UNE PRÉSENTATION DE L'ŒUVRE MATHÉMATIQUE DE MADAME CHOQUET-BRUHAT

Daniel Bennequin

1. Art classique en physique mathématique

Élégance et solidité, sérénité. Caractériser en peu de mots une œuvre qui comporte 200 titres et plus de cinq chapitres paraîtra justement subjectif, ou futile. Mais dans la cas de Madame Choquet-Bruhat l'accord des mots avec la personne ne laisse pas de doute.

Beauté aussi, car la démarche scientifique de Mme Choquet-Bruhat est toute d'unité. Un caractère qui vient souvent aux œuvres amples. Ici, les rapports constants de la Géométrie avec la Physique sont unifiés par l'Analyse.

L'ensemble de l'œuvre de Yvonne Choquet-Bruhat hérite son éclairage classique de Cartan, Lichnerowicz, Leray ; on y assiste, captivé, à la répétition du miracle géométrique : la physique guidée par ses principes détient dans ses équations les principes du progrès en Géométrie. A condition de bien lire les équations. Et nous allons montrer combien Madame Choquet-Bruhat a su participer à ces progrès, à travers le développement de la relativité générale, des théories de jauge, de la super-symétrie, jusqu'aux théories des cordes et super-cordes. Partant de la physique mathématique selon Poincaré, Cartan et poursuivant son impulsion jusqu'au voisinage de la mathématique physique selon Polyakov, Witten, sans renier leur unité d'action, leur personnalité,

---

L'auteur tient à remercier les organisatrices, tout particulièrement Nicole Berline, Sylvie Paycha et Marie-Françoise Roy, de lui avoir permis de rendre hommage à Mme Choquet-Bruhat, et il se trouve très désolé d'avoir retardé si longtemps le volume qu'elles préparaient. Merci de leur patience et de leur gentillesse.

les articles de Madame Choquet-Bruhat ont de plus en plus appuyé sur les considérations géométriques, de moins en moins sur l'outil analytique.

Yvonne Choquet-Bruhat entourée des participants à un Colloque.
Photo : Y. Choquet-Bruhat.

Yvonne Choquet-Bruhat a également su faire avancer la machine mathématique, équations hyperboliques non-linéaires, problèmes elliptiques, super-variétés... Parmi les résultats qu'on ne peut pas séparer de son nom, il y a le problème de Cauchy en relativité générale, l'étude des fluides relativistes, les méthodes conformes pour les problèmes elliptiques.

La contribution à la physique mathématique de Mme Choquet-Bruhat a été brillamment récompensée par les médailles, les prix, la considération et puis, l'élection à l'Académie des Sciences, comme correspondante en 1978 et comme membre l'année suivante. La première mathématicienne dans cette très noble assemblée.

Nous verrons que Mme Choquet-Bruhat s'est préoccupée de toutes les sortes de *champs classiques*, surtout ceux qui traduisent des « effets collectifs » comme en hydrodynamique par exemple ; Mme Choquet-Bruhat est co-fondatrice avec A. Lichnerowicz de la magnéto-hydrodynamique, classique et relativiste ; tout récemment (fin des années 90) elle a contribué à l'étude des plasmas de Yang-Mills, *etc.* Pourtant nous allons commencer l'exposé par les « champs fondamentaux » issus des équations de Maxwell puis d'Einstein. Eux aussi s'interprètent comme des évolutions de moyennes macroscopiques, ils peuvent concerner un grand nombre de particules, mais rien de classique apparemment, aucune équation connue, ne s'interpose entre eux et les particules élémentaires.

Rien de classique, mais la mécanique quantique oui. C'est sur ce point que l'exposé finira, en montrant la pertinence des théorèmes de Mme Choquet-Bruhat dans ce domaine. Cependant Mme Choquet a évité la Physique quantique : ce n'est pas un a priori philosophique, n'est-elle pas intéressée par les recherches de Penrose ? « On ne peut pas tout faire » dit-elle ; mais je crois plutôt que Mme Choquet est restée à l'écart du quantique à cause de son exigence de complète rigueur. Car c'est la rigueur mathématique qui s'est longtemps tenue loin de la théorie des champs quantiques, et, lorsque la rencontre a eu lieu, ce fut plutôt sur le terrain de l'Algèbre, par exemple, dans les années 80, avec les champs conformes en dimension 2, autour des représentations d'algèbres de Lie infinies (encore E. Cartan), des algèbres de vertex, *etc.* C'est aujourd'hui, mais moins que demain, que l'Analyse et la Géométrie rejoignent rigoureusement, pleinement donc, la théorie quantique des champs.

2. Gravitation

L'équation qu'Einstein a mise à la base de la relativité générale s'écrit :

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} = \kappa T_{\mu\nu}. \tag{1}$$

Commentaires : L'inconnue n'est pas évidente, c'est une *variété* différentiable W munie d'une *métrique* g. *A priori* la variété est de dimension 4 et la métrique de signature $(3,1)$, c'est-à-dire $(-1,1,1,1)$. (La plupart des physiciens, avec Einstein, préfèrent la signature $(1,3)$; *i.e.* travaillent avec $-g$.) Le tenseur g a pour mission de décrire la propagation de l'information (le mouvement des particules élémentaires de masses nulles) : les rayons lumineux sont des géodésiques de longueur nulle de g (éternellement immobiles pour elles-mêmes). Par convention, les indices grecs $\alpha, \beta, \ldots, \mu, \nu, \ldots$ vont de 0 à 3 et renvoient à des coordonnées de l'espace-temps. Par exemple $g_{\mu\nu}$ désigne la coordonnée de g suivant $dx^{\mu}\, dx^{\nu}$ (dans des coordonnées locales x^0, x^1, x^2, x^3 de W). Les indices romains $a, b, \dots, i, j, \dots$ iront de 1 à 3 seulement et concerneront l'espace quand une coordonnée de temps est fixée, c'est-à-dire lorsqu'on travaille sur une variété M de genre-espace dans W, de dimension 3. Sur M la métrique est riemannienne, définie positive. Le tenseur g est vu en physique comme un potentiel pour le champ de gravitation : le champ lui-même est la *connexion de Levi-Civita* ∇, unique connexion orthogonale (*i.e.* respectant les longueurs) et sans torsion (*i.e.* $\forall X, Y, \nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y]$) sur le fibré tangent $T(W)$. Les composantes de ∇ ont trois indices (on les note ${\Gamma_{\mu\nu}}^{\alpha}$ par exemple).

La courbure riemannienne Ω de ∇ est définie par :

$$\Omega(X, Y, Z, T) = g(\nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]} Z, T),$$

pour des champs de vecteurs X, Y, Z, T sur W. Ses composantes ont quatre indices. Mais le $R_{\mu\nu}$ de l'équation (1) est une composante de la *courbure de Ricci*, $\mathrm{Ric}(g) = r$, définie par la trace $r(X, Z)$ en Y, T de Ω. Le tenseur r est symétrique ; sa trace est R, présente dans (1) aussi, c'est la *courbure scalaire*. (Pour $n = 2$, c'est le double de la courbure de Gauss). Le tenseur de Ricci décrit les accélérations relatives des particules dans le champ gravitationnel.

Au second membre de (1), κ est une constante, dépendant du choix des unités ; on peut la faire égale à 1 ou $1/2\pi$ ou ce qu'on veut, mais le plus souvent $\kappa = 8\pi k/c^4$, où c est la vitesse de la lumière et k la constante de Newton (qui apparaît dans la loi d'attraction à côté des masses). Enfin $T_{\mu\nu}$ est la coordonnée d'un tenseur T, d'*énergie-impulsion* de la « matière », c'est une fonction des « autres » champs présent dans l'univers ; ($T_{\mu\nu}$ est la densité de la variation de l'action S de ces champs par rapport aux variations de la métrique $\delta S = \sum \int_W (\delta g_{\mu\nu}) T^{\mu\nu}$). Dans quelques problèmes approchés (la plupart) T est une donnée. Mais, fondamentalement, T dépend des champs présents qui dépendent de g : par exemple pour le champ électromagnétique (${F_{\mu}}^{\nu}$) vu comme section de $\mathrm{End}(T(W))$, (en fait un champ d'endomorphismes antisymétriques de $T(W)$), $T = \frac{-1}{4\pi}\big((F \circ F) - \frac{1}{4}\,\mathrm{Tr}(F \circ F)\,\mathrm{Id}\,\big)$. Le passage de la deuxième puissance symétrique $S^2(T(W))$ à $\mathrm{End}(T(W))$ pour T, et le passage de la deuxième puissance asymétrique $\wedge^2(T^*)$ à $\mathrm{End}(T)$ pour F, font appel à la métrique g. C'est ainsi que les indices montent et descendent. En plus des équations d'Einstein, $r - \frac{1}{2} R g = \kappa T(F)$, il faut tenir compte des équations de

Maxwell $dF = 0$, $d^*F = J$ qui font réintervenir la métrique à travers l'opérateur adjoint d^* de la dérivée extérieure. (De plus le courant J lui-même évolue selon g et F en règle générale, *etc.*).

Lorsque le tenseur T est identiquement nul, par définition on dit que l'espace est vide ; alors l'équation d'Einstein se simplifie, car en prenant la trace de (1) on déduit $R = 0$, donc (1) équivaut à

$$R_{\mu\nu} = 0 \tag{2}$$

(En général, c'est le principe de conservation de l'énergie-impulsion $\nabla \cdot T = 0$, imposé à l'ensemble des « champs présents », qui réclame la présence du *tenseur d'Einstein* $s = r - \frac{1}{2}Rg$ (au lieu de r), car des identités de Bianchi entraînent $\nabla \cdot s = 0$ (et pas $\nabla \cdot r = 0$). Mais rien n'empêche de voir dans ces identités l'origine du principe de conservation. On trouve une interprétation géométrique de s dans le chapitre VIII des leçons sur la géométrie des espaces de Riemann d'Élie Cartan, ouvrage de référence toujours sur la courbure).

Sous le la forme (1) ou (2), on a affaire à un système de 10 équations aux dérivées partielles non-linéaires du deuxième ordre en 10 inconnues. La première question de dynamique classique qui se pose est : s'agit-il d'un système déterministe ? Connaissant (W, g) sur un côté d'une hypersurface du genre espace M (et T partout pour (1)), peut-on en déduire W et g de l'autre côté ?

A priori, même pour le problème local près de M, la question est mal posée, car l'existence d'une solution entraîne l'existence d'une infinité d'autres par application des difféomorphismes de W (et même des difféomorphismes de W sur une autre variété W'). C'est donc à *difféomorphisme près* que ce *problème de Cauchy* se pose.

En 1922, Cartan montra à Einstein comment la théorie des systèmes extérieurs en involution s'appliquait à ses équations pour assurer existence et unicité dans le cadre analytique réel. C'est encore dans ce cadre que se situèrent les travaux de G. Darmois (1927) et A. Lichnerowicz (1931). Mais ce point de vue est insuffisant pour la plupart des sources T. Yvonne Choquet-Bruhat, alors Mme Fourès-Bruhat, en 1952, fut la première à résoudre le problème local, en toute généralité, en classe C^∞ :

***Théorème* (1952, Y. C.-B.).** — *Dans la théorie d'Einstein, le présent détermine le futur.*

Plus exactement, le problème de Cauchy pour (1) est *bien posé* et *causal*, c'est-à-dire que la donnée de g et de ses dérivées le long de M détermine une unique solution au voisinage de M, dépendant continûment des données, et que les perturbations des données se propagent dans les cônes de lumière.

Dans le grand article de 1952 aux Acta Mathematica, Mme Choquet-Bruhat ne traite complètement que (2), elle étend peu après ses résultats à (1). Dans cet article, Mme Choquet-Bruhat — je dirai aussi Y.C.-B. dans les commentaires techniques — a choisi de travailler avec des *coordonnées isothermes*, c'est-à-dire où la 3-forme qui associe sa normale à un trivecteur est fermée. (On dit aussi *harmonique* pour ces coordonnées, car les x^{μ} sont alors des fonctions harmoniques pour le d'alembertien $\square = dd^* + d^*d$, *cf.* § 22 des lectures de P.A.M. Dirac, Princeton, 1975). Pour toutes les métriques sur W, il existe près de chaque point de telles coordonnées ; l'équation (1) s'y exprime $\square g = H(g, \partial g, T)$. Système que Mme C.-B. a su analyser par des méthodes d'équations intégrales (*cf.* § III ci-après).

Le plus gros du travail est fait de formules explicites et d'inégalités précises pour le contrôle en finesse de solutions de classe C^4 de systèmes d'e.d.p. hyperboliques du second ordre linéaires puis quasi-linéaires. Jean Racine écrivait en marge de la *Poétique* d'Aristote, que l'on peut « se servir de machine dans ce qui précède l'action », mais que « le dénouement doit sortir de la fable ». Donc il y a une clef géométrique dans la méthode de Mme Choquet-Bruhat ; c'est la remarque suivante : si g satisfait aux équations d'évolution hyperbolique les coordonnées restent isothermes. Interprétation : les *contraintes* imposées pour évacuer la plus grande partie de l'invariance par difféomorphismes et ramener le problème de Cauchy à un problème bien posé d'analyse, sont compatibles avec les équations, préservées par l'évolution.

Pour les équations de Maxwell, l'invariance de jauge sur les potentiels provoque un phénomène semblable : par exemple (pour simplifier) dans l'espace de Minkowski plat à 4 dimensions, le long d'un hyperplan du genre espace, le tenseur F se décompose en un champ de vecteurs $\overrightarrow{E}$, le champ électrique, et un champ de vecteurs $\overrightarrow{B}$, le champ magnétique (en coordonnées, $F_{xt} = E_x, \dots, F_{xy} = -B_t, \dots$) ; en notant $\overrightarrow{\nabla}$ le gradient en dimension 3 et ρ la densité de charge, les contraintes de Gauss s'écrivent $\overrightarrow{\nabla} \cdot \overrightarrow{B} = 0$, $\overrightarrow{\nabla} \cdot \overrightarrow{E} = \frac{4\pi}{\varepsilon_0}\rho$. Ces conditions sont préservées, sur chaque hyperplan parallèle, par les équations de Maxwell

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial \overrightarrow{E}}{\partial t} = \overrightarrow{\nabla} \times \overrightarrow{B} - \frac{4\pi}{\varepsilon_0 c^2}\overrightarrow{J}, \qquad \frac{\partial \overrightarrow{B}}{\partial t} = -\overrightarrow{\nabla} \times \overrightarrow{E},$$

qui rendent compte de $dF = 0$, $d^*F = J$. (*cf.* le livre de Sachs et Wu).

Il existe, pour les équations d'Einstein, une présentation analogue, dégagée par Lichnerowicz en 1943, reprise dans livre de 1955 (voir aussi C.B. Deser (1960), pour la stabilité des contraintes) : les tenseurs jouant le rôle de $\overrightarrow{E}$ et $\overrightarrow{B}$ sont : q, la métrique induite en dimension 3 sur l'hypersurface M du genre espace dans W, et k la *courbure extrinsèque* de M dans W, ou seconde forme fondamentale (la première étant q) : pour deux champs de vecteurs X, Y tangent à M, si $\overrightarrow{\nu}$ désigne la normale unité, on a $k(X,Y) = q(\nabla_X Y, \overrightarrow{\nu})$. On note q_{ij} les composantes de q, K_{ij} celle de k, on a $k(X,Y) = k(Y,X)$ donc $K_{ij} = K_{ji}$. La courbure moyenne K de M est la trace ${K_i}^i$ de k.

Ce sont ces variables que, dans les années 80, avec J.M. York, Mme Choquet-Bruhat a le plus utilisées pour faire à nouveau progresser l'étude du problème de Cauchy de (1) et (2). Une référence est le « masterful survey », comme dit le Web « which is required reading for anyone interested in the mathematical aspects of general relativity », écrit par Y.C.-B. en 1985, pour une école de cosmologie à Rio de Janeiro, disponible comme preprint ou dans la traduction russe Usp. Mat. Nauk 40 (1985). (Mme Choquet adore les grands voyages, les longues collaborations, qui sont d'autres manières d'explorer l'univers).

Prenons comme elle, la peine d'écrire les contraintes sur q et k et les équations du premier ordre qui guident leurs mouvements, car on y trouve l'origine des remarquables équations non linéaires, elliptiques cette fois, auxquelles Mme Choquet-Bruhat a consacré beaucoup de ses efforts dans les années 70-80, et l'origine des résultats nouveaux sur la dynamique des équations d'Einstein qu'elle a obtenus dans les années 90.

Notons $\overrightarrow{\nabla}$ la connexion de Levi-Civita pour q sur M ; la première contrainte comporte trois équations scalaires, c'est la conservation des moments (elle est liée à l'invariance par isométrie sur M) : si $\overrightarrow{\jmath}$ est la densité de moment des sources, une donnée incluse dans $T_{\mu\nu}$,

$$\overrightarrow{\nabla} \cdot k - \overrightarrow{\nabla} \cdot Kq = \overrightarrow{\jmath} \tag{3}$$

Soit S la courbure scalaire de q, une fonction de M dans $\mathbb{R}$, la seconde contrainte fait intervenir la composante ρ de T qui représente la densité d'énergie propre le long de M ; elle s'appelle *contrainte hamiltonienne* et semble, selon Mme Choquet-Bruhat, détenir l'essentiel de la dynamique de la théorie d'Einstein :

$$S - \mathrm{Tr}(k \circ k) + K^2 = 2\rho \tag{4}$$

Pour écrire le système d'évolution, on choisit un champ de vecteurs sur W du genre temps : $\partial/\partial t$; en fonction de la normale unité $\overrightarrow{\nu}$ à M on a $\partial/\partial t = N\overrightarrow{\nu} + \overrightarrow{N}$, avec $\overrightarrow{N}$ tangent à M. La fonction N se note aussi α, c'est $(-g^{00})^{-1/2}$, elle s'appelle le *laps* (de temps), mesure du retard (des horloges) du repère spatio-temporel. (En anglais il y a la même ambiguïté qu'en français : laps et faute, un écart). Le vecteur $\overrightarrow{N}$ se note aussi β et se nomme *shift* (Wheeler), c'est le *décalage* ou la ruse. (La métrique d'univers g s'exprime : $ds^2 = q^{ij}\theta^i\theta^j - \alpha^2\,dt^2$, avec $\theta^i = dx^i + \beta^i\,dt$). (Les fonctions N et $\overrightarrow{N}$ traduisent les effets les plus immédiats de la gravitation : pour un champ statique, *i.e.* métrique g indépendante de t, avec $\overrightarrow{N} = 0$, N est le potentiel newtonien, c'est aussi la mesure du « red shift », décalage vers le rouge des raies spectrales d'un atome au repos émettant des radiations monochromatique, *cf.* le livre de Dirac déjà cité).

Notons $\partial_{\overrightarrow{N}}$ la dérivée de Lie suivant $\overrightarrow{N}$; avec (3) et (4), (1) s'énonce :

$$(5)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial q}{\partial t} = -2Nk + \partial_{\overrightarrow{N}} q \\ \dfrac{\partial k}{\partial t} = Nf(N, \overrightarrow{N}, q, k) - N(\overrightarrow{T} - \frac{1}{2}\operatorname{Tr}(\overrightarrow{T})q), \end{cases}$$

où l'on a mis f pour raccourcir l'expression explicite :

$$f(N, \overrightarrow{N}, q, k) = \operatorname{Ric}(q) - 2k \circ k + Kk - \frac{1}{N}(\overrightarrow{\nabla}\, dN - \partial_{\overrightarrow{N}} k).$$

La première ligne de (5) fait apparaître k comme dérivée de q. Notons aussi que N et $\overrightarrow{N}$ ne sont soumis à aucune équation ; on peut les choisir arbitrairement, c'est le résidu de l'invariance par difféomorphisme.

Un calcul pas trop dur montre que si $t \mapsto (q(t), k(t))$, $t \in]-\varepsilon, \varepsilon[$, est une solution de (5) sur un intervalle contenant 0, les conditions (3) et (4) sont vérifiées par $(q(t), k(t))$, quel que soit t entre $-\varepsilon$ et ε.

Des théorèmes de Y.C.-B., de 1950 à 1970, entraînent qu'une fois N et $\overrightarrow{N}$ choisis sur $M \times \mathbb{R}$, q et k donnés sur M, T sur $M \times \mathbb{R}$ (pas trop pathologique, par exemple C^n à support compact, $n \geqslant 4$), il existe une solution unique de (5) au voisinage de M, c'est-à-dire pour t petit. De plus, $(q(t), k(t))$ dépend continûment, dans des Sobolev convenables, des choix initiaux, *i.e.* le problème de Cauchy est *bien posé*. Enfin, si g est la métrique d'univers lorentzienne sur l'espace-temps reconstruite par $q, N, \overrightarrow{N}$, rien n'est changé pour q

et k sur un ouvert U de M lorsqu'on perturbe les conditions initiales en dehors d'un cône du passé de U associé à g (en particulier ce cône lui-même ne change pas), *i.e.* la théorie est *causale*.

Un problème difficile qui se pose alors est celui des solutions globales : aller plus loin que le voisinage de M. Le résultat préliminaire le plus net sur cette question, le préalable à toutes les autres questions, provient d'arguments de topologie générale à partir des théorèmes de Y.C.-B. ; il a été obtenu par Mme Choquet-Bruhat avec R. Geroch en 1969 (*cf.* Communications in Mathematical Physics) : étant donnée une variété riemannienne (M, q) de dimension 3, munie d'un tenseur symétrique k satisfaisant aux équations (3), (4) (avec $T = 0$, *i.e.* dans le vide) il existe une variété lorentzienne $(\widehat{W}, \widehat{g})$ dans laquelle M se plonge isométriquement en genre espace avec courbure extrinsèque k, telle que toute autre (W, g) prolongeant (M, q, k) de cette façon se plonge isométriquement dans $(\widehat{W}, \widehat{g})$, avec identité sur M. De plus un tel couple $(\widehat{W}, \widehat{g})$ est unique à isométrie près ; on dit qu'il est le *prolongement maximal* de (M, g, k). (Remarquons, que d'après Y.C.-B. (1952), on peut, dans ce qui précède remplacer (q, k) par le germe γ de g le long de M dans $M \times \mathbb{R}$).

Mais attention, en général la métrique $\widehat{g}$ sur $\widehat{W}$ n'est pas complète. (Exemple, l'effondrement dans la métrique de Schwarzschild). D'ailleurs, pendant longtemps les résultats les plus profonds sur le problème de Cauchy global, énoncèrent des conditions (pas du tout pathologiques) sur (M, g, k) (ou (M, γ)) pour que son développement présente des singularités (Hawking et Penrose, 1970). C'est beaucoup plus récemment qu'un théorème d'existence de métrique complète assez général a été obtenu (Christodoulou et Kleinerman, 93), et il reste dans un cadre perturbatif malgré sa grande difficulté : pour les données initiales assez proche de la métrique de Minkowski, les développements maximaux sont complets, ils n'ont ni singularités ni trous noirs.

Il existe d'autres problèmes globaux intéressants à propos des équations d'Einstein ; par exemple, pour comprendre le problème de Cauchy, il est important de comprendre les équations (3), (4) qui contraignent les conditions initiales, première et deuxième formes fondamentales sur M. Il s'agit d'un système d'équations non linéaires (plutôt de type elliptique mais pas strictement elliptique) difficile, que Mme Choquet a beaucoup étudié.

André Lichnerowicz a découvert (en 1944) que le changement conforme de la métrique $q \mapsto \varphi^4 q$, où φ est une fonction à valeurs réelles strictement positive, permet de capter l'essentiel de la condition la plus mystérieuse, la condition (4). En effet l'équation (4) pour $\varphi^4 q$ prend la forme de l'*équation de Lichnerowicz*

$$\Delta\varphi - S\cdot\varphi + a\varphi^{-7} + b\varphi^{-3} + c\varphi^5 = 0. \tag{6}$$

Dans cette équation Δ est le laplacien associé à q, S la courbure scalaire de q, $b = \frac{1}{4}\rho$ est la donnée de densité d'énergie, $c = -\frac{1}{12}K^2$ où K est la courbure moyenne (trace de la courbure extrinsèque k) et $a = A\cdot A = \mathrm{Tr}(A\circ A)$, où A représente la partie sans trace de k, c'est-à-dire qu'on a $k = \varphi^{-2}A + \frac{1}{3}qK$. L'équation (3) garde sa forme : $\overrightarrow{\nabla}\cdot A + \frac{2}{3}\varphi^6\overrightarrow{\nabla}(K) = \overrightarrow{J}$.

Avec Jean Leray, ou seule, Mme Choquet-Bruhat a obtenu (1972) des théorèmes d'existence remarquables pour (6). (Voir le survol *loc. cit.* de 1985). Par ce chemin, Mme Choquet-Bruhat rencontrait les équations elliptiques associées aux champs.

3. Toutes sortes de champs classiques

Équations d'Einstein, de Jordan-Thiry, de Helmholtz, d'Einstein-Liouville, de Maxwell-Boltzmann, équations de Lichnerowicz, de Dirac, de Klein-Gordon, de Yang-Mills-Higgs, de Vlasov...

La cohorte de champs qui défile dans les travaux de Mme Choquet-Bruhat ne fait pas que passer ; une fois qu'un problème de physique mathématique est apparu, il revient souvent, se joint à d'autres thèmes. Les thèmes se croisent.

Au premier abord des périodes semblent se dessiner mais on aperçoit qu'elles se chevauchent, se superposent. Au début des années 50 apparaissent la gravitation et puis les fluides relativistes chargés, avec les systèmes hyperboliques (surtout non linéaires). Vers 1960 apparition des équations hyperboliques non strictes à propos des fluides et de la magnéto-hydrodynamique, et les problèmes elliptiques globaux à propos des contraintes (3), (4) ; la préoccupation de plus en plus globale en Analyse se fait jour à la fin des années 60. Vers 1970, on rencontre les équations intégro-différentielles, la courbure constante, l'équation de Lichnerowicz, le problème de la masse (avec J. Marsden). Dans les années 80, les problèmes elliptiques non linéaires sur les variétés euclidiennes à l'infini, les Sobolev à poids, la méthode conforme pour l'existence globale (avec D. Christodoulou) appliquée aux équations de Yang-Mills, au σ-modèle..., le modèle standard des particules ; années 90 fluides chargés non abéliens...

Parallèlement à cette florissante activité de recherche, Mme Choquet-Bruhat n'a pas négligé sa contribution à l'enseignement (elle fut maître de conférences à Marseille de 53 à 58 et Professeur à Paris depuis 1960, à Paris VI à partir de 1969, visiting professor aux Universités de Berkeley, Camberra, MIT, Cambridge (UK), Rome, Princeton, Shangaï, *etc.*), notamment en écrivant les livres les plus utiles, introductions et références. *Problèmes mathématiques à l'usage des physiciens* (1963), *Géométrie différentielle et systèmes extérieurs* (1968), *Distributions, théorie et problèmes* (1972), *Analysis, Manifolds et Physics* I et II (avec Cécile Dewitt-Morette) (77, 82, 89), *Graded bundles and Supermanifolds* (1989)... Ouvrages tournés vers les bases géométriques.

Tout en restant constamment motivée par l'origine physique des problèmes, comme continuant la tradition d'une famille, Mme Choquet-Bruhat fut au départ des méthodes mathématiques les plus pures, de grandes théories d'Analyse :

Autour des EDP hyperboliques ; il faut savoir qu'au début des années 50, la théorie des équations et des systèmes hyperboliques est en gestation ; ce sont les clairs travaux de L. Schwartz, J. Leray, L. Gårding, K.O. Friedrichs qui vont à ce moment donner accès au travail fondateur de I.G. Petrowsky (1937) ; et, encore faudra-t-il attendre les années 60, après l'intervention de Calderón et Zygmund (57-58) pour dégager l'outil (agissant déjà en 37) des pseudo-différentiels (L. Hörmander). Jusqu'à nos jours coexistent plusieurs approches séparées du problème de Cauchy, résultats de l'explosion des années 70 dans ce domaine : Leray, Gårding, Volevich, Gindikin..., M. Riesz, Ladyzhenskaya, Ivrii, Petkov..., Levi, Mizohata, Ohya, Hörmander..., Oleinik, Menikoff..., Dionne, A & P.D. Lax, Nirenberg..., Kreiss, Agranovich, Rauch..., Sato, Kawai, Kashiwara... Ainsi, même aujourd'hui, après 70 ans de recherches fructueuses depuis Courant-Friedrichs en 1930, en passant par Herglotz, Sobolev, Petrowsky, les pseudo-différentiels et les hyperfonctions, J.-M. Bony et P. Schapira, il n'y a pas (sauf en dimension 1 d'espace) de théorie unifiée pour les systèmes hyperboliques non linéaires. Mme Choquet-Bruhat a donné sa préférence aux résultats de Leray, Sobolev, Leray-Dionne, Leray-Ohya ; ils lui permettent tout le contrôle souhaité. Ses propres travaux sur la diagonalisation des systèmes hyperboliques non stricts et la magnéto-hydrodynamique, ont contribué au départ et à l'évolution de cette branche.

On doit aussi à Mme Choquet-Bruhat d'avoir saisi toute la portée de la « méthode conforme » mise en place à la fin des années 70 avec I. Segal et

D. Chirstodoulou, pour l'appliquer aux solutions spéciales de problèmes elliptiques ou hyperboliques. L'idée consiste à traduire des questions globales sur des variétés euclidiennes à l'infini, en questions locales, plus abordables, sur des cylindres $M \times \mathbb{R}$ avec M compacte, à l'aide d'une transformation conforme. Voir les « grands papiers » de 1981, avec Christodoulou, aux Acta Mathematica (146) et aux Annales de l'ENS (IV, 14).

Une inflexion vers la préférence accordée aux principes géométriques pour l'Analyse et la physique est observable au milieu des années 70 ; elle correspond bien à la tradition d'une ligne Cartan-Lichnerowicz, et reflète un mouvement d'ensemble possible à ce moment, mais elle se fait suivant le mouvement interne de Mme Choquet-Bruhat.

Comme les trois autres grandes dames qui sont fêtées dans ce volume, Mme Choquet-Bruhat est loin d'avoir cessé son activité scientifique.

C'est donc cinquante ans de travail qu'a commenté dans ce paragraphe le monologue du chœur à travers ses monotones énumérations de faits et de noms glorieux. Faute de place et de temps la plus grande partie de l'œuvre de Mme Choquet-Bruhat restera dans la pénombre. Afin de respecter l'unité de l'action, revenons à la causalité bien posée, à propos du drame des fermions.

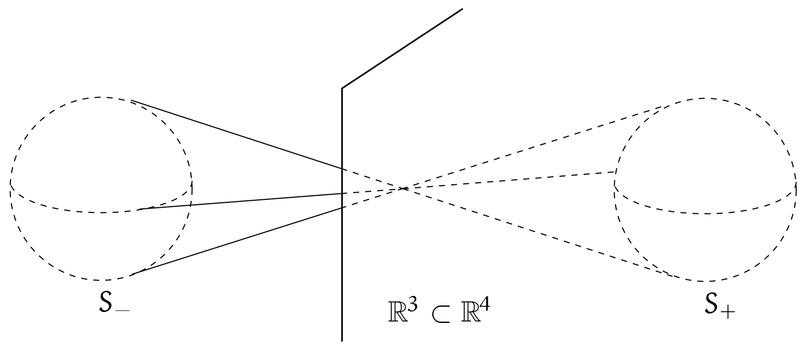
4. Spineurs

Eux ne sont pas des tenseurs. Dirac les a introduits dans la physique en 1928, et ils ont annoncé l'antimatière. Mais bien avant, en 1913, Élie Cartan avait rencontré les spineurs au cours de ses recherches sur les représentations linéaires de groupes simples ; et son livre de 1937 demeure une référence obligée sur eux.

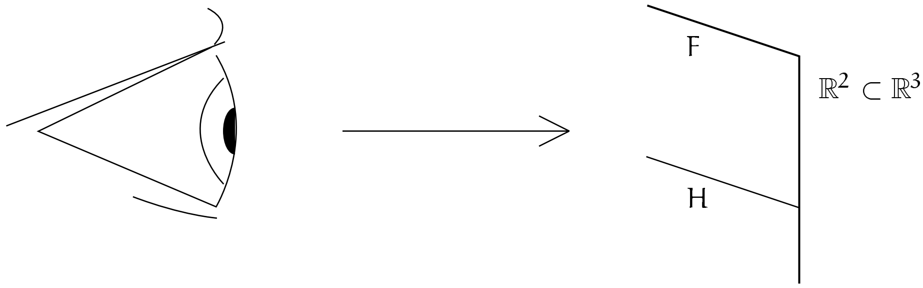
En suivant Penrose (1959), l'étude de la perspective dans notre espace euclidien peut révéler la signification géométrique de ces êtres mathématiques en dimensions 3 et 4 :

Dans l'optique humaine (même sans parler de psychologie ou d'histoire), voir quelque chose, c'est : $1^\circ)$ recevoir des rayons lumineux dans l'œil, $2^\circ)$ forger une image dans le plan.

La première opération se décrit bien dans l'espace à 4 dimensions d'Einstein ou de Minkowski : les rayons qui nous parviennent sont les directions du cône du passé Γ_- pour la métrique g lorentzienne, dont le sommet pointe là où on est, quand on y est. La base de ce cône peut être assimilée à la sphère S_- qui nous entoure dans $\mathbb{R}^3$, la sphère céleste.

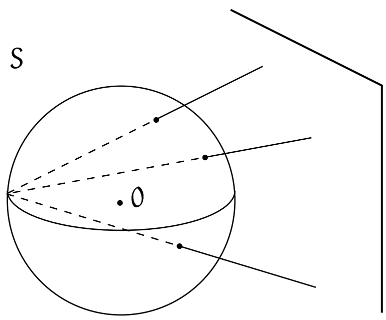


La seconde opération dépend de mon attitude : je me représente les choses sur le plan des directions parallèles au regard, F comme frontal (la ligne d'horizon est couchée dans F).



Comment réconcilier les deux mouvements, l'optique sphérique et la perception plane ?

Une bonne façon de faire est la projection stéréographique : en mettant l'axe Oz dirigé vers l'œil, Ox horizontal vers la droite et Oy vertical vers le haut, la sphère S_- isomorphe naturellement à la sphère S centrée en 0 de rayon 1 se projette sur le plan $z = -1$ (naturellement isomorphe à F) à partir du pôle $x = y = 0$, $z = 1$ (le point aveugle).



En formules, $X = x/(1-z)$, $Y = y/(1-z)$.

Le procédé distord les longueurs, mais il a l'avantage de ne pas faire subir de modification aux angles : l'application $\pi : S \to F$ est *conforme*. D'où l'intérêt d'introduire les nombres complexes $\xi = X + iY$, car en identifiant $\mathbb{R}^2$ à $\mathbb{C}$, les applications conformes de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ ne sont autres que les homographies $\xi' = (a\xi + b)/(c\xi + d)$, $a, b, c, d \in \mathbb{C}$, formant le groupe $PSL_2(\mathbb{C})$.

Les divers mouvements de l'espace se disent bien avec ξ : par exemple, une rotation autour de Oz d'un angle ψ (faire la roue) se traduit par $\xi' = e^{i\psi}\xi$, une rotation autour de Ox d'un angle φ (faire la galipette) par

$$\xi' = \frac{\cos(\varphi/2)\xi + i\sin(\varphi/2)}{i\sin(\varphi/2)\xi + \cos(\varphi/2)},$$

et une rotation autour de Oy d'un angle θ (pour une valse ou sur un manège) par

$$\xi' = \frac{\cos(\theta/2)\xi - \sin(\theta/2)}{\sin(\theta/2)\xi + \cos(\theta/2)}.$$

Dans les deux dernières formules, l'angle de rotation se montre divisé par 2 ; par exemple pour ξ et θ très petits, ξ' opère une translation de $\theta/2$ au premier ordre. Bien sûr, la transformation n'est pas affine et le dénominateur compense le numérateur, si bien qu'un tour complet, une rotation d'angle 2π, nous remet dans la position initiale. Cependant, il est possible d'extraire de notre mouvement cet effet de « division par 2 » : il suffit de conserver la mémoire du chemin parcouru.

Car le groupe fondamental (ou groupe de Poincaré) du groupe des déplacements, ou du groupe des rotations, n'est pas trivial :

$$\pi_1(SO_3) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}.$$

Certains chemins fermés de rotations ne sont pas déformables au lacet constant demeurant à l'identité. Par exemple, les rotations R_θ autour de Oy (ou Ox, ou Oz) d'angle θ deviennent un chemin $\theta \mapsto R_\theta$, θ variant de 0 à 2π, qu n'est pas homotopie à l'identité ($\theta \mapsto R_0$). Il faut doubler ce chemin, aller de 0 à 4π, pour faire un chemin homotope à l'identité. (C'est le célèbre tour du plateau au-dessus de la tête après le tour de main, ou bien le coup des ciseaux de Dirac.) Est-ce que notre corps ne sait pas garder la trace d'un tour unique ? Est-ce qu'une valse ne peut pas en faire oublier une autre ?

Il y a là une possibilité pour un milieu étrange, un univers où la différence entre un tour et deux tours serait directement sensible, sans mémoire. Cet univers est celui des spineurs. On y entre en réussissant à traiter à part les dénominateurs et numérateurs des homographies. Définition : un spineur est un élément de $\mathbb{C}^2$; on dit qu'il est associé à $(x, y, z) \in S$ lorsque ses coordonnées (ξ_0, ξ_1) satisfont à $\xi = \xi_0/\xi_1$, pour $\xi = (x + iy)/(1 - z)$. (Nous verrons une définition plus intrinsèque dans un instant.) La sphère céleste est identifiée à la sphère de Riemann $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ des directions de droites complexes dans $\mathbb{C}^2$.

Tant qu'on considère des rotations dans $\mathbb{R}^3$, des éléments de SO_3, il est possible de relever les transformations des (x, y, z) dans S en des transformations linéaires de $\mathbb{C}^2$ qui préservent la structure hermitienne standard de $\mathbb{C}^2$ et son élément d'aire complexe. On réalise ainsi tout le revêtement universel et à deux feuillets :

$$\mathrm{SU}_2 \longrightarrow \mathrm{SO}_3 \,.$$

Pour le moment, le temps n'est pas encore intervenu. Si on fait intervenir le temps, par exemple en se déplaçant à la vitesse v parallèlement à l'axe Oz (disons vers les z négatifs), le changement de coordonnées dans l'espace-temps $\mathbb{R}^4$ s'écrit :

$$x' = x, \quad y' = y, \quad t' = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \left(t - \frac{v}{c^2} z\right), \quad z' = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} (z - vt),$$

où c est la vitesse de la lumière. On dit que c'est un « boost ». Sur la coordonnée complexe ξ, cela induit une contraction

$$\xi' = \sqrt{\frac{1 - v/c}{1 + v/c}}\, \xi.$$

ce qu'on éprouve dans une descente en « bobsleigh », par exemple. Et ce qui est expérimenté alors est une « rotation généralisée », un élément de $\mathrm{SO}(3, 1)$, le groupe de la théorie relativiste (groupe de Lorentz). Sur les spineurs, cela produit le revêtement (toujours universel à deux feuillets) :

$$\mathrm{SL}_2(\mathbb{C}) \longrightarrow \mathrm{SO}(3, 1).$$

Le groupe $\mathrm{SO}(3, 1)$ lui-même s'identifie à $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{C})$; toutes les homographies de S_- correspondent à des transformations du groupe de Lorentz. Seuls les chemins divisibles par 2 peuvent se relever continûment.

En toutes dimensions et pour toutes les signatures de métriques g, le groupe $\mathrm{Spin}(g)$ est un revêtement à deux feuillets de $\mathrm{SO}(g)$ et l'espace des spineurs est celui d'une représentation linéaire exceptionnelle de $\mathrm{Spin}(g)$. (Lorsque g est définie positive ou définie négative, dès que la dimension est $\geqslant 3$, le groupe $\mathrm{Spin}(g)$ est le revêtement universel de $\mathrm{SO}(g)$.)

Depuis Pauli pour $\mathbb{R}^3$ et Dirac pour $\mathbb{R}^4$ jusqu'aux théories les plus modernes (super-cordes), les spineurs sont devenus les principaux constituants de la matière en Physique : électrons, positrons, protons, neutrons..., quarks, neutrinos. En Géométrie aussi, les spineurs ont fait la preuve de leur efficacité : équation de Dirac et théorèmes de l'indice d'Atiyah-Singer, plus récemment équations de Seiberg-Witten et invariants différentiables des variétés de dimension 4 ; un précurseur de la manière d'utiliser les spineurs a été A. Lichnerowicz, avec son théorème d'annulation du genre $\widehat{A}$ (pour les variétés spin à courbure scalaire $\geqslant 0$) en 1963.

La preuve donnée par E. Witten en 1981 de la positivité de la masse totale d'un univers asymptotiquement plat à courbure scalaire $\geqslant 0$, s'inspire des formules de Lichnerowicz et repose sur les propriétés des spineurs (voir le survol *loc. cit.* de Y. C.-B. 85). Tout le développement récent de la supergravité montre la force de la géométrie spinorielle en relativité générale et en cosmologie.

La philosophie de R. Penrose & W. Rindler (1984), poursuivant loin les idées du livre de E. Cartan (1937), consiste à ramener les principaux objets et les principales équations de notre espace-temps à des notions spinorielles. Pour cela, il n'est pas exagéré de tout définir le plus intrinsèquement possible :

Un espace de spineurs de Weyl E_- ($-$ comme dans la céleste S_-) est un espace vectoriel sur $\mathbb{C}$ de dimension 2. on pose $E_+ = \overline{E_-}$, le même espace sur $\mathbb{R}$, mais avec l'action conjuguée de $\mathbb{C}$ (*i.e.* l'homothétie de rapport z dans E_+ coïncide avec la multiplication par $\bar{z}$ dans E_-), et $E = E_- \oplus E_+$ est l'espace des spineurs de Dirac. L'ensemble des formes hermitiennes sur E_- constitue un espace vectoriel réel V de dimension 4, et le discriminant des formes donne à V une structure conforme canonique de signature $(3,1)$. Le cône de lumière Γ dans V est l'ensemble des formes dégénérées, les vecteurs de genre temps dirigés vers l'avenir sont les formes définies positives. Afin d'obtenir une métrique de Minkowski compatible avec cette structure conforme sur V, on choisit une 2-forme $\mathbb{C}$-bilinéaire alternée ω sur E_- ; celle-ci fournit un isomorphisme canonique de E_- sur E_-^* et un de E_+ sur E_+^*, de sorte que les vecteurs, éléments de V, s'interprètent comme certaines applications de E_- dans E_+ ; si $x \in V$, le couple $(x, {}^t x)$ appartient à $\mathrm{End}(E)$, on le note $\gamma(x)$, son déterminant est $-g(x,x)$. Si x correspond à une forme définie positive, son orthogonal $x^\perp$ dans V est un espace vectoriel de dimension 3 de genre espace, muni d'une métrique euclidienne. Ainsi E_-, équipé d'une aire ω et d'une forme hermitienne définie positive x_0, produit un espace M, euclidien de dimension 3 : l'espace M s'identifie naturellement à l'ensemble des endomorphismes anti-autoadjoints de trace nulle de E_-.

Pour installer ces structures sur une variété (orientable) W de dimension 4, on rencontre une obstruction topologique (une classe w_2 dans la cohomologie $H^2(W, \mathbb{Z}/2)$); si cette obstruction est nulle, il existe un fibré vectoriel $E = E_- \oplus E_+$ au-dessus de W tel que le fibré V associé à E soit isomorphe au fibré tangent $T(W)$. Le choix d'un isomorphisme $\rho : T(W) \to V$ permet de définir une métrique lorentzienne g sur W et de considérer les équations pour les champs de spineurs.

Par exemple, il existe une et une seule connexion ∇ sur E, induisant la connexion de Levi-Civita sur $T(W)$ et vérifiant $\nabla(\rho) = 0$; alors l'*opérateur de Dirac* $\not{D}$ sur les sections de E, *i.e.* les champs de spineurs, échangeant E_- et E_+, est défini par

$$\not{D}\psi = \mathrm{Tr}(\gamma \circ \rho \otimes \nabla\psi),$$

ou plus clairement, après le choix de coordonnées locales x^α sur W, en notant γ^α l'endomorphisme de E associé au champ de vecteurs $\partial/\partial x^\alpha$, *i.e.* les matrices de Dirac, on a

$$\not{D}\psi = \gamma^\alpha \nabla_\alpha \psi.$$

Un exemple de champ de spineurs est la fonction d'onde d'un électron en « première quantification », l'équation de Dirac s'interprétant comme son « équation de Schrödinger » :

$$\mathrm{Tr}\, i\not{D}\psi = m\psi, \tag{7}$$

pour un électron de masse m, libre dans l'espace-temps courbe W.

La présence d'un champ électromagnétique se traduit, en Mécanique quantique, par une connexion unitaire ∇_L sur un fibré en droites complexes L au-dessus de W; la fonction d'onde de l'électron est alors une section de $E \otimes L$ et l'opérateur $\not{D}_L$ qui remplace $\not{D}$ est associé à la connexion $\nabla \otimes 1 + 1 \otimes \nabla_L$ sur $E \otimes L$. En coordonnées locales et en trivialisant L, on écrit $\nabla_L = d + \frac{ie}{\hbar c} A$, où e est la charge de l'électron et A est une forme différentielle de degré 1 dont la dérivée extérieure $F = dA$ est le champ de forces du § 2 ; si bien que l'équation de Dirac s'écrit :

$$\mathrm{Tr}\, i\gamma^\alpha \nabla_\alpha \psi = \frac{e}{c} \gamma^\alpha A_\alpha \psi + m\psi. \tag{8}$$

D'autres interactions, d'autres forces, nommées faibles ou fortes, mettent en scène des fibrés vectoriels C de rang plus grand que 1, avec des connexions ∇_C représentant les *champs de Yang-Mills*. Alors les fonctions d'onde des fermions (électrons, muons, neutrinos, quarks) sont des sections de $E \otimes C$, soumises à des équations de Dirac. Les équations de Yang-Mills pour l'évolution des ∇_C généralisent les équations de Maxwell. On atteint ainsi un bel ensemble semi-classique pour toutes les particules déjà observées : fermions, photons, bosons vecteurs, gluons. A. Lichnerowicz (1964) avait démontré que l'équation de Dirac mène à un problème de Cauchy causal et bien posé ; Mme Choquet-Bruhat, avec D. Christodoulou (1987) démontre que l'ensemble couplé des équations de Yang-Mills et Dirac est causal et bien posé ; elle obtient même, grâce à la méthode conforme, l'existence de solutions globales sur l'espace de Minkowski plat. Ces résultats incluent aussi les *champs de Higgs* Φ ; ce sont les champs scalaires, encore inaperçus aujourd'hui, mais nécessaires au bon fonctionnement du *modèle standard* (Glashow, Salam, Weinberg).

Ces champs de Higgs sont fait exprès pour maintenir l'énorme groupe de symétries des équations de Yang-Mills-Dirac, la symétrie de jauge, tout en provoquant les masses observées des vecteurs d'interaction et des fermions ; c'est le montage de la « brisure de symétrie spontanée » (ou le vide de Higgs-Kibble). De la même façon que les données initiales d'un problème de Cauchy ne changent rien aux symétries des équations d'évolution, mais orientent l'histoire dans une voie particulière.

Les principes de la théorie quantique des champs, la recherche d'un guide pour mener les calculs d'effets quantiques toujours plus fins, on débouché sur la découverte de symétries nouvelles, avec l'espoir que la nature aura su les utiliser, dans un état spontanément brisé. Par exemple, la *super-symétrie*.

A priori, toute particule correspond à une composante irréductible de la représentation du groupe des spineurs sur une puissance tensorielle $E \otimes E \otimes \cdots \otimes E$ avec n facteurs ; dans ce cas, on parle de champ d'*hélicité* $n/2$, ou encore de *spin* $n/2$. Par exemple, l'électron est de spin $1/2$; un champ de vecteurs est de spin 1, puisqu'il provient de $E \otimes E$, isomorphe à $\mathrm{End}(E)$; une métrique $g_{\mu\nu}$ est de spin 2, la particule quantique associée s'appelle le *graviton*, etc. Les particules de spin $1/2, 3/2, \ldots$ sont les fermions, celles de spin $0, 1, 2, \ldots$ les bosons.

La super-symétrie, introduite au début des années 70 (Gol'fand, Likhtman, Ramond, Virasoro, Gervais, Sakita, Neveu, Schwarz, 1971), se propose d'échanger fermions et bosons. Le modèle de « super-espace-temps », espace vectoriel gradué, V en degré 0, $E \oplus \cdots \oplus E$, N fois en degré 1, fait apparaître les translations dans l'espace ordinaire V (de dimension $d = 4$) comme des composées d'éléments de l'espace des spineurs E. (Selon une règle $(x,\psi)+(y,\eta) = (x+y+\sigma(\psi,\eta),\psi+\eta)$, avec $\sigma : E^N \otimes E^N \to V$, linéaire naturelle, qui montre bien les spineurs comme des racines carrées de vecteurs.)

Les théories de la *super-gravité* (Deser, Zumino, Ferrara, Freedman, van Nieuwenhuizen, 1976) étendent la relativité générale au cadre super-symétrique. Le graviton $g_{\mu\nu}$ est accompagné de N super-partenaires ${\psi_\mu}^A$, les gravitini, de spin $3/2$; on dit que N est le nombre de super-symétries. (Toutes les particules connues auraient des super-partenaires ; pour l'instant, aucun d'entre eux ne s'est manifesté directement aux observateurs.)

Depuis longtemps (Élie Cartan), on savait que le couplage des équations d'Einstein avec les équations de Dirac exigeait un changement de point de vue : premièrement, la torsion de la connexion ne doit plus s'annuler car le tenseur énergie-moment du spineur n'est pas symétrique (donc la courbure de Ricci n'est pas symétrique non plus) et on a besoin de la théorie d'Einstein-Cartan (1925) ; deuxièmement (Sciama-Kibble, 1961) les variables ne doivent plus être ψ^A, $\overline{\psi}^{\overline{A}}$ ($A = 0, 1$ indice de spineur E_+, ou $\overline{A}$ pour E_-) et $g_{\mu\nu}$, mais, à côté de ψ^A et $\overline{\psi}^{\overline{A}}$, on doit considérer le *vielbein* ${e_\mu}^\alpha$, c'est-à-dire les coordonnées de l'isomorphisme $\rho : T(W) \to V$ qui détermine la métrique, et enfin une connexion lorentzienne ${\omega_\mu}^\alpha{}_\beta$ sur V.

Avec ces modifications, il avait été possible d'établir que le système Einstein + Dirac possède un problème de Cauchy bien posé et causal (*cf.* Latrémolière 1964, 1970). Par contre, pour les particules de spin $3/2$ et plus, les équations naturelles, proposées par Rarita et Schwinger (1941), requièrent des contraintes, qui font que le couplage avec Einstein mène à un problème mal posé (Buchdahl, 1958, Latrémolière, 1970).

Or, dans le cadre de la super-gravité, on retrouve à côté des équations d'Einstein l'équation de Rarita-Schwinger pour le mouvement du gravitino ; il est donc remarquable que Mme Choquet-Bruhat ait démontré le caractère bien-posé et strictement causal du problème de Cauchy de la super-gravité ($N = 1$). (Voir « Classical supergravity, the Cauchy problem », Lett. Math. Phys. 1983, et « The Well-posedness of $(N = 1)$ classical supergravity », J. Math. Phys. 1985, avec Bao, Isenberg et Yasskin, ainsi que la communication de Mme Choquet-Bruhat au Colloque Élie Cartan en 1985.) La raison de ce résultat tient précisément à l'existence des super-symétries, garantissant la stabilité dynamique des contraintes, et aussi à la nature du super-espace qui entraîne que les coordonnées des champs ne doivent pas être considérées comme des fonctions numériques, mais comme des fonctions à valeurs dans une algèbre extérieure (*a priori* de dimension infinie), dans la partie paire pour les bosons, dans la partie impaire pour les fermions.

L'aventure ne s'arrête pas là ; la dimension de l'espace-temps elle-même n'a pas résisté au désir de symétrie : en 1978, E. Cremmer, B. Julia et J. Scherk on trouvé une théorie $(N = 1)$ « maximale » en dimension 11 (à côté du vielbein, de la connexion lorentzienne et du gravitino, il faut considérer une 3-forme différentielle). Cette théorie s'est tout récemment révélée être au cœur de l'unification des théories des super-cordes en M-théorie (M comme mère, ou grand-mère, mystère ou merveille...) dans un monde où les symétries (et les dualités) échangent les dimensions des espaces-temps, les effets quantiques et classiques, etc. À nouveau, cette exceptionnelle théorie de super-gravité $d = 11$ satisfait aux exigences du bien-posé et du causal ; c'est ce qu'a établi Mme Choquet-Bruhat en 1985.

C'est un fait d'Analyse : il n'existe pas de fonction de variable réelle, non nulle, s'annulant sur tout un intervalle, et dont la transformée de Fourier s'annule sur une demi-droite. Or la physique quantique tient à ce que la propagation des influences d'un point à l'autre de l'espace-temps soit véhiculé par des particules d'*énergie positive* (même si elles sont virtuelles). Richard Feynman en a déduit que cette propagation ne peut être tout à fait nulle hors du cône de lumière (*cf.* par exemple la Dirac Memorial Lecture, 1986). (C'est l'origine des antiparticules, et du principe d'exclusion de Pauli, la solitude des fermions...)

Tout l'appareil de la théorie quantique repose sur ces propagateurs de Feynman qui violent la causalité ; comment comprendre avec ça que les principes quantiques, à travers la théorie de la renormalisation (qui est un autre nom de la quantification des champs) sélectionnent exactement les dynamiques bien posées et causales ? (*cf.* par exemple 't Hooft *Under the spell of the gauge principle*, 1994.)

Une première réponse tient à l'approche perturbative de la renormalisation (je remercie Romain Attal pour une discussion sur ces questions) ; en effet, la causalité semi-classique entraîne une décroissance exponentielle des propagateurs de Feynman en dehors du cône de lumière, et cela assure assez de convergence pour le réordonnement des régularisations. Or il est possible que la théorie quantique des champs soit essentiellement une théorie de perturbations (peut-être par rapport à des limites classiques variées). Une deuxième réponse viendrait du point de vue opposé, à savoir que la cohérence des calculs quantiques serait fondée sur l'existence d'une théorie non perturbative, sans divergence, reposant sur la gravitation, la relativité générale, bien posée et bien comprise (*cf.* 't Hooft, *loc. cit.*, derniers chapitres). La super-symétrie a prouvé sa valeur pour faciliter la renormalisation, mais réconcilier les équations d'Einstein et la Mécanique quantique reste un problème majeur.

Pour le moment, admirons l'actualité des théorèmes de Yvonne Choquet-Bruhat et l'harmonie des principes classiques et quantiques. Ces points de beauté abstraite où l'âme s'accorde à la nature. Dans *William Shakespeare* (1864), Victor Hugo montre la science se détruisant, se raturant, progressant, en agitation perpétuelle ; ce qui la distingue de la poésie « irréductible, incorruptible et réfractaire » : ... « la science est une échelle »... « la poésie est un coup d'aile ». Mais en contemplant au contraire la permanence de certaines idées de la Géométrie et de la Physique, comme elle sont à l'œuvre dans les travaux de Mme Choquet-Bruhat, on est tenté de reprendre pour l'art en science les mots sur la poésie :

« Comme la mer, elle dit chaque fois tout ce qu'elle a à dire ; puis elle recommence avec une majesté tranquille, et avec cette variété inépuisable qui n'appartient qu'à l'unité. »

Daniel Bennequin
Université de Paris VII, Institut de mathématiques (Jussieu).