FORMES QUADRATIQUES ET INVARIANTS DE CORPS

ANNE QUÉGUINER-MATHIEU

1. Introduction

L'objectif de cel exposé est de présenter un certain nombre d'invariants que l'on peut associer à un corps, et qui sont définis à l'aide des formes quadratiques. Il s'agit, en particulier, du niveau, du nombre de Pythagore, ainsi que du u-invariant, La valeur de ces invariants dépend du comportement sur ce corps des formes quadratiques en géneral, ou de certaines formes quadratiques particulières.

Les résultats mentionnés ici sont présentés de manière détaillée dans le livre de Pfister [P], à l'exception de quelques progrès récents, notamment dus à Hoffinann [H1] et Izhboldin [I]. Pour plus de détails, le lecteur pourra également consulter l'article de Hoffmann [H2]

2. Formes quadratiques

Commençons par quelques rappels concernant les formes quadratiques. Pour plus de details, le lecteur pourra consulter les livres de Lam [L] et Scharlau [S].

Soient K un corps de caractéristique différente de 2, et V un espace vectoriel de dimension finie sur K.

Définition 2.1. Une forme quadratique sur V est une application

$$q : \ V \ \to K$$

vérifiant $q(\alpha.v) = \alpha^2 q(v)$ pour tous $\alpha \in K$ et $v \in V$, et telle que l'application $b_q : V \times V \to K, (x,\ y) \mapsto \frac{1}{2}(q(x+y) - q(x) - q(y))$ est bilinéaire.

Proposition 2.2. *L'espace vectoriel* V *admet une base* $(e_1,\ \dots,\ e_n)$ *qui est orthogonale pour* q_J *c'est-à-dire telle que* $b_q(e_i,\ e_j) = 0$ *si* $i \neq j$.

On a alors $q(x_1e_1 + \cdots + x_ne_n) = a_1x_1^2 + \cdots + a_nx_n^2$, où $a_i = q(e_i)$ pour tout i. Autrement dit, $(V,\ q)$ est isomorphe à la forme diagonale notée

Date : November 16, 2000.

$< a_1, \ldots, a_n >$définie par

$$< a_1, \ldots, a_n >: \quad \begin{array}{ccc} K^n & \to & K \\ (x_1, \ldots, x_n) & \mapsto & a_1 x_1^2 + \cdots + a_n x_n^2 \end{array}$$

2.1. Classification des formes quadratiques. Sur certains corps, on peut classer les formes quadratiques, à isomorphisme près, à l'aide d'invariants. Rappelons, à titre d'exemple, les faits suivants :

Deux formes quadratiques sur un corps algébriquement clos sont isomorphes si et seulement si elles ont la même dimension.
Le théorème de Sylvester nous dit que deux formes quadratiques réelles sont isomorphes si et seulement si elles ont la même dimension et la même signature, la signature étant la différence entre le nombre de coefficients positifs et le nombre de coefficients négatifs dans une diagonalisation quelconque de cette forme.
De même, on sait que les formes quadratiques sont classifiées par leur dimension et leur discriminant sur un corps fini, et par leur dimension, leur discriminant et leur invariant de Hasse sur un corps p-adique. A l'aide de théorèmes de type local/global, ceci permet de classifier les formes sur $\mathbb{Q}$ ou sur un corps de nombres.

2.2. **Isotropie.** Comme les résultats précédents le soulignent, le comportement des formes quadratiques dépend du corps sur lequel on se place. Regardons en particulier ce qui se passe du point de vue de l'isotropie.
Soit $q : V \to K$ une forme quadratique.
Définition 2.3. Soit $a \in K$. On dit que q représente a s'il existe un vecteur non nul $v \in V$ tel que $q(v) = a$.
Par exemple, la forme quadratique $< a_1, \ldots, a_n >$ représente a_i pour tout i.
Définition 2.4. La forme quadratique q est dite isotrope si elle représente 0, et anisotrope sinon.
En particulier, sur un corps algébriquement clos, toute forme de dimension supérieure ou égale à 2 est isotrope. Sur $\mathbb{R}$, en revanche, la forme $< 1, 1, \ldots, 1 >$ est anisotrope, quelle que soit sa dimension. Enfin, on peut montrer que sur $\mathbb{Q}_p$, toute forme de dimension supérieure ou égale à 5 est isotrope.

3. Niveau d'un corps

Entrons maintenant dans le vif du sujet. Il ne s'agit plus d'étudier les formes quadratiques sur un corps donné, mais de définir des invariants

de ce corps, liés à leur comportement. En particulier, les questions d'isotropie vont jouer un rôle important.
Définition 3.1. Le niveau d'un corps K est le plus petit entier s tel que -1 s'écrit comme une somme de s carrés, ou $+\infty$ si un tel entier n'existe pas.
Exemple 3.2. Le corps $\mathbb{C}$ est de niveau 1, tandis que $\mathbb{R}$ est de niveau $+\infty$.
Le corps K peut être muni d'un ordre si et seulement si il est de niveau $+\infty$ (Artin-Schreier). On dit alors que K est formellement réel.
Le niveau du corps fini $\mathbb{F}_p$ est 1 si $p \equiv 1 \mod 4$ et 2 si $p \equiv 3 \mod 4$.
Le niveau d'un corps de nombre est 1, 2, 4 ou $+\infty$.
Si t est une indéterminée, les corps K et $K(t)$ ont le même niveau.
Remarque 3.3. Soit s le plus petit entier, s'il existe, tel que la forme

$$(s+1) \ < \ 1 \ > = < 1, \ldots, 1 >$$

soit isotrope. Il existe $x_0, \ldots, x_s$ tels que $x_0^2 + \cdots + x_s^2 = 0$. Comme s est minimal, $x_0 \neq 0$. On a alors $-1 = (x_1/x_0)^2 + \cdots + (x_s/x_0)^2$.
Réciproquement, si -1 s'écrit comme une somme de s carrés, alors la forme $(s+1) \ < \ 1 \ >$ est isotrope.
Ainsi, le niveau du corps K est aussi le plus petit entier s tel que la forme $(s+1) \ < \ 1 \ >$ soit isotrope.

Dans les années 30, Van der Waerden formule la question naturelle suivante : quelles sont les valeurs possibles pour le niveau d'un corps ?
En 1934, Kneser prouve que le niveau d'un corps est toujours 1, 2, 4, 8, un multiple de 16 ou $+\infty$. En 1965, Pfister donne une réponse complète à cette question :
Théorème 3.4. (*PfisterJ*
(*i*) *Le niveau d'un corps est soit* $+\infty_f$ *soit une puissance de* 2.
(*ii*) *Le corps* $\mathbb{R}(t_1, \ \ldots, \ t_{2^k})(\sqrt{-(t_1^2 + \cdots + t_{2^k}^2)})$ *est de niveau* 2^k, *pour tout entier non nul* k.
Preuve de (i).
La démonstration de ce résultat utilise les propriétés remarquables de formes quadratiques particulières, maintenant connues sous le nom de formes de Pfister.
Definition 3.5. Soient $a_1 , \ldots, a_n \in K$. La forme quadratique

$$<< a_1, \ldots, a_n >> = < 1, a_1 > \otimes \cdots \otimes < 1, a_n >$$

est appelée une n-forme de Pfister. Elle est de dimension 2^n.

Ces formes sont multiplicatives, au sens suivant :
Proposition 3.6. *Si une forme de Pfister représente les deux éléments a et $b \in K$, alors elle représente également leur produit ab.*
Réciproquement, on peut montrer qu'une forme non isotrope ayant cette propriété est une forme de Pfister.
Comme la forme $2^n < 1 >=< 1, 1 > \otimes \cdots \otimes < 1, 1 >$ est une forme de Pfister, cette propriété de multiplicativité permet de montrer qu'un produit de deux sommes de 2^n carrés s'ecrit encore comme une somme de 2^n carrés, résultat qui n'était auparavant connu que pour $n = 2$, 3 (formules d'Euler et de Cayley).
Revenons à la preuve du théorème précedent. Soit K un corps non formellement réel, et notons s son niveau. Il existe $e_1, \ldots, e_s \in K^\star$ tels que $-1 = e_1^2 + \cdots + e_s^2$, i.e. $1 + e_1^2 + \cdots + e_s^2 = 0$. Considérons l'entier m tel que $2^m \leq s < 2^{m+1}$, et posons $a = 1 + e_1^2 + \cdots + e_{2^m-1}^2$, et $b = e_{2^m}^2 + \cdots + e_s^2$. Comme la forme $2^m < 1 >$ est multiplicative et représente a et b, elle représente aussi $ab = -a^2$. Ainsi, il existe $x_1, \ldots, x_{2^m}$ tel que $-a^2 = x_1^2 + \cdots + x_{2^m}^2$, ce qui prouve que le niveau de K est inférieur ou égal à 2^m. Vue la définition de m, on en déduit que K est exactement de niveau 2^m.
La seconde partie du résultat se démontre en utilisant un théorème de représentation du à Cassels et Pister.

On sait donc maintenant quelles sont les valeurs possibles pour le niveau d'un corps. Mais ceci ne répond pas pour autant à la question de la détermination du niveau d'un corps donné. Pfister a montré que si M est une extension algébrique non formellement réelle de $\mathbb{R}(t_1, \ldots, t_n)$, son niveau est inférieur ou égal à 2^n. Mais c'est l'un des seuls résultats généraux dont on dispose. Si M est une extension algébrique non formellement réelle de $k(t_1, \ldots, t_n)$, pour un corps k quelconque, son niveau semble dépendre très fortement du choix du corps particulier M.

4. Nombre de Pythagore

Soit M une extension algébrique non formellement réelle du corps $\mathbb{R}(t_1, \ldots, t_n)$. Pour montrer que ce corps M est de niveau au plus 2^n, on montre en fait, à l'aide des formes de Pfister, que toute somme de carres' dans M peut s'écrire comme une somme d'au plus 2^n carrés. Ceci nous amène à la notion de nombre de Pythagore.
Notons $S_n(K)$ l'ensemble des eléments $x \in K$ qui peuvent d'écn·re comme une somme de n carrés, $x = x_1^2 + \cdots + x_n^2, x_i \in K^\star$, et $S(K) = \bigcup_{n>0} S_n(K)$.

Définition 4.1. Pour tout $a \in S(K)$, on appelle longueur de a, et on note $l(a)$ le plus petit entier t tel que $a \in S_l(K)$. Le nombre de Pythagore de K est

$$p(K) = \mathrm{S}up\{l(a),\ a \in S(K)\} \in \mathrm{PW} \cup \{+\infty\}.$$

Cet invariant n'est donc pas de même nature que le niveau, puisqu'il ne s'agit pas ici de savoir si certains nombres sont ou non des sommes de carrés. Ce qu'il nous dit, en revanche, c'est que toute somme de carrés dans K s'écrit comme une somme d'au plus $p(K)$ carrés.
Remarque 4.2. Si K est de nombre de Pythagore 1, alors pour tous a et $b \in K$, il existe $c \in K$ tel que $a^2 + b^2 = c^2$.
Exemple 4.3. Les corps $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$ sont de nombre de Pythagore 1, ainsi que tout corps réel clos ou quadratiquement clos.
Un corps fini est de nombre de Pythagore 2.
Le problème du calcul du nombre de Pythagore d'un corps semble être au moins aussi difficile que le problème analogue pour le niveau. Citons un exemple.
Comme on l'a mentionné au début de cette partie, si M est une extension algébrique de $\mathbb{R}(t_1,\ \ldots,\ t_n)$, alors $p(M) \leq 2^n$. Mais on me sait pas si cette borne est la meilleure possible. On ne connait même pas le nombre de Pythagore de $\mathbb{R}(t_1,\ \ldots,\ i_n)$, pour n quelconque. On sait simplement que $p(\mathbb{R}) = 1, p(\mathbb{R}(t)) = 2$ et $p(\mathbb{R}(t_1,\ t_2)) = 4$. Si les deux premiers résultats sont triviaux, ce n'est pas le cas du troisième. La démonstration qui en a été donnée en 1971 par C˙assels, Ellison et Pfister utilise la théorie des courbes elliptiques sur les corps de fonctions, tandis que celle, plus récente, de Colliot-Thélène, utilise des résultats non triviaux de géométrie algébrique.
Intéressons-nous maintenant à la question de savoir quelles sont les valeurs possibles pour cet invariant.
4.1. Cas des corps non formellement réels. Dans toute cette partie, K désigne un corps non formellement réel, et on note s son niveau. On a alors
Proposition 4.4. *Si K est non formellement réelf ators $S(K) = K$ et $s(K) \leq p(K) \leq s(K) + 1$.*
En effet, pour tout $x \in K$, on a $x = (\frac{x+1}{2})^2 + (-1)(\frac{x-1}{2})^2$ Ainsi, x appartient à $S(K)$, et est de longueur au plus $t(-1) + 1 = s(K) + 1$.
Corollaire 4.5. *Le nombre de Pythagore d'un corps non formellement réel est de la forme 2^k ou $2^k + 1$.*
Enfin, on peut montrer le résultat suivant :

Proposition 4.6. [P] *Soit $m \in W$, et soit K un corps de niveau 2^m. On a :*
(i) $p(K(t)) = 2^m + 1$;
(ii) It existe une extension algébrique L de K dont le nombre de Pythagore est 2^m.
Preuve de (i)
Les corps $K(t)$ et K ont le même niveau, que l'on note s. Comme on l'a vu précédemment, ceci signifie que la forme $(s+1) < 1 >$ est isotrope, tandis que $s < 1 >$ est anisotrope.
Le nombre de Pythagore de $K(t)$ est donc soit s soit $s+1$. Pour montrer que c'est $s+1$, il suffit de trouver un élément de $S(K(t)) = K(t)$ qui ne s'écrit pas comme somme de s carrés. Supposons que t s'écrive comme une somme de s carrés dans $K(t)$. Il existe alors des polynômes y et p_1, $\ldots$, p_s tels que $y(t)^2 t = p_1(t)^2 + \cdots + p_s(t)^2$. Comme $y(t)^2 t$ est de degré impair, les termes de degré maximum de $p_1(t)^2 + \cdots + p_s(t)^2$ s'annulent. Plus précisément, si on note m le maximum des degrés des p_i, et a_i le coefficient de t^m dans p_i, on a $(a_1^2 + \cdots + a_s^2)t^{2m} = 0$. Ceci contredit le fait que la forme $s < 1 >$ est anisotrope. Ainsi, t est de longueur au moins $s+1$, ce qui prouve (i).
La preuve de (ii) donnée par Pfister dans [P] est également élémentaire ; elle repose sur la multiplicativité de la forme quadratique $s < 1 >$.
Ainsi, on constate que le nombre de Pythagore n'est pas un invariant très intéressant pour les corps non formellement réels. Il ne differe que très peu de leur niveau. Dans le cas des corps formellement réels, en revanche, le nombre de Pythagore, contrairement au niveau, n'est pas toujours infini.

5. Cas des corps formellement réels

En 1978, Prestel construit des corps formellement réels K_m et L_m pour tout entier $m > 0$ et L_∞ dont les nombres de Pythagore sont respectivement $2^m + 1, 2^m$ et $+\infty$. Chacun de ces corps est muni d'un unique ordre ; de plus K_m et L_m sont de degré de transcendance finis sur $\mathbb{Q}$. La question de savoir si d'autres valeurs que celles-ci peuvent être atteintes pour des corps formellement réels est restée ouverte jusqu'en mars 98, date à laquelle Hoffmann prouve le résultat suivant :
Théorème 5.1. (*Hoffmann* [H1]) *Pour tout entier $m \geq 1$, il existe un corps formellement réel dont le nombre de Pythagore est m.*
En général, ce corps n'est pas un sous-corps de $\mathbb{R}$, mais on peut le choisir muni d'un unique ordre.
Idée de la preuve.

Soit K un corps formellement réel. L'entier $m \geq 1$ est le nombre de Pythagore de K si et seulement si les deux conditions suivantes sont satisfaites :
(i) pour tout $a \in S(K)$, la forme $m < 1 > \perp < -a >$ est isotrope ;
(ii) il existe $b \in S(K)$ tel que la forme $(m-1) < 1 > \perp < -b >$ est anisotrope.
Soit F_0 un corps formellement réel fixé, et considérons

$$F_1 = F_0(X_1, \ldots, X_{m-1}).$$

L'élément $b = 1 + X_1^2 + \cdots + X_{m-1}^2 \in S(F_1)$ ne peut pas s'écrire comme somme de $m-1$ carrés, ce qui assure la condition (ii).
S'il existe des éléments $a \in S(F)$ pour lesquels la forme

$$m < 1 > \perp < -a >$$

n'est pas isotrope, on peut la rendre isotrope en étendant les scalaires à son corps de fonctions. Le lemme central de cette démonstration, relativement technique, et basé sur la notion de forme quadratique excellente, consiste à vérifier que l'on peut faire cette opération sans que la forme $(m-1) < 1 > \perp < -b >$ ne devienne isotrope.

6. u-invariant

La première definition du u-invariant a été proposée par Kaplanski en 1953.

Définition 6.1. Soit K un corps non formellement réel. On appelle u-invariant de K la dimension maximale d'une forme quadratique anisotrope sur K.

Remarque 6.2. (i) La terminologie choisie pour cet invariant vient du fait que toute forme quadratique sur K de dimension au moins u est"universelle", c'est-à-dire représente tout élément de $K^\star$ En effet, on sait que toute forme isotrope est universelle. Soit maintenant q une forme quadratique anisotrope de dimension u sur K, et $a \in K^\star$. La forme $q \perp < -a >$ étant de dimension $u+1$, elle est isotrope. Ceci prouve que q représente a.
(ii) La définition précedente n'est pas très intéressante pour les corps formellement réels, puisque dans ce cas la forme $n < 1 >$ est anisotrope quel que soit l'entier $n \geq 1$. On peut alors définir le u-invariant comme étant la dimension maximale des formes quadratiques anisotropes dont la classe dans le groupe de Witt est de torsion. Nous renvoyons le lecteur qui souhaiterait plus de détails sur cette question au livre de Pfister [P], et ne considérons dans ce qui suit que le cas des corps non formellement

réels.
Exemple 6.3. Le u-invariant d'un corps quadratiquement clos est 1. Le u-invariant d'un corps fini de caractéristique différente de 2 est 2 ; celui d'un corps local est 4.
Le u-invariant de $\mathbb{C}(x_1, \dots , x_n\}$ est 2^n.
En 1953, Kaplansky conjecture que le u-invariant d'un corps est toujours une puissance de 2. Pfister démontre de façon élémentaire que les valeurs 3, 5 et 7 ne peuvent être atteintes.
Mais en 1988, Merkurjev montre le résultat suivant :
Théorème 6.4. (*Merkurjev*) *Pour tout entier* $m \geq 1$, *il existe un corps de u-invariant* $2m$.

Idée de la preuve.
Etant donnée une forme quadratique q sur un corps K, on définit son corps des fonctions comme étant le corps des fonctions de la quadrique projective définie par l'équation $q = 0$ si q est de dimension au moins 3, et l'extension quadratique $K(\sqrt{-ab})$ si $q =< a, b >$ est de dimension 2.
Partant d'un corps K_0 fixé, on construit alors une suite de corps

$$K_0 \subset K_1 \subset \cdots \subset K_n \subset \dots$$

de la manière suivante : le corps K_{i+1} est obtenu à partir de K_i en étendant les scalaires au composé des corps de fonctions de toutes les formes quadratiques sur K_i de dimension $2m + 1$, de sorte que ces formes deviennent isotropes sur K_{i+1}. Par construction, toutes les formes de dimension strictement plus grande que $2m$ sont isotropes sur le corps obtenu à la limite. Pour construire ainsi un corps de u-invariant $2m$, il reste à montrer qu'on peut, au cours de la construction décrite ci-dessus, s'assurer qu'une certaine forme de dimension $2m$ définie sur le corps de base K_0 reste anisotrope. Ceci se démontre en prouvant, grâce à des formules de réduction d'indice, que la forme en question a une algèbre de Clifford dont l'indice reste maximal.
Pour terminer, citons le résultat annoncé par Izhboldin en juillet 99 :
Théorème 6.5. *(Izhboldin* [I] *) Il existe un corps de u-invariant* 9.
La démonstration de ce théorème utilise des outils non élémentaires, notamment des calculs de groupes de Chow de certaines quadriques ainsi que certains groupes de cohomologie non-ramifiée.

Références

[H1] D.W. Hoffmann, *On the Pythagoras number of formally real fields*, J. Amer. Math. Soc. **12** (1999), no. 3, 839-848.

[H2] D.W. Hoffmann, *Isotropy of quadratic fonns and field invariants*, Prépublication n^o 2000/03 de l'université de Franche-Comté (2000).

[I] O.T. Izhboldin, *Field with u-invariant 9* (very preliminary version of July 1999).

[L] T.Y. Lam, The algebraic Theory of Quadratic Forms, Benjamin/Commings Publishing Co., Reading, Mass. (1980).

[P] A. Pfister, Quadratic Forms with Applications to Algebraic Geometry and Topology, London Math. Soc. Lect. Notes **217**, Cambridge University Press (1995).

[S] W. Scharlau, Quadratic and Hermitian Forms, Grundlehren **270** Springer-Verlag, Berlin-New York (1985).

LAGA, UMR 7539
Institut Galilée
Université Paris 13
93430 Villetaneuse
France
e-mail : queguin@math.univ-paris13.fr