PROBLÈMES D'ÉQUIVALENCE EN GÉOMÉTRIE DIFFÉRENTIELLE
(SUR LES TRAVAUX DE PAULETTE LIBERMANN)

Michèle Audin

Le domaine dans lequel Paulette Libermann a travaillé est celui de la *géométrie différentielle*, c'est-à-dire de l'étude locale des variétés différentielles[1] — en général équipées de structures supplémentaires. Les mots-clefs de cette théorie sont les mots fibrés, systèmes de Pfaff, jets, feuilletages, connexions, pseudo-groupes de Lie[2], etc.

Trois lieux. — Même en consacrant cet exposé aux mathématiques de Paulette Libermann, je ne peux m'empêcher de citer aussi trois mots-clefs de sa biographie, trois noms de villes. Le mot « Sèvres », la défunte École Normale Supérieure de Jeunes Filles où elle a été élève à partir de 1938 et à laquelle elle est restée très attachée (pour des témoignages sur la vie à Sèvres pendant la guerre et sur l'action d'Eugénie Cotton pour transformer ce pensionnat de Jeunes Filles, voir notamment l'article de Paulette Libermann [**14**] et celui de Jacqueline Ferrand [**7**]). Le mot « Vichy », les lois antisémites françaises du 10 octobre 1940 lui ayant interdit de passer l'agrégation, la poussant ainsi, d'une certaine façon vers la recherche mathématique avec Élie Cartan. Le mot « Strasbourg », où elle a passé sa thèse avec Charles Ehresmann[3] en 1953 avant d'obtenir un poste de Professeur à Rennes, puis à Paris.

Je remercie Paulette Libermann pour son aide à la préparation de cet exposé et l'association *femmes et mathématiques* pour m'avoir donné l'occasion de lui rendre cet hommage.

[1]Pour une belle introduction grand public à la géométrie différentielle classique on pourra se reporter à l'article [**10**] de Paulette Libermann dans l'Encyclopædia Universalis.

[2]L'étude de cette dernière notion est un des apports de la thèse de Paulette Libermann [**12**].

[3]Les travaux d'Ehresmann et de toute cette école strasbourgeoise ont eu une influence décisive sur la géométrie différentielle du vingtième siècle.

Paulette Libermann a publié et continue à publier de nombreux articles sur la géométrie différentielle. Il n'est pas question de faire ici une liste exhaustive de toutes ses contributions. Je vais essayer de donner une idée des problèmes et des méthodes en m'adressant à un public supposé large et non spécialiste. Pour ce faire, je vais me limiter à un thème précis et présenter l'exposé de la façon suivante :

(1) Introduction : les problèmes d'équivalence
(2) Un exemple : la géométrie symplectique

Colloque international de géométrie différentielle, Strasbourg 1953.
Photo : « Dernières Nouvelles de Strasbourg », tous droits réservés.

1. Le problème d'équivalence

Il s'agit d'un problème très général, de mathématiques classiques, étudié notamment par Élie Cartan (le premier « maître » de Paulette Libermann) qui en a donné une présentation synthétique dans [**3**]. Grossièrement, il s'agit de classifier, à isomorphisme local près, certaines structures[4] sur les variétés. J'insiste sur le fait que le problème est *local*. Voici des exemples très simples :

– une variété de dimension n est localement difféomorphe à $\mathbf{R}^n$ et donc deux variétés de même dimension sont toujours localement équivalentes. En particulier une sphère et un plan (figure 1).

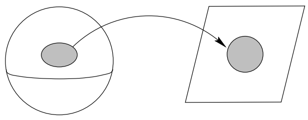

FIGURE 1

Si on met plus de structure, ça peut devenir un peu plus compliqué

– par exemple, notre sphère, *avec la métrique* induite par celle de l'espace euclidien n'est *pas* localement isométrique au plan euclidien : pour offrir un ballon, on ne peut pas faire de paquet cadeau sans pli. Il y a un invariant local qui est la courbure. Un théorème de Gauss (*theorema egregium*) affirme d'ailleurs que si deux surfaces sont localement isométriques, alors elles ont nécessairement la même courbure, comme par exemple un cône et un plan (ce qui explique qu'on puisse emballer un cornet de glace !).

Sur une variété, on peut mettre une grande... variété... de structures ou d'objets divers (formes différentielles, champs de vecteurs...)

– par exemple (figure 2), une variété avec un champ de vecteurs qui ne s'annule pas est localement équivalente à $\mathbf{R}^n$ avec le champ de vecteurs $\dfrac{\partial}{\partial x_1}$ (c'est un théorème de redressement).

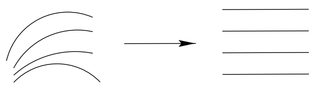

FIGURE 2

– avec une 1-forme, c'est déjà plus compliqué... avec une famille de 1-formes, on a un système de Pfaff, notion que j'ai déjà mentionnée et à laquelle Paulette Libermann a consacré beaucoup de ses travaux.

[4]Les structures étudiées par Cartan dans cet article sont plus spécifiquement les « systèmes de Pfaff » (voir plus bas).

Systèmes de Pfaff, feuilletages. — En termes modernes, un système de Pfaff sur une variété W est un sous-fibré F du fibré tangent TW. Par exemple, une 1-forme α qui ne s'annule pas sur W définit un système de Pfaff, le champ de ses noyaux en chaque point.

Une famille remarquable d'exemples de systèmes de Pfaff est celle des feuilletages : la variété est *feuilletée*, c'est-à-dire localement modelée sur $\mathbf{R}^n$ muni de la famille des sous-espaces affines parallèles à $\mathbf{R}^r \times 0$ (les feuilles, figure 3). Le fibré tangent aux feuilles est un sous-fibré du fibré tangent, un système de Pfaff. Je noterai $\mathcal{F}$ le feuilletage (le système des feuilles) et F le sous-fibré.

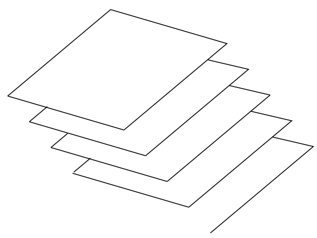

FIGURE 3. Feuilletage

Bien entendu, tous les systèmes de Pfaff ne sont pas des feuilletages. En effet, un sous-fibré du fibré tangent n'est pas nécessairement intégrable : la donnée infinitésimale n'est pas forcément tangente à des sous-variétés[5]. Par exemple, sur $\mathbf{R}^3$ (avec coordonnées q, p, z), la forme $dz - p\,dq$ définit un système de Pfaff qui n'est pas un feuilletage (figure 4) : il n'y a aucune famille

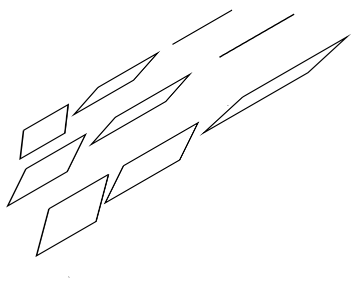

FIGURE 4. Structure de contact

[5]La condition nécessaire et suffisante d'intégrabilité de Frobenius est : dès que X et Y sont deux champs de vecteurs dans F, leur crochet $[X, Y]$ est aussi dans F.

de surfaces dans $\mathbf{R}^3$ qui soit tangente en tout point au noyau de cette forme[6]. C'est une *forme de contact*.

2. Un exemple, la géométrie symplectique

J'ai choisi de continuer cet exposé en me consacrant à la géométrie symplectique, pour plusieurs raisons (en plus de mon goût personnel) :

– parce que c'est un sujet en pleine activité[7] ce qui permet de montrer Paulette Libermann « dans les mathématiques contemporaines » comme le titre de la journée nous y invite ;

– parce que ceux des résultats de la thèse de Paulette Libermann qui concernent la géométrie symplectique sont désormais des classiques. Soutenue en 1953, cette thèse n'a pas cessé d'être redécouverte dans les années 70-80, quand la géométrie symplectique est devenue à la mode ;

– aussi parce que, si vous voulez apprendre la géométrie symplectique, il y a de bonnes chances que vous le fassiez par le livre [**15**] que Paulette Libermann a écrit sur ce sujet avec C.-M. Marle.

Voici donc ce dont il s'agit : on considère une variété W avec une 2-forme différentielle ω. En chaque point de W, la forme ω définit une forme bilinéaire alternée sur l'espace tangent. On demande que celle-ci soit *non-dégénérée*. On demande aussi que la forme ω soit *fermée* (c'est-à-dire que $d\omega = 0$).

Exemple. — On prend pour W l'espace $\mathbf{R}^{2n} = \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n$ avec ses coordonnées $q_1, \ldots, q_n$ et $p_1, \ldots, p_n$ et la forme

$$\omega = dp_1 \wedge dq_1 + \cdots + dp_n \wedge dq_n. \tag{1}$$

En fait cette forme est constante (ne dépend pas du point considéré), c'est tout simplement la forme bilinéaire

$$\omega\left((X, Y), (X', Y')\right) = X' \cdot Y - X \cdot Y'. \tag{2}$$

Il y a bien d'autres exemples, notamment toutes les surfaces orientables avec une forme volume (la condition de fermeture est vide dans ce cas),

[6] Il est remarquable que les formes de Pfaff dont la distribution des noyaux est intégrable (feuilletages) et celles qui vérifient une condition de non-intégrabilité semblable à $dz - p\,dq$ (structures de contact) aient été réunies récemment par Eliashberg et Thurston sous le titre générique de *feuilletact* (voir [**8**]).

[7] Auquel d'ailleurs de nombreuses mathématiciennes apportent des contributions très importantes, F. Kirwan, D. McDuff, L. Jeffrey par exemple.

toutes les variétés kählériennes (et en particulier toutes les variétés projectives complexes) et encore bien d'autres.

Si on avait muni chaque espace tangent d'une forme bilinéaire *symétrique* non dégénérée, on aurait une métrique (pseudo-)riemannienne. On a déjà dit qu'il y aurait des invariants locaux (la courbure).

Par contre, dans le cas symplectique, le problème d'équivalence semble réglé tout de suite par un théorème de Darboux[8] :

Théorème 2.1. — *Toutes les variétés symplectiques sont localement isomorphes à* $(\mathbf{R}^{2n}, \omega)$.

En particulier, il n'y a aucun invariant local (analogue à la courbure) pour les variétés symplectiques. Bon, alors, on s'arrête ? Non. Au contraire. Voilà deux pistes possibles :

(1) On peut chercher des invariants globaux. Pour l'étude globale des variétés symplectiques, un des outils modernes utilisés est la théorie des courbes holomorphes de Gromov [**9**]. Elle repose sur la notion de structures presque complexes adaptées à la forme symplectique, une des nombreuses notions que Paulette Libermann a étudiées dans sa thèse [**12**].

(2) On peut rigidifier un peu la structure. Ce n'est pas un jeu abstrait : revenons à notre espace $\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n$. Il est muni — globalement — de coordonnées p et de coordonnées q[9]. Cet espace est donc muni de deux *feuilletages* (p = cste, q = cste) transverses et *lagrangiens* (la forme symplectique est identiquement nulle si on la restreint à chacune des feuilles de l'un ou de l'autre). C'est ce type de structure et le problème d'équivalence associé que Paulette Libermann a étudiés dans l'article [**13**][10].

C'est à ce problème que sera consacrée la suite de cet exposé. Revenons donc aux feuilletages.

Feuilletages et intégrales premières. — Si $E \subset TW$ est un sous-fibré de rang r, les feuilles peuvent être décrites localement par des équations

$$f_1 = a_1, \dots, f_m = a_m \qquad (m + r = \dim W). \tag{3}$$

[8] Je suppose ici et dans tout l'exposé que toutes les données sont $\mathcal{C}^\infty$. On peut être plus précis (voir à ce sujet la note de Paulette Libermann [**11**] ainsi que les propriétés de divisibilité à la Lepage dans ses notes avec Ehresmann [**5, 6**], propriétés reprises dans le livre [**15**] à la demande de Reeb).

[9] Ces notations viennent de la mécanique où les q sont des positions et les p des impulsions.

[10] publié dans un volume d'hommage à Georges Reeb, un autre fleuron de l'école strasbourgeoise d'Ehresmann.

De telles fonctions sont des *intégrales premières* (constantes le long des feuilles).

Feuilletages symplectiquement complets. — Une forme symplectique est, par définition, une machine à accoupler les champs de vecteurs. Par dualité, elle accouple les 1-formes et en particulier les différentielles des fonctions : c'est le crochet de Poisson

$$\{f, g\} = \omega(X_f, X_g) \tag{4}$$

où X_f est le champ de vecteurs défini par $\omega(X_f, \cdot) = df(\cdot)$.

Les feuilletages les plus intéressants pour les mécaniciens et/ou les symplecticiens[11] sont les feuilletages *complets* : le crochet de Poisson de deux intégrales premières locales est une intégrale première. Paulette Libermann a introduit[12] la notion de feuilletage *symplectiquement complet* : ce sont les feuilletages complets définis localement par m intégrales premières indépendantes.

***Théorème 2.2* ([13]).** — *Soit $\mathcal{F}$ un feuilletage d'une variété symplectique (W, ω). Pour que $\mathcal{F}$ soit symplectiquement complet, il faut et il suffit que le sous-fibré F^o (l'orthogonal de F pour ω) soit intégrable.*

On aura compris qu'il n'y a aucune raison en général pour que l'orthogonal d'un feuilletage soit un feuilletage. La démonstration de la proposition n'est pas très difficile, mais c'est quand même une propriété remarquable par ses conséquences. Par exemple :

***Corollaire 2.3* ([13]).** — *Si $\mathcal{F}$ est un feuilletage co-isotrope[13] d'une variété symplectique, alors F^o est un feuilletage (isotrope), c'est-à-dire, est intégrable.*

On en déduit aussi un théorème classique de Caratheodory, Jacobi et Lie... qui généralise le théorème de Darboux (voir ci-dessus).

***Corollaire 2.4*.** — *Soient $(f_1, \ldots, f_m)$ des fonctions en involution[14] définies et indépendantes au voisinage d'un point x d'une variété symplectique (W, ω) de dimension $2n$. Il existe un voisinage de x sur lequel on peut définir des fonctions*

[11] terme embrassant les symplecticiennes, on l'aura compris.

[12] Inspirée par le livre d'Élie Cartan [**4**], me dit-elle.

[13] C'est-à-dire tel que $F^o \subset F$.

[14] C'est-à-dire telles que $\{f_i, f_j\} = 0$. On remarquera que cette propriété force $m \leq n$ si les f_i sont indépendantes.

$f_{m+1}, \dots, f_n, g_1, \dots, g_n$ *de sorte que, sur ce voisinage*

$$\omega = df_1 \wedge dg_1 + \cdots + df_n \wedge dg_n. \tag{5}$$

On obtient Darboux avec $m = 1$ (avec $m = 0$ aussi, mais il est plus agréable de ne pas partir de rien). Mais on a bien mieux. Par exemple, on a une écriture locale de ω « au voisinage d'un feuilletage co-isotrope » (voir [**13**]). On peut aussi obtenir un théorème de Cartan encore plus général que l'énoncé 2.4 qui décrit la forme symplectique au voisinage d'un feuilletage symplectiquement complet sur les feuilles duquel la forme ω est de rang constant (voir encore [**13**]).

Remarque 2.5. — Ceci règle le problème d'équivalence pour une forme symplectique et un feuilletage symplectiquement complet. Plus généralement, on peut décrire la forme symplectique au voisinage d'une sous-variété (voir [**15**] et [**2**]).

Feuilletages lagrangiens. — Un cas particulièrement intéressant de feuilletages co-isotropes est celui des feuilletages *lagrangiens*. Ce sont les feuilletages co-isotropes de dimension minimale n (ou les feuilletages isotropes de dimension maximale n). Dans ce cas, $\mathcal{F}^o = \mathcal{F}$.

Remarquons d'abord qu'il peut très bien n'exister aucun feuilletage lagrangien sur une variété symplectique donnée W. Par exemple, la sphère S^2 ne possède aucun feuilletage lagrangien (elle ne possède aucun feuilletage non trivial). Plus généralement, en utilisant les structures presque complexes — ou presque kählériennes — de [**12**], on voit que, pour que TW possède un sous-fibré lagrangien F, il faudrait qu'il soit isomorphe au complexifié de F, ce qui est une restriction très sévère.

Par contre, si TW possède un sous-fibré lagrangien, il y a des sous-fibrés lagrangiens transverses. A un couple de sous-fibrés lagrangiens F_1, F_2 de TW, Paulette Libermann associe une *connexion*. La torsion de celle-ci est l'obstacle à l'intégrabilité des deux fibrés. Si la connexion est sans torsion, elle induit une connexion *plate* sur chacune des feuilles ([**12**], voir aussi [**13**]). Celles-ci sont donc munies d'une structure affine[15].

***Théorème 2.6* ([12], [16])**. — *Les feuilles d'un feuilletage lagrangien possèdent une structure affine naturelle. L'espace des feuilles est aussi muni d'une structure affine naturelle.*

[15]Si on l'exprime dans ces termes, ce résultat de la thèse de Paulette Libermann est un théorème de Weinstein [**16**].

L'existence de ces structures affines est un des résultats fondamentaux de la géométrie symplectique. Ces structures affines sont à la base de l'existence des variables action-angle (le théorème d'Arnold-Liouville [**1**]) et de la théorie des systèmes intégrables : elles donnent un sens au fait qu'on puisse « linéariser » les solutions des équations du mouvement d'une toupie ou d'une particule libre sur un ellipsoïde par exemple.

Le problème d'équivalence de la structure formée par deux feuilletages lagrangiens transverses est assez délicat (et de même nature que celui de la courbure évoqué au § 1).

Centre Banach, Varsovie, 1998. Photo : P. Libermann.

Note sur la bibliographie

Paulette Libermann est l'auteur de plus de soixante articles et ouvrages de géométrie. Je n'en cite ici que sept, ce sont les références nécessaires à l'intelligibilité de cet exposé. Je fais figurer aussi dans la bibliographie d'autres ouvrages et articles sur la géométrie symplectique, que j'ai cités dans l'exposé et qui devraient permettre de situer le travail de Paulette Libermann sur la géométrie symplectique dans les mathématiques de notre temps.

Références

[1] V. I. ARNOLD – *Méthodes mathématiques de la mécanique classique*, Mir, Moscou, 1974.

[2] V. I. ARNOLD & A. B. GIVENTAL – « Symplectic geometry », *Dynamical systems, Encyclopædia of Math. Sci., Springer* (1985).

[3] E. CARTAN – « Les problèmes d'équivalence », *Selecta, Paris, Gauthier-Villars* (1937).

[4] ______, *Leçons sur les invariants intégraux*, Hermann, Paris, 1971.

[5] C. EHRESMANN & P. LIBERMANN – « Sur les formes différentielles extérieures de degré 2 », *C. R. Acad. Sc. Paris* **227** (1948), p. 420–421.

[6] ______, « Sur le problème d'équivalence des formes différentielles extérieures quadratiques », *C. R. Acad. Sc. Paris* **229** (1949), p. 697–698.

[7] J. FERRAND – *Sévriennes d'hier et d'aujourd'hui* **147** (1993).

[8] E. GIROUX – « Topologie de contact en dimension 3 (autour des travaux de Yakov Eliashberg), Séminaire Bourbaki, 1992-93 », *Astérisque* **216** (1993), p. 7–33.

[9] M. GROMOV – « Pseudo-holomorphic curves in symplectic manifolds », *Invent. Math.* **82** (1985), p. 307–347.

[10] P. LIBERMANN – « Géométrie différentielle classique », *Encyclopædia Universalis, tome 10*.

[11] ______, « Forme canonique d'une forme différentielle extérieure quadratique fermée », *Acad. Roy. Belgique. Bull. Cl. Sci.* **39** (1953), p. 846–850.

[12] ______, « Sur le problème d'équivalence de certaines structures infinitésimales, thèse, 1953 », *Annali di Matematica* **36** (1954), p. 27–120.

[13] ______, « Problèmes d'équivalence et géométrie symplectique », *Astérisque* **107-108** (1983), p. 43–68.

[14] ______, « Souvenirs de l'Ecole de Sèvres », *A l'Ecole de Sèvres, 1938-1945* (1995).

[15] P. LIBERMANN & C. M. MARLE – *Symplectic geometry and analytic mechanics*, Reidel, Boston, 1987.

[16] A. WEINSTEIN – *Lectures on symplectic manifolds*, CBMS Regional Conference Series in Mathematics, 29, Amer. Math. Soc., 1977.

exposé du 1er février 1997, version finale de février 2001

Michèle Audin

Institut de Recherche Mathématique Avancée, Université Louis Pasteur et CNRS, 7 rue René Descartes, 67084 Strasbourg cedex, France.

E-mail : `Michele.Audin@math.u-strasbg.fr`

Url : `http://www-irma.u-strasbg.fr/~maudin`