont isomorphes. L'ensemble $\mathrm{Br}(K)$ des classes d'équivalences d'algèbres centrales simples pour cette relation s'appelle le groupe de Brauer de K ; il est muni naturellement d'une structure de groupe, qui sera notée ici additivement, la loi étant induite par le produit tensoriel des algèbres.

On appelle corps de décomposition de A une extension F du corps K telle qu'il existe un isomorphisme ϕ de $A \otimes_K F$ dans une algèbre de matrices $M_n(F)$. En particulier, une clôture séparable K_s de K est un corps de décomposition pour toute algèbre centrale simple sur K. La dimension de A sur son centre, $\dim_K(A) = \dim_F(A \otimes_K F)$, est donc touiours le carré d'un entier n qu'on appelle degré de l'algèbre A. Pour tout $a \in A$, on définit la trace réduite et la norme réduite de a par $\mathrm{Trd}_A(a) = \mathrm{Tr}(\phi(a \otimes 1))$ et $\mathrm{Nrd}_A(a) = \det(\phi(a \otimes 1))$. Ces deux quantités sont indépendantes du choix du corps de décomposition F et de l'isomorphisme ϕ.

1.2 Involutions

Une involution σ de l'algèbre A est par définition un anti-automorphisme d'ordre 2 de l'anneau A. On notera k le sous-corps de K fixé par σ. Deux situations sont possibles : si $K = k$, l'involution est en fait K-linéaire ; on dit alors qu'elle est de première espèce ; dans le cas contraire, K est une extension quadratique de $k, K = k(\sqrt{\alpha})$, et l'involution est dite de deuxième espèce.

1.3 Cas décomposé

L'algèbre A est dite décomposée quand elle est isomorphe à une algèbre de matrices $A \simeq M_n(K)$. On connaît alors les involutions de A. Elles correspondent aux formes bilinéaires, symétriques ou anti-symétriques, et aux formes hermitiennes de dimension n sur K.

De manière plus précise, si σ est une involution de première espèce de $M_n(K)$, il existe une matrice B, symétrique ou anti-symétrique, telle que σ est l'involution adjointe à la forme définie par B, i.e. $\forall M \in M_n.(K)$, $\sigma(M) = B^{-1}M^tB$, où M^t désigne la transposée de M. Cette matrice B est déterminée par la donnée de σ, à multiplication par un scalaire près.

Si maintenant σ est une involution de deuxième espèce de $M_n(K)$, il existe une matrice hermitienne H, telle que σ est l'involution adjointe à la forme définie par H, i.e. $\forall M \in M_n(K)$, $\sigma(M) = H^{-1}\overline{M}^tH$, où $^-$ désigne l'unique k-automorphisme non-trivial de K. Cette matrice H est déterminée par la donnée de σ, à multiplication par un scalaire près.

1.4 Formes traces

On considère l'application

$$\begin{array}{rccc} T_\sigma: & A & \to & k \\ & x & \mapsto & \mathrm{Trd}_A(\sigma(x)x) \end{array}$$

C'est une forme quadratique sur le corps k de dimension n^2 si l'involution est de première espèce, et $2n^2$ si elle est de deuxième espèce. On considère également la restriction T_σ^+ de T_σ au sous-espace $A^+ = \{a \in A, \sigma(a) = a\}$. On cherche à étudier les invariants de ces deux formes quadratiques, en tant qu'invariants de l'algèbre à involution.

1.5 Invariants de formes quadratiques

Soit q une forme quadratique de dimension l sur le corps k, et considérons une diagonalisation quelconque $< a_1, \dots,\ a_l >$ de q. Les invariants de q que l'on va utiliser par la suite sont définis comme suit (cf. par exemple [7]).

Si le corps k est formellement réel, i.e. peut être muni d'une relation d'ordre, la signature de q est la différence entre le nombre de a_i qui sont positifs et le nombre de a_i qui sont négatifs. C'est un entier, compris entre $-l$ et l, et de même parité que l. On peut également définir, de manière analogue, la signature d'une forme hermitienne à valeurs dans une extension quadratique du corps k.

Le déterminant de q est $\det(q) = a_1 \dots a_l \in k^\star/k^{\star 2}$.

Enfin, l'invariant de Hasse de q est $\sum_{1\leq i<j\leq l}(a_i, a_j) \in \mathrm{Br}_2(k)$, où $\mathrm{Br}_2(k)$ désigne la 2-partie du groupe de Brauer de k, et (a_i, a_j) la classe dans $\mathrm{Br}(k)$ de l'algèbre de quaternions $(a_i,\ a_j)$.

2 Invariants de $(A,\ \sigma)$

2.1 Signature d'une involution

L'étude des formes traces permet tout d'abord, quand le corps k est formellement réel, i.e. peut être muni d'une relation d'ordre, de définir la notion de signature d'une involution. Précisément, on donne la définition suivante [3, 4, 6] :

Definition 1 La *signature* de σ est

$$\operatorname{sign}(\sigma) = \begin{cases} \sqrt{\operatorname{sign}(T_\sigma)} & \text{si } \sigma \text{ est de première espèce;} \\ \sqrt{\frac{1}{2}\operatorname{sign}(T_\sigma)} & \text{si } \sigma \text{ est de deuxième espèce} \end{cases}$$

Dans le cas des involutions de première espèce, cette définition est due à Lewis et Tignol [3], tout comme la proposition qui suit. On définit bien ainsi une signature, au sens habituel du terme. En particulier, on montre le résultat suivant :

Proposition 1 *La signature de l'involution σ est un entier, compris entre* 0 *et deg(A), et de même parité que le degré de A.*

De plus, dans le cas décomposé, on a les résultats suivants :

Proposition 2 [Lewis et Tignol] [3] *Si σ est l'involution de $M_n(K)$ adjointe à la forme bilinéaire symétrique B, alors la signature de* $\operatorname{sign}(\sigma) = |\operatorname{sign}(B)|$.

Proposition 3 [4][6] *Si σ est l'involution de $M_n(\overline{K})$ adjointe à la forme hermítienne H, alors la signature de* $\operatorname{sign}(\sigma) = |\operatorname{sign}(H)|$.

Remarque : La forme bilinéaire symétrique (resp. hermitienne) n'étant définie qu'à un scalaire près, la signature de B (resp. de H) n'est pas un invariant de σ. On ne peut se passer de la valeur absolue qui apparaît dans les deux propositions précédentes.

2.2 Déterminant d'une involution de première espèce

On suppose dorénavant que le degré de A est pair, $n = 2m$. Dans cette partie, on suppose de plus que σ est une involution de première espèce.

La notion de déterminant d'une involution de première espèce remonte à des travaux de Tits et Jacobson ; plus récemment, Knus, Parimala et Sridharan en ont proposé une définition explicíte [2]. L'étude des formes traces permet de donner une nouvelle définition de cet invariant [5][6] :

Définition 2 Le *déterminant de l'involution σ* est $d(\sigma) = 2^m \det(T_\sigma^+) \in k^\star/k^{\star 2}$.

Dans le cas décomposé, on a le résultat suivant :

Proposition 4 *Si A est l'algèbre décomposée $A = M_n(K)$, et si σ est l'involution adjointe à la forme bilinéaire B, le déterminant de σ est 1 si B est anti-symétrique, et det(B) si B est symétrique.*

Remarque : A nouveau, la forme B n'est définie qu'à multiplication par un scalaire près ; cependant, le degré de A étant pair, son déterminant $\det(B) \in k^\star/k^{\star 2}$ est bien un invariant de σ.

2.3 Classe déterminante d'une involution de deuxième espèce

Quand l'involution σ est de première espèce, on peut montrer, par des méthodes de cohomologie galoisienne, que les invariants de Hasse des formes traces ne dépendent que du degré de l'algèbre, de sa classe dans le groupe de Brauer, et du déterminant de l'involution. Ils ne permettent donc pas de définir un nouvel invariant de l'algèbre à involution. Dans le cas des involutions de deuxième espèce, en revanche, c'est l'invariant de Hasse, et non le déterminant, qui permet de définir un invariant non-trivial de l'algèbre à involution. Précisément, on donne la définition suivante [5] [6] :

Définition 3 La *classe déterminante modulo* 2 de (A,σ) est

$D(A,\sigma) = \frac{m(m-1)}{2}(-1,-1) + m(\alpha,2) + w_2(T_\sigma^+)$, où $\sqrt{\alpha}$ désigne comme précédemment un générateur de l'extension quadratique K/k.

Le fait que c'est un invariant non-trivial découle de la proposition suivante :

Proposition 5 *Si* $A = M_n(K)$, *et si* σ *est l'involution adjointe à la forme hermitienne* H, *alors la classe déterminante modulo 2 de* (A,σ) est $D(M_n(K),\sigma) = (\alpha, \det(H))$.

L'étude des formes traces permet donc d'associer à (A,σ) différents invariants. Ces invariants peuvent être utiles, par exemple, pour étudier la décomposabilité de (A,σ). De tels résultats sont décrits dans [5] et [6].

Bibliographie

[1] *P.E. Conner et R. Perlis*, A survey of Trace Forms of Algebraic Number Fields, World. Scient. Publ. , Singapore, 1984.

[2] *M.-A. Knus, R. Parimala, R. Sridharan*, On the discriminant of an involution, Bull. Soc. Math. Belgique, série A 43 (1991) 89-98.

[3] *D. Lewis, J.-P. Tignol*, On the signature of an involution, Arch. Math. 60 (1993) 128-135.

[4] *A. Quéguiner*, Signature des involutions de deuxième espèce, Arch. Math. 65 (1995) 408-412.

[5] *A. Quéguiner*, Cohomological invariants of algebras with involutions, J. Algebra, H 194 (1997) 299-330 .

[6] *A. Quéguiner*, Invariants d'algèbres à involution, Thèse de doctorat (1996).

[7] *W. Scharlau*, Quadratic and hermitian forms, Grundlehren Math. Wiss. 270, Springer-Verlag, Berlin (1985).

Anne Quéguiner
Laboratoire Analyse, Géométrie et Applications, UMR 7539 du CNRS
Institut Galilée, Université Paris 13, 93430 Villetaneuse
queguine@math.univ-paris13.fr