

Déterminants associés aux traces pondérées

Catherine Ducourtiaux

1. Introduction

Ce travail porte sur l'étude de déterminants d'opérateurs agissant sur un espace de dimension infinie et sur leurs propriétés. Ces déterminants sont définis sur un sous-ensemble de l'algèbre des opérateurs pseudo-différentiels classiques sur une variété compacte sans bord.

En introduisant un opérateur auxiliaire Q , on peut définir une pseudo trace Tr^Q dite trace pondérée; c'est une forme linéaire qui coïncide avec la trace usuelle sur les opérateurs de trace finie mais en général, elle n'est pas traciale i.e. $Tr^Q(AB) \neq Tr^Q(BA)$.

Par déterminant associé à une trace pondérée Tr^Q , nous entendons une fonctionnelle det^Q qui s'exprime par une formule du type : " $det^Q = expTr^Q log$ ", et nous qualifions ces déterminants de relatifs à Q . En général, les déterminants relatifs à un opérateur Q ne sont pas multiplicatifs i.e. : $det^Q(AB) \neq det^Q(A)det^Q(B)$.

En nous restreignant à des opérateurs pour lesquels on peut utiliser une même détermination du logarithme, nous montrons que le déterminant relatif det^Q est multiplicatif dès que ces opérateurs sont pris dans une sous-algèbre des opérateurs pseudo-différentiels classiques sur laquelle la trace pondérée Tr^Q est traciale.

Par ailleurs, il existe un autre déterminant régularisé, le déterminant ζ -régularisé det_ζ , introduit par Ray et Singer [RS] en 1971 dans un contexte géométrique et largement étudié et utilisé depuis. Tout comme les déterminants relatifs, le déterminant ζ -régularisé donne lieu à une anomalie multiplicative non triviale :

$$F(A, B) := det_\zeta(AB)/det_\zeta(A)det_\zeta(B). \quad (1)$$

Nous relierons les déterminants relatifs au déterminant ζ -régularisé et nous en déduisons une formule générale pour l'anomalie multiplicative du déterminant ζ -régularisé, qui étend une formule établie par M. Wodzicki [W], [K].

En ce qui concerne le déterminant ζ -régularisé, notre travail s'appuie principalement sur un long article non publié de M. Kontsevich et S. Vishik [KV1]

et repris par la suite de façon synthétique [KV2]; en ce qui concerne les traces pondérées, nous nous référons à deux articles communs en préparation : [CDP] et [DMP].

Afin de rendre accessible notre exposé et de montrer l'analogie entre la dimension finie et la dimension infinie, nous commençons par présenter le déterminant usuel sur les matrices comme associé à la trace usuelle. Les objets et techniques utilisés se retrouveront en dimension infinie.

2. Matrices

Dans tout ce qui suit, on se place dans l'algèbre des matrices carrées $M_n(\mathbb{C})$; on note tr la trace usuelle et det le déterminant usuel.

Si $A \in M_n(\mathbb{C})$ et si f est une fonction holomorphe dans un voisinage du spectre de A , on peut définir la fonction $f(A)$ par une formule intégrale de Cauchy

$$f(A) := \frac{i}{2\pi} \int_{\Gamma} f(\lambda)(A - \lambda I)^{-1} d\lambda$$

où Γ est un contour entourant le spectre de A . En particulier, si $L_{\theta} := \{z \in \mathbb{C} : \text{Arg}z = \theta\}$ est une demi-droite d'origine O qui ne rencontre pas le spectre de A , on peut définir le logarithme $\log_{\theta}(A)$ relativement à la coupure spectrale L_{θ} par

$$\log_{\theta}(A) := \frac{i}{2\pi} \int_{\Gamma} \log_{\theta}(\lambda)(A - \lambda I)^{-1} d\lambda.$$

Par la formule de Cauchy, on obtient $tr \log_{\theta}(A) = \sum_{\lambda \in Sp(A)} \log_{\theta}(\lambda)$ d'où

$$det(A) = \prod_{\lambda \in Sp(A)} \lambda = \prod_{\lambda \in Sp(A)} \exp \log_{\theta}(\lambda) = \exp tr \log_{\theta}(A)$$

indépendamment du choix de θ .

Une façon de retrouver la multiplicativité du déterminant pour des matrices inversibles suffisamment proches de matrices hermitiennes définies positives est la suivante :

Proposition 1 : Soit $(A_t)_{0 \leq t \leq 1}$ une famille C^1 de matrices inversibles telle qu'il existe une même coupure L_{θ} des spectres de A_t pour tout t . On a :

$$\frac{d}{dt} \log_{\theta} det(A_t) = tr(\dot{A}_t A_t^{-1}).$$

Preuve : on a : $\frac{d}{dt} \log_{\theta}(A_t) = -\frac{i}{2\pi} \int_{\Gamma} \log_{\theta}(\lambda)(A_t - \lambda I)^{-1} \dot{A}_t (A_t - \lambda)^{-1} d\lambda$; du fait que tr est traciale on en déduit que : $\frac{d}{dt} \log_{\theta} \det(A_t) = tr \frac{d}{dt} \log(A_t) = tr \left[\dot{A}_t \left(-\frac{i}{2\pi} \int_{\Gamma} \log_{\theta}(\lambda)(A_t - \lambda)^{-2} d\lambda \right) \right]$; on conclut par intégration par parties.

Soit $F(A, B) := \det(AB)/\det(A)\det(B)$ où A et B sont deux matrices inversibles.

Si deux matrices inversibles A et B sont suffisamment proches de deux matrices hermitiennes définies positives alors il existe une même coupure, par exemple \mathbb{R}_- , des spectres de A , B , AB (car AB et $B^{1/2}AB^{1/2}$ sont conjuguées) et A^t pour tout $0 \leq t \leq 1$.

Ainsi, pour deux telles matrices A et B , on a d'après la proposition 1 : $\frac{d}{dt} \log F(A^t, B) = 0$ pour tout $0 \leq t \leq 1$. Or $F(I, B) = 1$ d'où $F(A, B) = 1$.

A partir de maintenant, on considère une variété M , C^{∞} , riemannienne, compacte, sans bord, de dimension finie d et sur M un fibré vectoriel E hermitien de rang fini n . L'algèbre des opérateurs qui nous intéresse est celle des opérateurs pseudo-différentiels classiques agissant sur les sections C^{∞} du fibré E , $\Gamma(E)$. On note cette algèbre $CL(M, E)$. L'espace $\Gamma(E)$ est muni d'un produit hermitien

$$\langle \sigma, \rho \rangle = \int_M \langle \sigma(x), \rho(x) \rangle_{E_x} dvol(x).$$

3. Opérateurs pseudo-différentiels classiques

Rappelons qu'un opérateur $A : \Gamma(E) \rightarrow \Gamma(E)$ est un opérateur différentiel d'ordre $m \in \mathbb{N}$ si pour toute trivialisaton de E et dans un système de coordonnées locales au dessus de $x \in M$, on a $Af(x) = \sum_{|\alpha| \leq m} a_{\alpha}(x) D^{\alpha} f(x)$, où α est un multiindice $(\alpha_1, \dots, \alpha_d)$, $a_{\alpha}(x)$ est une matrice carrée de taille n et $D^{\alpha} = (-i)^{|\alpha|} \frac{\partial^{\alpha_1}}{\partial x_1^{\alpha_1}} \dots \frac{\partial^{\alpha_d}}{\partial x_d^{\alpha_d}}$. Comme $D^{\alpha} f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \xi^{\alpha} e^{i(x-y) \cdot \xi} f(y) dy d\xi$, on obtient

$$Af(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{i(x-y) \cdot \xi} \sigma(A)(x, \xi) f(y) dy d\xi \quad (2)$$

où $\sigma(A)(x, \xi) = \sum_{|\alpha| \leq m} a_{\alpha}(x) \xi^{\alpha}$ est appelé le symbole de l'opérateur A . Les opérateurs pseudo-différentiels classiques généralisent les opérateurs différentiels au sens où ils s'expriment localement comme dans (2) mais avec un symbole plus général et un ordre qui peut être un nombre complexe. Le symbole (défini localement sur la variété) d'un opérateur $A \in CL(M, E)$ d'ordre $\alpha \in \mathbb{C}$ admet un développement asymptotique $\sigma(A)(x, \xi) \sim \sum_{j \in \mathbb{N}} a_{\alpha-j}(x, \xi)$, où $a_{\alpha} \neq 0$ et où chaque composante $a_{\alpha-j}(x, \xi)$ est positivement homogène

de degré $Re\alpha - j$ par rapport à ξ . Si les composantes sont homogènes i.e. $a_{\alpha-j}(x, t\xi) = t^{Re\alpha-j}a_{\alpha-j}(x, \xi)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$, on dit que l'opérateur est de *classe impaire*; tous les opérateurs différentiels sont de classe impaire. L'ensemble des opérateurs de classe impaire est une algèbre que nous notons \mathcal{A}_{-1} .

symbole principal :

La première composante non nulle $a_\alpha(x, \xi)$ correspond au symbole principal $\sigma_P(A)$ de A , qui est défini globalement sur T^*M ; $\sigma_P(A)(x, \xi)$ est un endomorphisme de la fibre E_x . Si $\sigma_P(A)(x, \xi)$ est inversible pour $\xi \neq 0$, A est dit elliptique. On peut munir les symboles principaux d'une norme :

$$\|\sigma_P(A)\| := \sup_{x \in M} \sup_{|\xi|=1} \|\sigma_P(A)(x, \xi)\|_{End(E_x)}.$$

opérateurs admissibles :

Si le spectre de A admet une coupure, nous dirons que A est admissible. Nous notons $Ell_{ord>0}^*(M, E)$ le sous-ensemble de $CL(M, E)$ formé des opérateurs elliptiques, inversibles, d'ordre strictement positif, $Ell_{ord>0}^{*,adm}(M, E)$ le sous-ensemble de $Ell_{ord>0}^*(M, E)$ formé des opérateurs admissibles et le sous-ensemble $Ell_{ord>0}^{*,+}(M, E)$ de $Ell_{ord>0}^{*,adm}(M, E)$ formé des opérateurs auto-adjoints positifs (leur spectre est alors contenu dans \mathbb{R}^+). Tout opérateur elliptique, inversible, d'ordre strictement positif et tel que son symbole principal n'a pas de valeur propre dans un angle Λ d'origine 0 est admissible car dans ce cas Λ ne contient qu'un nombre fini de valeurs propres de l'opérateur (voir [Sh]).

Puissances complexes, logarithmes d'un opérateur elliptique :

Si un opérateur $A \in Ell_{ord>0}^{*,adm}(M, E)$, Seeley [S] définit A^s pour $Res \gg 0$ par $A^s := \frac{i}{2\pi} \int_\Gamma \lambda^s (A - \lambda I)^{-1} d\lambda$, où maintenant Γ est un contour ouvert avec deux branches infinies entourant le spectre, et il montre, par la propriété de semi-groupe, qu'on peut définir A^s pour tout $s \in \mathbb{C}$. L'opérateur A^s appartient à $CL(M, E)$ et est d'ordre $s.o(A)$ où $o(A)$ est l'ordre de A . On pose $\log(A) := \partial_s(A^s)|_{s=0}$; localement, le symbole de $\log(A)$ s'écrit $o(A) \ln|\xi| I + \sigma_0$ où σ_0 est le symbole d'un opérateur d'ordre 0 dans $CL(M, E)$. Donc pour deux opérateurs $A, B \in Ell_{ord>0}^{*,adm}(M, E)$, la différence $\frac{\log A}{o(A)} - \frac{\log B}{o(B)}$ appartient à $CL(M, E)$.

Si un opérateur $A \in Ell_{ord=0}^{*,adm}(M, E)$ alors le spectre de A est borné. On définit

alors directement les puissances complexes et les logarithmes de A par une formule intégrale de Cauchy ; $\log A$ appartient à $CL_{ord=0}(M, E)$.

4. Traces pondérées

Un opérateur $A \in CL(M, E)$ est de trace finie si et seulement si son ordre est strictement inférieur à $-d$, d étant la dimension de la variété M . Nous notons par Tr la trace des opérateurs de trace finie. Si $A \in CL(M, E)$, si $Q \in Ell_{ord>0}^{*,adm}(M, E)$ et si s est un nombre complexe tel que $Res > \frac{o(A)+d}{o(Q)}$, l'opérateur AQ^{-s} est de trace finie.

De plus la fonction qui à s associe $Tr(AQ^{-s})$ est holomorphe sur le demi-plan ouvert $\{s \in \mathbb{C} : Res > \frac{o(A)+d}{o(Q)}\}$ et se prolonge à \mathbb{C} en une fonction méromorphe n'admettant que des pôles simples [K]. D'où la définition suivante :

Definition 1 : Soit $A \in CL(M, E)$ et soit $Q \in Ell_{ord>0}^{*,adm}(M, E)$. La trace pondérée par Q de A est :

$$Tr^Q(A) := \left[Tr(AQ^{-s}) - \frac{1}{s} Res_{s=0}(Tr AQ^{-s}) \right]_{s=0}.$$

Remarque 1 : Si $A \in CL(M, E)$ est de trace finie, alors

$$Tr^Q(A) := [Tr(AQ^{-s})]_{s=0} = Tr(A).$$

Remarque 2 : La fonction qui à s associe $Tr(Q^{-s})$ est encore appelée fonction Zéta de Q et se note ζ_Q . Elle se prolonge à \mathbb{C} en une fonction méromorphe qui est holomorphe en 0.

Résidu de Wodzicki [W] : Soit $A \in CL(M, E)$. Pour tout $Q \in Ell_{ord>0}^{*,adm}(M, E)$ le produit $o(Q).Res_{s=0}(Tr AQ^{-s})$ est indépendant de Q et coïncide avec le résidu de Wodzicki de l'opérateur A , $res(A)$. L'obstruction à ce que les traces pondérées soient traciales, ainsi que la dépendance par rapport au poids, s'expri-

me à l'aide du résidu de Wodzicki.

Proposition 2 [CDP] : Soient $A, B \in CL(M, E)$ et soit $Q \in Ell_{ord>0}^{*,adm}(M, E)$.

$$Tr^Q[A, B] = -\frac{1}{o(Q)} res([log Q, A]B).$$

Soit $A \in CL(M, E)$ et soit $Q_1, Q_2 \in Ell_{ord>0}^{*,adm}(M, E)$.

$$Tr_1^Q(A) - Tr_2^Q(A) = res\left((log Q_2/o(Q_2) - log Q_1/o(Q_1))A\right).$$

Remarque 3 : Bien que $\log Q$ ne soit pas dans $CL(M, E)$ en général, $[\log Q, A]$ l'est.

Le résidu de Wodzicki admet une forme locale :

$$res(A) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_M \int_{S^*M} tr a_{-d}(x, \xi) d\xi dx.$$

On déduit de cette expression que le résidu s'annule pour un opérateur de classe impaire sur une variété de dimension impaire. De ces remarques et de la proposition 2, on déduit deux exemples de sous-algèbres de $CL(M, E)$ sur lesquelles la trace pondérée Tr^Q est traciale :

- la sous-algèbre \mathcal{A}_Q des opérateurs qui commutent avec Q ,
- la sous-algèbre \mathcal{A}_{-1} des opérateurs de classe impaire, lorsque la variété est de dimension impaire et lorsque Q est de classe impaire. La trace pondérée Tr^Q est alors indépendante de Q et coïncide avec la trace canonique de M. Kontsevich et S. Vishik.

Remarque 4 : Si M est réduite à un point, $CL(M, E)$ coïncide avec $M_n(\mathbb{C})$ (où n est le rang du fibré E) et on retrouve l'exemple initial des matrices.

Définition 2 : Soit (A_t) une famille d'opérateurs de $CL(M, E)$ d'ordre constant $\alpha \in \mathbb{R}$. L'espace des symboles d'ordre inférieur ou égal à α est muni d'une structure d'espace de Fréchet. Nous dirons que la famille (A_t) est continue, respectivement dérivable, par rapport à t si le symbole et les composantes homogènes du symbole de A_t sont continus, respectivement dérivables, par rapport à t dans l'espace des symboles d'ordres inférieurs ou égaux à α .

Proposition 3 : Soit (A_t) une famille d'opérateurs de $CL(M, E)$ d'ordre constant et soit $Q \in Ell_{ord>0}^{*,adm}(M, E)$. Si la famille (A_t) est continue par rapport à t alors $\lim_{t \rightarrow t_0} Tr^Q(A_t) = Tr^Q(A_{t_0})$. Si la famille (A_t) est dérivable par rapport à t alors $\frac{d}{dt} Tr^Q(A_t) = Tr^Q(\dot{A}_t)$.

5. Déterminants associés aux traces pondérées

Définition 3 : Soit $Q \in Ell_{ord>0}^{*,adm}(M, E)$. Pour tout opérateur A appartenant à $Ell_{ord \geq 0}^{*,adm}(M, E)$ admettant une coupure spectrale L_θ , le déterminant de A associé à la trace pondérée Tr^Q est :

$$\det_{\theta}^Q(A) := \exp \operatorname{Tr}^Q \left(\log_{\theta} A - \frac{o(A)}{o(Q)} \log Q \right).$$

Si $Q, A \in \mathcal{A}_{-1}$, si M est de dimension impaire et si A est d'ordre 0, alors, $\det_{\theta}^Q(A)$ est indépendant de Q .

Remarque 5 : Contrairement au cas de la dimension finie $\det_{\theta}^Q(A)$ dépend de la détermination du logarithme.

Tout comme dans le cas matriciel nous démontrons la multiplicativité des déter-

minants relatifs pour des opérateurs de $Ell_{ord \geq 0}^*(M, E)$, tels que leurs symboles principaux soient suffisamment proches de symboles principaux d'opérateurs de $Ell^{*,+}(M, E)$, et pris dans une algèbre où les traces pondérées correspondantes sont traciales.

Proposition 4 [DMP] : *Soit \mathcal{A} une sous-algèbre de $CL(M, E)$ telle que $\mathcal{A} \cap Ell^*(M, E)$ est un groupe et sur laquelle Tr^Q est traciale pour un certain $Q \in Ell_{ord > 0}^{*,adm}(M, E)$.*

Soit $(A_t)_{0 \leq t \leq 1}$ une famille d'opérateurs de $\mathcal{A} \cap Ell_{ord \geq 0}^(M, E)$, d'ordre constant, dérivable par rapport à t , et telle qu'il existe une même coupure L_{θ} des spectres de A_t pour tout t . On a :*

$$\frac{d}{dt} \log \det_{\theta}^Q(A_t) = \operatorname{Tr}^Q(\dot{A}_t A_t^{-1}).$$

Preuve : Elle se calque sur celle de la proposition 1. Le point essentiel à démontrer est : pour tout $\lambda \notin Sp(A_t)$,

$$\operatorname{Tr}^Q \left[(A_t - \lambda I)^{-1} \dot{A}_t (A_t - \lambda I)^{-1} \right] = \operatorname{Tr}^Q \left[\dot{A}_t (A_t - \lambda I)^{-2} \right].$$

D'après la proposition 3, on a : $\lim_{h \rightarrow 0} \operatorname{Tr}^Q \left[(A_t - \lambda I)^{-1} \left(\frac{A_{t+h} - A_t}{h} \right) (A_t - \lambda I)^{-1} \right] = \operatorname{Tr}^Q \left[(A_t - \lambda I)^{-1} \dot{A}_t (A_t - \lambda I)^{-1} \right]$ et une écriture analogue pour le second membre. De la propriété de groupe de $\mathcal{A} \cap Ell^*(M, E)$, il résulte que ces traces sont des limites de traces d'opérateurs dans \mathcal{A} . L'égalité des traces se déduit donc, comme en dimension finie, du fait que Tr^Q est traciale.

Théorème 1 [D] : *Soit \mathcal{A} une sous-algèbre de $CL(M, E)$ vérifiant les hypothèses de la Proposition 4 et telle que si $A \in \mathcal{A} \cap Ell_{ord \geq 0}^{*,adm}(M, E)$ alors $A^t \in \mathcal{A}$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. Pour tous opérateurs $A, B \in \mathcal{A} \cap Ell_{ord \geq 0}^*(M, E)$ de*

symbole principal suffisamment proche du symbole principal d'un opérateur de $Ell^{*,+}(M, E)$ on a :

$$\det^Q(AB) = \det^Q(A)\det^Q(B).$$

Idée de la preuve : Soit F^Q l'anomalie multiplicative de \det^Q définie comme en (1). Soient $A, B \in \mathcal{A} \cap Ell_{ord \geq 0}^*(M, E)$.

Supposons $o(B) \neq 0$. On considère la famille $A_t := \left(AB^{-\frac{o(A)}{o(B)}} \right)^t B^{\frac{o(A)}{o(B)}}$, $0 \leq t \leq 1$. Si A et B ont un symbole principal suffisamment proche du symbole principal d'un opérateur de $Ell^{*,+}(M, E)$, alors il existe une même coupure des spectres de A, B, AB et A_t pour tout t , et on déduit des hypothèses sur \mathcal{A} que $A_t \in \mathcal{A} \cap Ell_{ord \geq 0}^*(M, E)$. D'après la proposition 4, on a $\frac{d}{dt} \log F^Q(A_t, B) = 0$ pour tout $0 \leq t \leq 1$. On montre que $F^Q\left(B^{\frac{o(A)}{o(B)}}, B\right) = 1$ d'où $F^Q(A, B) = 1$. Si $o(B) = 0$, on procède de façon analogue en considérant la famille $B_t := B^t$.

Exemple : Les sous-algèbres \mathcal{A}_{-1} , avec M de dimension impaire et Q de classe impaire, et \mathcal{A}_Q satisfont aux hypothèses du théorème 1.

6. Déterminant ζ -régularisé

Definition 4 : Pour tout opérateur $A \in Ell_{ord > 0}^{*,adm}(M, E)$, le déterminant ζ -régularisé de A est :

$$\det_\zeta(A) := \exp\left(-\zeta'_A(0)\right).$$

Remarque 6 : M. Kontsevich et S. Vishik dans [KV2] ont démontré qu'il n'existe pas de fonction linéaire "Tr" telle que $\det_\zeta(A) = \exp \text{Tr} \log A$.

Dans le cas impair, i.e. opérateurs de classe impaire et variété de dimension impaire, M. Kontsevich et S. Vishik ont remarqué que pour tout opérateur $A \in Ell_{ord=0}^*(M, E)$ de symbole principal suffisamment proche du symbole principal d'opérateur de $Ell^{*,+}(M, E)$, le quotient $\det_\zeta(AC)/\det_\zeta(C)$ ne dépend pas de l'opérateur C choisi dans $Ell_{ord > 0}^{*,+}(M, E)$. Pour un tel opérateur A , ils posent : $\det(A) := \det_\zeta(AC)/\det_\zeta(C)$. On vérifie facilement que les déterminants relatifs des opérateurs d'ordre 0 étendent le déterminant de M. Kontsevich et S. Vishik défini dans le cas impair.

Le résultat suivant relie les déterminants relatifs des opérateurs d'ordre strictement positif au déterminant ζ -régularisé.

Théorème 2 [D] : Soit $Q \in Ell_{ord>0}^{*,adm}(M, E)$ d'ordre q . Soit $a > 0$. Pour tout opérateur $A \in Ell^*(M, E)$ d'ordre a et de symbole principal suffisamment proche du symbole principal d'un opérateur de $Ell^{*,+}(M, E)$, il existe une constante $C_{Q,a} := det_{\zeta}(Q^{\frac{a}{q}})$ telle que :

$$\frac{det_{\zeta}(A)}{det^Q(A)} = C_{Q,a} \cdot \exp \left\{ -\frac{1}{2a} \left[res \left(\log A - \frac{a}{q} \log Q \right)^2 \right] \right\}.$$

Corollaire : Pour tous opérateurs $A, B \in Ell_{ord>0}^*(M, E)$ de symboles principaux suffisamment proches de symboles principaux d'opérateurs appartenant à $Ell_{ord>0}^{*,+}(M, E)$, on a :

$$\begin{aligned} \log F(A, B) &= \frac{1}{2o(A)} res \left(\log A - \frac{o(A)}{o(A) + o(B)} \log(AB) \right)^2 \\ &+ \frac{1}{2o(B)} res \left(\log B - \frac{o(B)}{o(A) + o(B)} \log(AB) \right)^2 \\ &+ Tr^{AB} \left(\log(AB) - \log A - \log B \right). \end{aligned}$$

La formule donnée ci-dessus étend une formule établie par Wodzicki lorsque les opérateurs commutent (voir [K]).

7. Conclusion : Nous avons introduit un déterminant relatif det^Q , qui est du type " $expTr^Q log$ ", sur les opérateurs d'ordre 0. Pour les opérateurs d'ordre strictement positif, nous avons fixé une origine $\frac{log Q}{ord(Q)}$ dans l'espace des logarithmes des opérateurs pseudo-différentiels et nous avons remplacé " log " par " $log - \frac{ord(\cdot)}{ord(Q)} log Q$ ". Le théorème 2 exprime le quotient $\frac{det_{\zeta}}{det^Q}$ en terme d'une expression quadratique qui peut s'interpréter comme l'obstruction à exprimer det_{ζ} comme " $expTr^Q log$ ". Ceci confirme qu'il y a une non linéarité quadratique cachée dans le déterminant ζ -régularisé, selon les termes mêmes de M. Kontsevich et S. Vishik [KV1].

Références

- [CDP] A. Cardona, C. Ducourtioux, S. Paycha, *Renormalized Traces, Wodzicki Residue and Cohomologies on Algebras of Pseudo-Differential Operators*, en préparation
- [DMP] C. Ducourtioux, J.P. Magnot et S. Paycha, *Geometry on Current Groups from the perspective of Regularized Traces*, en préparation
- [D] C. Ducourtioux, Thèse, en préparation

- [K] Ch. Kassel, *Le résidu non commutatif [d'après Wodzicki]*, Séminaire Bourbaki **708** (1989)
- [KV1] M.Kontsevich, S. Vishik, *Determinants of elliptic pseudodifferential operators*, Max Planck Preprint (1994)
- [KV2] M.Kontsevich, S. Vishik, *Geometry of determinants of elliptic operators* in Functional Analysis on the Eve of the 21st Century **Vol. I** (ed. S.Gindikin, J.Lepowski,R.L.Wilson) Progress in Mathematics (1994)
- [RS] D.B. Ray, I.M. Singer *R-Torsion and the Laplacian on Riemannian Manifolds*, Adv. Math **T.7** 145-210 (1971)
- [Sh] M.A. Shubin, *Pseudodifferential Operators and Spectral Theory*, Springer Verlag (1987)
- [S] R.T. Seeley, *Complex powers of an elliptic operator* in Proc. Sympos. Pure Math. **10**, 288-307, Amer. Math. Soc. (1968)
- [W] M. Wodzicki, *Non commutative residue* in Lecture Notes in Mathematics **1289** Springer Verlag (1987)

Catherine Ducourtioux
 Laboratoire de Mathématiques Appliquées
 Université Blaise Pascal (Clermont II)
 Complexe Universitaire des Cézeaux
 63177 Aubière Cedex
 c.ducour@ucfma.univ-bpclermont.fr