NICOLE DESOLNEUX-MOULIS, MATHÉMATICIENNE

par

Michèle Audin

Nicole Desolneux-Moulis est décédée le 22 novembre 1999. Elle avait cinquante-six ans.

Les mathématiques ...

Nicole était une spécialiste de la géométrie des variétés de dimension infinie et des systèmes hamiltoniens. Je vais essayer de donner une idée, un parfum, du type de problèmes auxquels elle s'est intéressée.

De nombreux espaces indispensables à la compréhension de la géométrie des variétés (même de dimension finie) sont des variétés de dimension infinie, par exemple, les espaces de chemins ou de lacets, plus généralement les espaces d'applications d'une variété dans une autre. Les variétés banachiques, ou hilbertiennes, sont, comme les variétés tout court, des espaces localement modelés sur un espace vectoriel. Ici c'est un espace de Banach ou de Hilbert (de dimension infinie). Les problèmes d'analyse sont plus délicats, on s'en doute, qu'en dimension finie. Qu'on pense au rôle que jouent l'approximation des fonctions ou le théorème des fonctions implicites en géométrie différentielle classique. C'est sur ces problèmes difficiles (approximation, théorème des fonctions implicites...) et sur quelques applications que Nicole avait fait sa thèse et ses premiers travaux [**1, 2, 3, 4**].

Les « systèmes hamiltoniens » sont les équations différentielles qui décrivent les mouvements d'un système mécanique dont l'énergie est conservée. Par exemple, le

C'est avec une grande émotion que j'ai reçu les encouragements et les conseils de Jean-Paul Desolneux, le mari de Nicole, qui m'a aidée à achever ce texte. Qu'il en soit remercié. Je remercie aussi Nicole Berline, Alain Chenciner et Paulette Libermann pour leur aide précieuse.

« problème à n corps », un problème de la mécanique céleste, celui du Soleil, de la Terre et de la Lune (pour $n = 3$), les gyroscopes et toupies, les problèmes de géodésiques — une particule libre sur une surface décrit une géodésique de cette surface — etc.

L'énergie est une fonction H de deux familles de variables $q_1, \ldots, q_n$ et $p_1, \ldots, p_n$ (on peut penser aux q comme à des positions et aux p comme à des moments) et le système différentiel est celui des équations de Hamilton :

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}.$$

Plus globalement (c'est-à-dire sans utiliser de coordonnées) il s'agit d'un certain type [(1)] de champ de vecteurs sur une variété symplectique.

Une question qui a une certaine importance — même du point de vue pratique — c'est de savoir si une telle équation différentielle a des solutions périodiques ou des solutions dont on est sûrs qu'elles ne partent pas à l'infini.

Le problème des orbites périodiques est un problème de géométrie symplectique. On peut aussi considérer les orbites périodiques comme les points critiques d'une certaine fonctionnelle... sur un espace de chemins tracés dans l'espace des $(q, p) \ldots$ nous voilà revenus aux variétés de dimension infinie ! C'est une des façons de faire le lien entre les deux types de problèmes. Nicole avait fait un exposé au séminaire Bourbaki sur les orbites périodiques **[5]** [(2)].

Pour ce qui est du point de vue pratique, elle a aussi écrit des articles avec des astronomes **[6, 7]** dans lesquels sont démontrés, donc expliqués théoriquement, des résultats sur les orbites périodiques de certains systèmes de la mécanique stellaire qui avaient été observés expérimentalement.

Pour certains systèmes hamiltoniens, on sait qu'aucune trajectoire ne part à l'infini, simplement parce que les trajectoires s'enroulent sur des tores, on dit qu'elles sont quasi-périodiques. Ces tores remplissent notre espace de phases en le « feuilletant », comme les cercles (tores de dimensionl) concentriques remplissent le plan sur la figure 1. Ces systèmes sont les systèmes « complètement intégrables » dont il y a de très beaux exemples classiques comme la toupie ou les géodésiques d'une surface de révolution ou d'un ellipsoïde... mais pas le problème à trois corps !

Ce feuilletage de l'espace de phases par des tores est un feuilletage singulier, ce qui veut dire que la plupart des feuilles sont des tores de dimension n (la moitié de la dimension de l'espace de phases, le nombre de variables p ou q) mais il y a des accidents, des tores de dimension plus petite, comme le centre des cercles (tore de

(1) Pas n'importe quel champ de vecteurs : comme pour un gradient, on aura remarqué que les points où il s'annule (ceux où $\dot{q}$ et $\dot{p}$ sont nuls) sont les points critiques de la fonction H.

(2) Elle a d'ailleurs fait beaucoup d'exposés dont les auditeurs se souviennent, notamment au séminaire de Michael Herman à l'école polytechnique et à Paris 7 et plus récemment au séminaire de lecture des « méthodes nouvelles de la mévanique céleste » (de Poincaré) de Chenciner et Laskar.

dimension 0) sur la figure 1, ou des tores qui ne sont pas tout à fait des tores, comme le tore « pincé » de la figure 2.

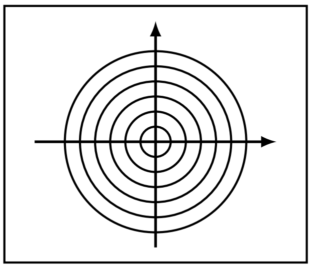

Figure 1

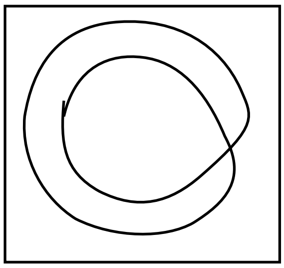

Figure 2

Les deux situations représentées sur les figures 1 et 2 apparaissent effectivement dans deux systèmes complètement intégrables simples mais respectables, l'oscillateur harmonique ($H = p^2 + q^2, n = 1$) pour l'un et le pendule sphérique, système constitué d'une bille se déplaçant sur une sphère sous la seule influence de la pesanteur.

C'est à l'étude des systèmes intégrables et plus particulièrement à l'étude du feuilletage par les tores que Nicole a consacré les articles **[8, 9]**. Elle y étudie comment se comportent les solutions du système qui vivent sur les tores singuliers du feuilletage et ce feuilletage lui-même. Elle en déduit une description des bifurcations des tores, comme sur la figure 3 ou l'on voit en coupe un tore (l'enveloppe extérieure) qui devient deux tores (les deux fins cylindres intérieurs) après le passage par le tore singulier (le cylindre en huit). Ce sont des résultats qui étaient énoncés dans des articles de Fomenko.

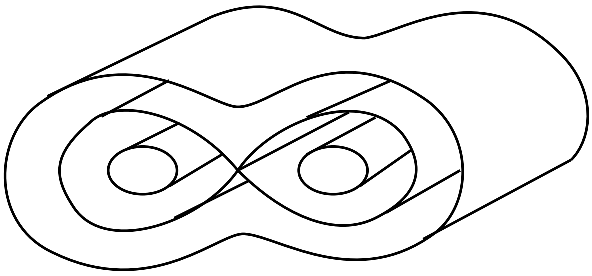

Figure 3

Plus récemment, avec Alain Chenciner, elle avait étudié les minima de la fonctionnelle d' action dans le problème à n corps **[10, 11]**, un système hamiltonien et à nouveau les variétés de dimension infinie.

... et Nicole

Les mathématiques des systèmes hamiltoniens sont un très beau sujet et j'aurais plaisir à en parler plus longuement — je pense aussi que ça aurait fait plaisir à Nicole. Mais je voulais seulement donner ici une petite idée du type de mathématiques qui intéressaient Nicole.

Je ne vais pas raconter sa vie, sa carrière. Nicole a fait d'innombrables choses, elle a joué un rôle irremplaçable, notamment à Lyon, d'autres l'ont dit (voir **[12]**). Un article de Paulette Libermann **[13]** dans le journal des anciens élèves de l'E.N.S. retrace les grandes étapes de la vie de Nicole. Laissez-moi évoquer brièvement la personnalité de Nicole à travers quelques souvenirs.

Lorsque j'étais une mathématicienne débutante, j'apercevais souvent Nicole au séminaire à Orsay. En plus d'être une femme, elle avait une particularité remarquable : elle souriait. Et elle s'intéressait à ce que faisaient les jeunes. La première fois que j'ai fait un exposé dans un grand amphithéâtre, c'est elle qui m'avait invitée à le faire, dans les débuts du séminaire sud-rhodanien **[14]** Lyon, en 1983.

J'ai rencontré Nicole de loin en loin, au rythme des séminaires symplectiques, des congrès, des jurys de thèse, au rythme de nos travaux sur les systèmes intégrables. Nous avons calculé le volume d'une baignoire avec sa fille (1) pendant un congrès à la Grande Motte, elle a apporté un mécano à la mienne quand elle est venue à Strasbourg pour la thèse de Zung.

J'ai finalement fait assez peu de choses avec elle. On se rencontrait, on ne se voyait plus pendant quelques temps, on se retrouvait et on échangeait les nouvelles comme si on s'était quittées la veille. Elle était toujours la personnalité chaleureuse et le sourire lumineux, celle qui était capable de faire travailler les mathématiciens lyonnais ensemble, de diriger le Sud-Rhodanien, d'organiser des congrès, des écoles d'été, de présider la commission de spécialistes, de développer la bibliothèque... tout en gardant l'équilibre entre ces activités et sa vie familiale, heureuse de voir sa fille Agnès se lancer dans la même voie qu'elle et son fils Yvan s'engager dans une carrière professionnelle en économie.

On se reperdait de vue, j'entendais parler d'elle, elle était malade, mais, jusqu'à l'année dernière, la vie continuait, elle était là et c'était important.

Références

[1] Nicole Moulis. Approximation de fonctions différentiables sur certains espaces de Banach. *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)*, 21(4) :293-345, 1971.

[2] Nicole Moulis. *Structures de Fredholm sur les variétés Hilbertiennes*. Springer-Verlag, Berlin, 1972. Lecture Notes in Mathematics, Vol. 259.

(1) qui était encore trop jeune pour être une « jeune mathématicienne »

[3] Nicole Desolneux-Moulis. Théorie du degré dans certains espaces de Fréchet, d'après R. S. Hamilton. *Mém. Soc. Math. France*, 46 :173-180,1976. Journées sur la Géométrie de la Dimension Infinie et ses Applications à l'Analyse et à la Topologie (Univ. Claude Bernard-Lyon I, Lyon, 1975).

[4] Nicole Desolneux-Moulis. à propos du théorème de Newlander-Nirenberg. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A-B*, 290(23) :1087-1089, 1980.

[5] Nicole Desolneux-Moulis. Orbites périodiques des systèmes hamiltoniens autonomes (d'après Clarke, Ekeland-Lasry, Moser, Rabinowitz, Weinstein). In *Bourbaki Seminar, Vol. 1979/80*, pages 156-173. Springer, Berlin, 1981.

[6] A. Hayli, N. Desolneux, and G. Galletta. Orbites périodiques dans un potentiel à trois dimensions. *Astronom. and Astrophys.*, 122(1-2) :137-142,1983.

[7] P. Cartigny, N. Desolneux, and A. Hayli. Orbites périodiques dans un potentiel à trois dimensions. II. Bifurcations. *Celestial Mech.*, 33(3) :217-227, 1984.

[8] N. Desolneux-Moulis. Dynamique des systèmes hamiltoniens complètement intégrables sur les variétés compactes. In *Géométrie symplectique et mécanique (La Grande Motte, 1988)*, pages 75-83. Springer, Berlin, 1990.

[9] N. Desolneux-Moulis. Singular Lagrangian foliation associated to an integrable Hamiltonian vector field. In *Symplectic geometry, groupoids, and integrable systems (Berkeley, CA, 1989)*, pages 129-136. Springer, New York, 1991.

[10] Alain Chenciner and Nicole Desolneux. Minima de l'intégrale d'action et équilibres relatifs de n corps. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.*, 326(10) :1209-1212, 1998.

[11] Alain Chenciner and Nicole Desolneux. Erratum : "Minima of the action integral and relative equilibria of n bodies". *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.*, 327(2) :193, 1998.

[12] F. du Cloux and Y. Kerbrat. Nicole Desolneux-Moulis (1943-1999). *Gazette des Mathématiciens*, 84, 2000.

[13] P. Libermann. Nicole Desolneux-Moulis (1943-1999). *Journal des anciens élèves de l'E.N.S.*, 2000.

[14] P. Dazord and N. Desolneux-Moulis, editors. *Séminaire sud-rhodanien de géométrie.* I. Hermann, Paris, 1984. Géométrie symplectique et de contact. [Symplectic and contact geometry], Held at the Université Claude Bernard, Lyon, June 14-17, 1983.

N. B. Cette liste de références ne contient pas une liste *exhaustive* des travaux de Nicole.

Michèle Audin, Institut de Recherche Mathématique Avancée, Université Louis Pasteur et CNRS, 7 rue René Descartes, 67084 Strasbourg cedex, France • E-mail : Michele.Audin@math.u-strasbg.fr • Url : http ://www-irma.u-strasbg.fr/~maudin