

# Analyse harmonique sur les groupes et les espaces symétriques

Pascale Harinck

## 1 Introduction :

Un problème important de l'analyse harmonique sur les groupes ou espaces symétriques est la formule de Plancherel. C'est une généralisation du théorème de Plancherel classique sur  $\mathbb{R}$  qui dit que la transformée de Fourier s'étend en une isométrie de  $L^2(\mathbb{R})$  dans lui-même. Pour  $f$  une fonction de classe  $C^\infty$  à support compact, on définit sa transformée de Fourier  $\hat{f}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} f(y)e^{ixy} dy$  et on a la formule d'inversion  $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-ixy} \hat{f}(y) dy$ . Un rôle particulier est joué par les fonctions  $x \rightarrow e^{ixy}$  : d'une part, ce sont des fonctions propres pour l'action de  $\frac{d}{dx}$  (qui engendre l'algèbre des opérateurs différentiels à coefficients constants sur  $\mathbb{R}$  invariants par translation), d'autre part ce sont les morphismes de groupe continus de  $\mathbb{R}$  dans le groupe unitaire de  $\mathbb{C}^*$  (de tels morphismes s'appellent des caractères unitaires ou des représentations de dimension 1 unitaires).

La généralisation de cette théorie sur les groupes de Lie ou espaces symétriques est liée à la théorie des représentations et à la décomposition spectrale des opérateurs différentiels. Après avoir posé le problème dans sa généralité, j'expliquerai comment la méthode des orbites permet d'obtenir la formule d'inversion de Fourier sur  $SL(2, \mathbb{R})$ .

## 2 Préliminaires :

Un groupe de Lie  $G$  est un groupe muni d'une structure de variété analytique pour laquelle l'application  $(x, y) \rightarrow xy^{-1}$  est analytique. L'espace tangent  $\mathfrak{g}$  en l'élément neutre  $e$  de  $G$  s'appelle l'algèbre de Lie de  $G$ .

Le groupe  $G$  agit sur lui-même par les automorphismes  $\varphi_g(x) = gxg^{-1}$ . La différentielle  $Ad(g) \in End(\mathfrak{g})$  de  $\varphi_g$  en  $e$  est appelée l'action adjointe de  $G$  sur  $\mathfrak{g}$  et la différentielle  $ad(X)$  de  $Ad$  en  $e$  est un morphisme de  $\mathfrak{g}$  dans  $End(\mathfrak{g})$  appelé action adjointe de  $\mathfrak{g}$ . On note  $[X, Y] = ad(X)(Y)$ . Le crochet  $[, ]$  est une forme antisymétrique qui satisfait l'identité de Jacobi :  $[X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [Y, X]] = 0$ .

Exemple : Le groupe  $SL(n, \mathbb{R})$  est un groupe de Lie d'algèbre de Lie  $sl(n, \mathbb{R}) = \{X \in M(n, \mathbb{R}); trace(X) = 0\}$ . Pour  $g \in St(n, \mathbb{R})$  et pour  $X, Y$  dans  $\mathfrak{g}$ , on a :  $Ad(g)X = gXg^{-1}$  et  $[X, Y] = XY - YX$ .

On définit la forme de Killing sur  $\mathfrak{g} \times \mathfrak{g}$  par  $\kappa(X, Y) = trace(ad(X)ad(Y))$ . Le groupe  $G$  et l'algèbre de Lie  $\mathfrak{g}$  sont dits semi-simples si la forme  $\kappa$  est non dégénérée et réductifs si  $\mathfrak{g}$  est le produit d'une algèbre abélienne et d'une algèbre de Lie semi-simple.

On appelle espace symétrique réductif le quotient  $\mathbb{X} = G/H$  où  $G$  est un groupe de Lie réductif réel muni d'une involution  $\sigma$  et  $H$  est un sous-groupe ouvert du groupe des points de  $G$  fixés par  $\sigma$ . Dans ce cas  $H$  est une groupe de Lie réductif.

On note  $\mathfrak{g}$  et  $\mathfrak{h}$  les algèbres de Lie de  $G$  et  $H$ , on note encore par  $\sigma$  la différentielle de  $\sigma$ . Elle induit une décomposition  $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} + \mathfrak{q}$  où  $\mathfrak{q} = \{X \in \mathfrak{g}; \sigma(X) = -X\}$ .

Un élément  $gH \in \mathbb{X}$  est dit régulier si le centralisateur dans  $\mathfrak{g}$  de  $g\sigma(g)^{-1}$  est abélien, formé d'éléments semi-simples et maximal pour ces propriétés. On note  $\mathbb{X}_{reg}$  l'ensemble des éléments réguliers de  $\mathbb{X}$ . Si  $x$  est un élément régulier, son orbite  $\Omega = H.x$  sous l'action à gauche de  $H$  possède une mesure invariante  $\nu_\Omega$ .

Le problème auquel on s'intéresse est le suivant : on cherche une normalisation des  $\nu_\Omega$  et un ensemble mesuré  $(\Xi, m)$  tels que pour presque tout  $\xi \in \Xi$  il existe une distribution sphérique  $\Theta_\xi$  (c'est-à-dire une distribution  $H$ -invariante et solution propre de l'algèbre  $\mathbb{D}(\mathbb{X})$  des opérateurs différentiels  $G$ -invariants sur  $\mathbb{X}$ ) et une fonction  $F_\xi$  de classe  $C^\infty$ ,  $H$ -invariante sur  $\mathbb{X}_{reg}$ , solution propre des opérateurs de  $\mathbb{D}(\mathbb{X})$  telles que

$$\nu_{H.x} = \int_{\Xi} F_\xi(x) \Theta_\xi dm(\xi)$$

La formule d'inversion est une formule du type (\*) pour  $x = e_{\mathbb{X}}$ , c'est-à-dire

$$f(e_{\mathbb{X}}) = \int_{\Xi} c_\xi \Theta_\xi(f) dm(\xi) \text{ où les } c_\xi \text{ sont des constantes.}$$

Pour  $G = \mathbb{R}$ , on a  $\Xi = \mathbb{R}$  et les  $\langle \Theta_\xi, f \rangle$  correspondent à la transformée de Fourier de  $f$ .

Ce problème reste ouvert dans ce cadre général et a été résolu pour les deux types d'espaces symétriques suivants :

- (i)  $\mathbb{X} = H = H \times H / \text{diagonale}(H \times H)$
- (ii)  $\mathbb{X} = G/H$  où  $G$  est un groupe de Lie réductif complexe et  $H$  est une forme réelle de  $G$ .

Les idées utilisées dans ces deux cas sont similaires, ceci est dû en partie aux deux faits suivants : l'algèbre  $\mathbb{D}(\mathbb{X})$  est, dans les deux cas, isomorphe à l'algèbre des opérateurs différentiels à coefficients constants  $H$ -invariants sur  $\mathfrak{h}$  et l'espace tangent en  $e_{\mathbb{X}}$  dans (ii) est égal à  $\mathfrak{q} = i\mathfrak{h}$ .

Je vais expliquer les résultats et les méthodes employées sur l'exemple  $H = Sl(2, \mathbb{R})$

### 3 Formule d'inversion pour $St(2, \mathbb{R})$

On considère donc  $H = Sl(2, \mathbb{R})$  et  $\mathfrak{h} = \left\{ X = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 + x_3 \\ x_2 - x_3 & -x_1 \end{pmatrix}; x_j \in \mathbb{R} \right\}$

On considère dans  $\mathfrak{h}$  les deux sous-algèbres suivantes :

$$\mathfrak{t} = \left\{ Y(\theta) = \begin{pmatrix} 0 & \theta \\ -\theta & 0 \end{pmatrix}; \theta \in \mathbb{R} \right\} \text{ et } \mathfrak{a} = \left\{ X(t) = \begin{pmatrix} t & 0 \\ 0 & -t \end{pmatrix}; t \in \mathbb{R} \right\}$$

Ce sont des sous-algèbres de Cartan, c'est-à-dire des sous-algèbres abéliennes formées d'éléments semi-simples et maximales pour ces propriétés. Elles ne sont pas conjuguées sous l'action de  $H$ . Un élément diagonalisable avec valeurs propres distinctes (dans  $\mathfrak{h}$  ou  $H$ ) est dit régulier et on note  $\mathfrak{h}_{reg}$  l'ensemble des éléments réguliers de  $\mathfrak{h}$ .

Soit  $T = \left\{ y(\theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}; \theta \in \mathbb{R} \right\}$  et  $A = \left\{ a(t) = \begin{pmatrix} \varepsilon e^t & 0 \\ 0 & \varepsilon e^{-t} \end{pmatrix}; t \in \mathbb{R} \text{ et } \varepsilon = \pm 1 \right\}$ .

On a alors  $\mathfrak{h}_{reg} = Ad(H)\mathfrak{a}_{reg} \cup Ad(H)\mathfrak{t}_{reg}$  et  $H_{reg} = \cup_{h \in H} (hA_{reg}h^{-1} \cup hT_{reg}h^{-1})$ .

On va utiliser l'application exponentielle  $exp$  pour lier l'analyse harmonique sur  $H$  à celle de  $\mathfrak{h}$ . D'autre part, on cherche à ramener la preuve de la formule d'inversion (\*) à la formule d'inversion classique sur  $\mathfrak{a}$  et  $\mathfrak{t}$ .

Pour cela, on introduit la mesure de Liouville sur les orbites de  $H$  dans  $\mathfrak{h}_{reg}$ . Soit  $X$  un élément régulier de  $\mathfrak{h}$ . Il est conjugué par  $H$  soit à un élément de  $\mathfrak{a}$  soit à un élément  $\mathfrak{t}$ . On

peut donc supposer  $X \in \mathfrak{b}$  avec  $\mathfrak{b} = \mathfrak{a}$  ou  $\mathfrak{t}$ . L'espace tangent à l'orbite  $H.X$  est isomorphe à  $\mathfrak{h}/\mathfrak{b} = [\mathfrak{h}, X]$ . On définit alors la forme  $\sigma_{H.X}$  sur  $\mathfrak{h}/\mathfrak{b}$  par  $\sigma_{H.X}([Y, X], [Z, X]) = [X, [Y, Z]]$ . C'est une 2-forme alternée non dégénérée fermée sur  $\mathfrak{h}/\mathfrak{b}$ . Elle définit donc une mesure  $\beta_{H.X} = \frac{\sigma_{H.X}}{2\pi}$  sur  $H.X$  appelée mesure de Liouville. Ici, on a :

$$H.X(t) = \left\{ \left( \begin{array}{cc} x_1 & x_2 + x_3 \\ x_2 - x_3 & -x_1 \end{array} \right); -x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = -t^2 \right\} \text{ et } \beta_{H.X(t)} = \frac{dx_2 dx_3}{|x_1|}$$

$$H.Y(\theta) = \left\{ \left( \begin{array}{cc} x_1 & x_2 + x_3 \\ x_2 - x_3 & -x_1 \end{array} \right); -x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = \theta^2 \right\} \text{ et } \beta_{H.Y(\theta)} = \frac{dx_1 dx_2}{|x_3|}.$$

Pour  $f \in \mathcal{D}(\mathfrak{h})$  (c'est-à-dire de classe  $C^\infty$  à support compact), on définit l'intégrale orbitale de  $f$  par  $\mathcal{M}(\{f\})(\mathcal{X}) = \int \pi \beta_{H.X}$ . Cette fonction vérifie les propriétés suivantes :

- (I 1) elle est  $H$ -invariante et de classe  $C^\infty$  sur  $\mathfrak{h}_{reg}$ ,
- (I 2) sa restriction à  $\mathfrak{b}_{reg}$  pour  $\mathfrak{b} = \mathfrak{t}$  ou  $\mathfrak{a}$  est nulle en dehors d'un compact,
- (I 3) sa restriction à  $\mathfrak{a}_{reg}$  se prolonge de façon  $C^\infty$  à  $\mathfrak{a}$ ,
- (I 4) pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on a  $\lim_{\theta \rightarrow 0^+} \left(\frac{d}{d\theta}\right)^n (\mathcal{M}(f))(Y(\theta)) + \lim_{\theta \rightarrow 0^-} \left(\frac{d}{d\theta}\right)^n (\mathcal{M}(f))(Y(\theta)) = \lim_{t \rightarrow 0} \left(\frac{d}{dt}\right)^n (\mathcal{M}(f))(X(t))$  (relation de sauts).

$$(I 5) \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{d}{d\theta} (\text{sign}(\theta) \mathcal{M}(f))(Y(\theta)) = -2f(0) \text{ (formule limite d'Harish-Chandra)}$$

Soit  $I(\mathfrak{h})$  l'ensemble des fonctions vérifiant les propriétés (I 1) – (I 5).

**Théorème 3.1 (B1)** *L'application  $\mathcal{M}$  est surjective de  $D(\mathfrak{h})$  dans  $I(\mathfrak{h})$  et sa transposée est une bijection entre le dual  $I(\mathfrak{h})'$  de  $I(\mathfrak{h})$  et l'espace des distributions  $H$ -invariantes sur  $\mathfrak{h}$ .*

**Théorème 3.2 (H-C1)** *La mesure de Liouville est tempérée (c'est-à-dire qu'il existe  $r > 0$  tel que  $\int_{H.X} (1 + \|\xi\|^2)^{-r} d\beta_{H.X}(\xi) < \infty$ .)*

En particulier on peut définir sa transformée de Fourier  $\hat{\beta}_{H.X}$ .

L'algèbre  $S(\mathfrak{h})^H$  des polynômes  $H$ -invariants sur  $\mathfrak{h}^*$  s'identifie à l'algèbre des opérateurs différentiels  $H$ -invariants à coefficients constants par l'application  $X \rightarrow \partial(X)$  défini par  $\partial(X)\varphi(Y) = \frac{d}{dt}(\varphi(X + tY))_{t=0}$ .

On a alors  $\partial(p)\hat{\beta}_{H.X} = p(iX)\hat{\beta}_{H.X}$ .

**Théorème 3.3 (H-C2)** *La distribution  $\hat{\beta}_{H.X}$  est une fonction localement intégrable et analytique sur  $\mathfrak{h}_{reg}$ .*

Les résultats d'Harish-Chandra et une formule due à Rossmann permettent de calculer les transformées de Fourier d'orbites. Ici un simple calcul permet d'obtenir :

$$\hat{\beta}_{H.Y(\lambda)}(Y(\theta)) = \frac{e^{-i\lambda\theta}}{2i\theta} \text{sign}(\lambda) \quad \hat{\beta}_{H.Y(\lambda)}(X(t)) = \frac{e^{-|t\lambda|}}{|2i|} \text{sign}(\lambda)$$

et

$$\hat{\beta}_{H.X(s)}(Y(\theta)) = 0 \quad \hat{\beta}_{H.X(s)}(X(t)) = \frac{e^{ist} + e^{-ist}}{|2t|}$$

Maintenant, pour  $f$  une fonction localement intégrable sur  $\mathfrak{h}$ , la décomposition  $\mathfrak{h}_{reg} =$

$Ad(H)\mathfrak{a}_{reg} \cup Ad(H)\mathfrak{t}_{reg}$  permet d'écrire (formule d'intégration de Weyl) :

$$\int_{\mathfrak{h}} f(X) dX = \int_{\mathbb{R}} |2\theta| \mathcal{M}(f)(Y(\theta)) d\theta + \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} |2t| \mathcal{M}(f)(X(t)) dt$$

On obtient alors

$$\begin{aligned} \mathcal{M}(f)(X) &= 2\pi\beta_{H,X}(f) = 2\pi\hat{\beta}_{H,X}(\hat{f}) \\ &= \int_{\mathbb{R}} |2\theta| \hat{\beta}_{H,X}(Y(\theta)) \hat{\beta}_{H,Y(\theta)}(f) d\theta + \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} |2t| \hat{\beta}_{H,X}(X(t)) \hat{\beta}_{H,X(t)}(f) dt \end{aligned}$$

C'est la formule d'inversion des intégrales orbitales sur  $\mathfrak{h}$ .

Le but est ensuite d'utiliser l'application exponentielle pour "remonter" les objets  $\hat{\beta}_{H,X}(f)$  et  $|2t| \hat{\beta}_{H,X}(X(t))$  au niveau du groupe. Soit  $j(X)$  le jacobien de l'application exponentielle en  $X$ . On a :  $j(X(t))^{1/2} = \frac{\sinh t}{f}$  et  $j(Y(\theta))^{1/2} = \frac{\sin \theta}{\theta}$ . On pose :

$$\begin{aligned} \Theta_n(\varepsilon \exp X) &= \varepsilon^{1+n} \hat{\beta}_{H,Y(n)}(X) j(X)^{1/2} \\ \Theta_s^+(\varepsilon \exp X) &= \hat{\beta}_{H,X(s)}(X) j(X)^{1/2} \quad \Theta_s^-(\varepsilon \exp X) = \varepsilon \hat{\beta}_{H,X(s)}(X) j(X)^{1/2} \end{aligned}$$

**Théorème 3.4** *Les fonctions  $\Theta_n$  et  $\Theta_s^\pm$  sont des fonctions localement intégrables et elles définissent des distributions  $H$ -invariantes et solution propres de  $D(H)$ .*

On pose  $\Theta_0^\pm = \lim_{n \rightarrow 0^\pm} \Theta_n$  (limite dans l'espace des distributions).

On définit l'intégrale orbitale de  $f \in D(H)$  sur  $H_{reg}$  par

$\mathcal{M}_H(f)(\varepsilon \exp X) = j(X)^{1/2} \mathcal{M}(f \circ \exp)(X)$ . Elle vérifie des propriétés analogues sur  $H$  à I1 – I5.

Maintenant, on introduit les fonctions suivantes (fonctions orbitales) : pour  $X \in \mathfrak{b}_{reg}$  avec  $\mathfrak{b} = \mathfrak{a}$  ou  $\mathfrak{t}$ , on pose, pour  $n \in \mathbb{N}^*$

$$F_n(\varepsilon \exp X) = \varepsilon \hat{\beta}_{H,X} \left( Y(n) |2n| \right) \quad F_0^\pm = \lim_{n \rightarrow 0^\pm} F_n$$

et pour  $s \in \mathbb{R}$  et  $\varepsilon = \pm 1$ , on pose  $F_{\varepsilon,s}(\varepsilon \exp X) = \sum_{Y \in \mathfrak{b}; \exp Y=1} \hat{\beta}_{H,Y}(X(s)) |2s|$  et  $F_{\pm,s} = -(F_{1,s} \pm F_{-1,s})$ .

**Théorème 3.5 (B2)** (i) *Les fonctions  $F_n, F_0^\pm$  et  $F^\pm$  vérifient sur  $H$  les propriétés (I1), (I3), (I4) et (I5) traduites sur le groupe  $H$  (mais pas (I2) qui correspond à la condition sur le support). Elles sont propres sous  $t^3$  action de  $D(H)$*

(ii) *Pour  $f \in D(H)$ , on a*

$$\mathcal{M}_H(f)(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}; n \neq 0} F_n(x) \Theta_n(f) - i (\Theta_0^+(f) - \Theta_0^-(f)) + \frac{1}{2} \int_{s>0} (F_{+,s}(x) \Theta_s^+(f) + F_{-,s}(x) \Theta_s^-(f)) ds$$

**Corollaire 3.1** *Pour  $\varphi \in D(H)$ , on a*

$$2\pi\varphi(e) =$$

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}; n \neq 0} |n| \Theta_n(\varphi) + \frac{1}{2} \int_{s>0} s \tanh\left(\frac{\pi s}{2}\right) \Theta_s^+(\varphi) ds + \frac{1}{2} \int_{s>0} s \coth\left(\frac{\pi s}{2}\right) \Theta_s^-(\varphi) ds$$

**Remarque :** Les distributions  $\Theta_n$  et  $\Theta_s^\pm$  s'interprète en terme de représentations de  $H$  de la manière suivante :

Soit  $\mathcal{H}$  un espace de Hilbert et soit  $\pi$  un morphisme de groupe de  $H$  dans le groupe des opérateurs unitaires de  $\mathcal{H}$  tel que les applications  $(h, v) \rightarrow \pi(h)v$  soient continues. Un tel morphisme est appelé représentation unitaire de  $H$  dans  $\mathcal{H}$ . Lorsque  $\mathcal{H}$  n'admet pas de sous-espaces propres fermés stables sous l'action de  $H$ , on dit que  $\pi$  est irréductible. On définit alors la trace de  $\pi$  de la manière suivante. Si  $(e_i)_{i \in I}$  est une base hilbertienne de  $H$  et  $\varphi \in D(H)$ , on pose  $Tr(\pi(\varphi)) = \sum_{i \in I} \langle \pi(\varphi)e_i, e_i \rangle$ . C'est une distribution sur  $H$  qui est  $H$ -invariante et solution propre de  $D(H)$ .

Les distributions  $\Theta_n$  et  $\Theta_s^\pm$  sont les caractères de certaines représentations unitaires et irréductibles de  $H$ .

## Références

- [B1] A. Bouaziz, Intégrales orbitales sur les algèbres de Lie réductives, *Inv. Math.* **115** (1994), 163-207.
- [B2] A. Bouaziz, Formule d'inversion des intégrales orbitales sur les groupes de Lie réductifs *J. Funct. Anal.* **134** (1995), 100-1827..
- [D] P. Delorme, Inversion des intégrales orbitales sur certains espaces symétriques réductifs, Séminaire Bourbaki, 1995-96, num. 810,
- [D-V] M. Duflo et M. Vergne, La formule de Plancherel des groupes de Lie semi-simples réels, *Adv. Studies in Pure Mathematics* **14** (1988), 289-336.
- [HC1] Harish-Chandra, Fourier transforms on semisimple Lie algebras I-II, *Amer. J. Math.* **79** (1957), 193-257, 653-686.
- [HC2] Harish-Chandra, Invariant eigendistributions on semisimple Lie algebras, *Inst. Hautes Etudes Publ. Math.* **27** (1965), 5-54.
- [HC3] Harish-Chandra, Plancherel formula for the  $2 \times 2$  real unimodular group, *Proc. Nat. Acad. Sci.* **38** (1952), 337-341.
- [Hal] P. Harinck, Base de la série la plus continue de fonctions généralisées sphériques sur  $G_{\mathbb{C}}/G_{\mathbb{R}}$ , *Journal of Funct. Anal.* **153** (1998), p1-51,
- [Ha2] P. Harinck, Fonctions orbitales sur  $G_{\mathbb{C}}/G_{\mathbb{R}}$ . Formule d'inversion des intégrales orbitales et formule de Plancherel, *Journal of Funct. Anal.* **153** (1998), p52-107.
- [R] W. Rossmann, Kirillov's character formula for reductive Lie groups, *Invent. Math.* **48** (1978), 207-220.