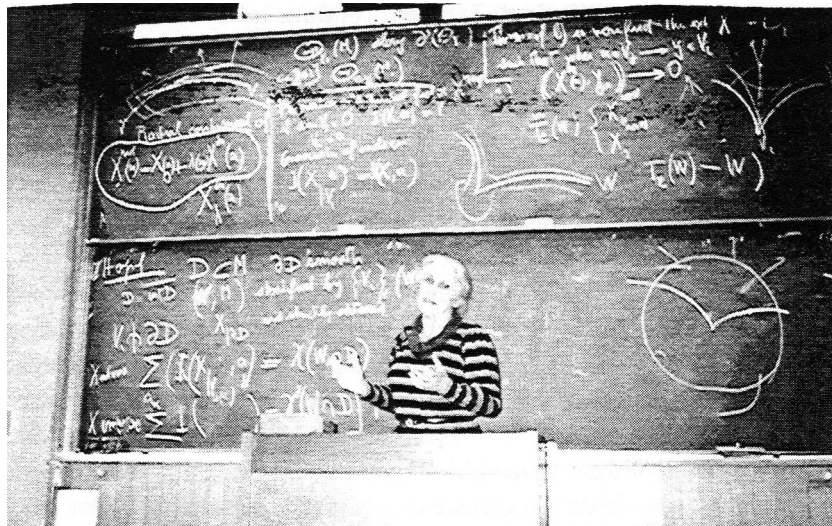


**À PROPOS DES CHAMPS RADIAUX
UN ASPECT DE L'ŒUVRE MATHÉMATIQUE
DE MARIE-HÉLÈNE SCHWARTZ**

Jean-Paul Brasselet

De l'étude des fonctions d'une variable complexe aux classes caractéristiques des variétés singulières, le parcours mathématique de Marie-Hélène Schwartz a suivi une ligne directrice bien déterminée, bravant toutes les difficultés rencontrées en chemin. Cet exposé n'a pas pour but de décrire l'ensemble des travaux de Marie-Hélène Schwartz mais de montrer comment ses résultats suivent cette ligne directrice. On peut en fait distinguer dans son parcours mathématique quatre périodes dont les thèmes couvrent successivement les fonctions d'une variable complexe, la théorie de Ahlfors, le théorème de Poincaré-Hopf pour les variétés singulières et les champs radiaux, les classes caractéristiques des variétés singulières.



Marie-Hélène Schwartz donne une conférence sur les champs radiaux à l'université de Kyoto, mai 1984. Photo : M.-H. Schwartz.

I. 1939-44

a) Sur les fonctions d'une variable complexe. — À cette époque les mathématiciens se préoccupaient beaucoup de fonctions d'une variable complexe. Ainsi l'une des questions du jour était la suivante : existe-t-il des fonctions ayant des valeurs déficientes non asymptotiques ? Une valeur de la fonction est déficiente si elle est prise « en moyenne » moins souvent que les autres. Une valeur ζ est asymptotique si on peut lui associer une courbe tendant vers l'infini sur laquelle $f(z)$ tend vers ζ . Par exemple, pour la fonction $f(z) = e^z$, la valeur 0 est à la fois déficiente et asymptotique.

Marie-Hélène Schwartz publie une note aux CRAS, le 10 Mars 1941 : « Exemple d'une fonction méromorphe ayant des valeurs déficientes non asymptotiques ». Il s'agit de la fonction

$$f(z) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1 + \frac{z}{4^n}}{1 - \frac{z}{4^n}} \right)^{(-2)^n}.$$

La note de Marie-Hélène Schwartz a été très appréciée à Clermont-Ferrand où la Faculté de Strasbourg s'était alors repliée. En fait, après la guerre, on a su que Teichmüller, tué en combattant dans les rangs de la Wehrmacht, en avait trouvé un autre exemple.

Elle rencontra peu après les idées d'un japonais, Shimizu, lequel associait à toute fonction méromorphe un pavage du plan. Mais cette fois, elle n'eut rien à rédiger car André Weil, de passage à Clermont-Ferrand, lui a dit : « Allez donc voir dans le Japanese Journal of Maths ».

C'est dans cette période difficile de la guerre, et dans la clandestinité, que Marie-Hélène Schwartz montre ses talents d'ingéniosité, de travail fin et d'imagination dans un domaine tout autre que les mathématiques. On la voit ainsi fabriquer de fausses cartes d'identité destinées à sa famille, en transformant habilement le nom de « Schwartz » en « Salimartin ».

b) Théorie de Ahlfors. — La théorie de Ahlfors (dédite de celle de Nevanlinna, également finlandais) permet de montrer que pour une fonction $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow S^2$, la caractéristique d'Euler $\chi(S^2) = 2$ est égale à la somme du « défaut transcendant » (donné par les valeurs déficientes de f) et du « défaut algébrique » (attaché aux valeurs critiques de f). La caractéristique d'Euler subsistera dans les généralisations de cette formule que donnera Marie-Hélène Schwartz, par exemple dans la seconde partie de sa thèse.

L'idée de Marie-Hélène Schwartz était de généraliser les travaux de Ahlfors aux variétés analytiques complexes de dimensions supérieures. En fait, elle travaillait déjà, à cette époque, dans le cadre des applications triangulables, ce qui reviendra par la suite.

II. 1945-53

a) Formules de Chern. — Quand les Schwartz passèrent à Paris, Marie-Hélène montra son travail sur une généralisation de la formule d'Ahlfors. Celui-ci fut trouvé original mais « trop plein de triangulations ». Heureusement, la méthode de Shiing-Shen Chern, alors professeur à Chicago, venait d'être connue. Les travaux de Chern vont en fait apporter à Marie-Hélène Schwartz les ingrédients utiles pour la généralisation cherchée, exerçant une influence primordiale dans la seconde partie de son parcours.

Chern définit, pour une variété riemannienne (compacte) orientée M de dimension $n + 1$, des formes différentielles de courbure Ω (de degré $n + 1$) sur M et de transgression Π (de degré n) sur le fibré tangent TM , telles que si $\pi : TM \rightarrow M$ désigne la projection canonique et si S^n désigne la sphère unité orientée dans une fibre $T_x M \cong \mathbb{R}^{n+1}$, alors on a :

$$d\Pi = -\pi^*\Omega \quad \text{et} \quad \int_{S^n} \Pi = 1$$

Ainsi, si γ est un cycle d'une fibre $T_x M$, d'indice I dans $H_n(T_x M - \{0\}) \cong \mathbb{Z}$, il vient $\int_\gamma \Pi = I$.

Chern a d'abord établi ces formules pour remplacer une lourde généralisation du théorème classique de Gauss-Bonnet (d'où le titre de la thèse de Marie-Hélène Schwartz) par une formule de Stokes. Sa méthode eut beaucoup d'applications.

b) Poincaré-Hopf. — Pour comprendre la suite des travaux de Marie-Hélène Schwartz, il faut se rappeler la définition de l'indice d'un champ de vecteurs tangent à la variété M en un point singulier isolé : localement la variété s'identifie à un ouvert U de \mathbb{R}^{n+1} et le fibré tangent à $U \times \mathbb{R}^{n+1}$. Ainsi un champ de vecteurs tangent est une section

$$v : x \mapsto v(x) \in T_x M \cong \mathbb{R}^{n+1}$$

du fibré tangent. Si v désigne un champ de vecteurs différentiable, admettant une singularité isolée en $a \in U$, on note S^n le bord d'une boule $B \subset U$ dans laquelle v n'a pas d'autre singularité que a . L'indice $I(v, a)$ est le degré de l'application

$$\frac{v}{|v|} : S^n \rightarrow S^n .$$

Étant donné un champ de vecteurs différentiable v , sortant de M le long de son bord ∂M et admettant des points singuliers isolés en nombre fini $(a_i)_{i \in I}$, le relèvement de M par v dans TM est une variété orientée à bord $\partial(v(M)) = v(\partial M) \cup \gamma_i$ où γ_i est un cycle de la fibre $T_{a_i} M$, son indice est l'indice du champ de vecteurs v au point a_i :

$$I(v, a_i) = \int_{\gamma_i} \Pi .$$

Chern applique la formule de Stokes à la variété à bord de TM définie par le champ de vecteurs v et aux formes différentielles Ω et Π :

$$\int_M \Omega = \int_{\pi(v(M))} \Omega = \int_{v(M)} \pi^* \Omega = \int_{\partial(v(M))} -\Pi = \int_{v(\partial M)} -\Pi + \sum_{i \in I} I(v, a_i)$$

Rappelons aussi que si M est une variété compacte, sans bord, triangulée, de dimension $n + 1$, et si k_j désigne le nombre de simplexes de dimension j , la caractéristique d'Euler-Poincaré de M est définie par la somme alternée

$$\chi(M) = \sum_{j=0}^{n+1} (-1)^j k_j$$

Par exemple, pour le tore de dimension 2, $\chi(T) = 0$, pour la sphère S^2 , on a $\chi(S^2) = +2$.

Sur une variété lisse (compacte, sans bord), si v est un champ de vecteurs différentiable à singularités isolées a_i , la méthode de Chern permet de montrer la formule de Poincaré-Hopf :

$$\chi(M) = \sum I(v, a_i).$$

Ainsi, sur le tore, on sait construire un champ de vecteurs sans singularités, de même, sur la sphère S^2 , on sait construire un champ ayant deux points singuliers aux pôles, chacun d'indice $+1$. Comme on le verra, la méthode de démonstration et les ingrédients introduits par Chern joueront un rôle important dans la suite des travaux de Marie-Hélène Schwartz en lui permettant de définir ses propres outils et méthodes.

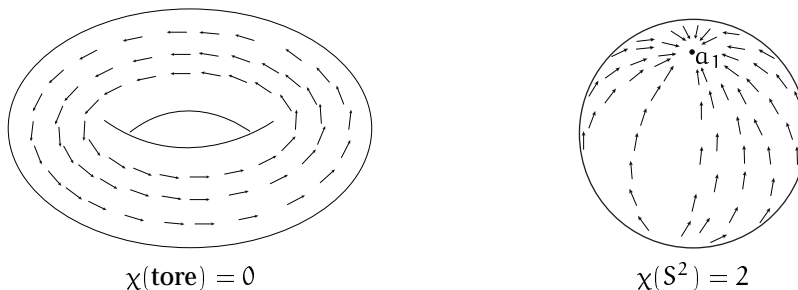


FIGURE 1

C'est en utilisant les techniques de Chern que Marie-Hélène Schwartz généralise alors la formule de Nevanlinna-Ahlfors. Elle obtient une formule du type suivant : si $f : V \rightarrow W$ est une application pour laquelle on a une stratification $(V_i)_{i \in I}$ telle que la restriction de f à chaque strate V_i soit une immersion, alors on a

$$\chi(W) = \text{« défaut de transcendance total »} + \text{« défaut algébrique »}$$

où le premier s'exprime par intégrale de la forme différentielle Π et le second s'exprime en fonction des degrés topologiques locaux de f , constants le long des strates

V_i . Ces travaux se concrétisent par sa thèse, en 1953. Elle est alors Assistante à l'Université de Paris puis nommée à Reims.

III. 1953-60

Théorème de Poincaré-Hopf et champs radiaux. — La troisième étape est encore marquée par les travaux de Chern. Celui-ci venait de publier deux articles où il définit les classes « de Chern » des variétés analytiques complexes. Il en donne différentes définitions dont on retiendra la théorie de l'obstruction.

Pour une variété singulière X , la notion de champ de vecteurs tangents n'est pas bien définie, puisque le fibré tangent n'est défini que sur la partie lisse. Le théorème de Poincaré-Hopf n'est alors plus valable, s'il est utilisé tel quel. Prenons l'exemple du tore pincé : on peut construire des champs de vecteurs tangents avec une singularité au point singulier a . Le tore pincé étant plongé dans \mathbb{R}^3 , on peut faire en sorte que, au moins au voisinage de a , le champ soit restriction au tore pincé d'un champ défini dans une boule centrée en a et ayant un point singulier isolé en a ; alors l'indice du champ en a est bien défini. Si l'on considère sur le tore pincé le champ induit par le champ précédent (figure 2.a), alors la formule de Poincaré-Hopf n'est pas vérifiée. En effet, $\chi(T) = +1$ et on a $\sum_i I(v, a_i) = I(v, a) = 0$. Par contre, si l'on considère le champ sortant de la boule, champ que l'on peut prolonger sur le tore pincé sans singularité (figure 2.b), alors on obtient

$$\chi(T) = +1 = \sum_i I(v, a_i) = I(v, a)$$

Cet exemple est le premier exemple de champ radial, notion introduite par Marie-Hélène Schwartz et qui va marquer la suite de ses travaux.

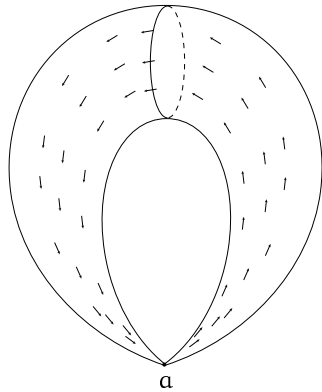


FIGURE 2.a : $I(v, a) = 0$

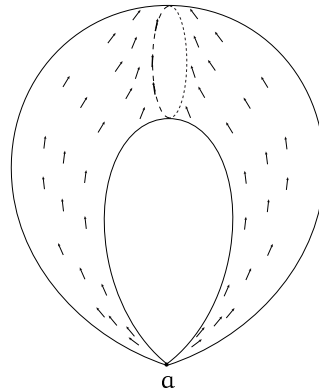


FIGURE 2.b : $I(v, a) = 1$

Avant de donner une idée de ce que sont les champs radiaux, il est important de se rappeler que Marie-Hélène Schwartz les a défini avant que H. Whitney n'introduise

la notion de « stratification de Whitney », ce qui permet de se faire une idée des difficultés qu'elle a du surmonter pour en donner la définition. Considérons donc une variété analytique complexe X munie d'une stratification de Whitney et plongée dans une variété lisse M , un champ de vecteurs stratifié défini sur une partie de M est un champ tangent en chaque point à la strate contenant ce point.

Le champ radial est un champ défini comme suit : le champ admet des singularités isolées en les strates de dimension 0, il est sortant de boules voisinages de ces points et il est d'indice $+1$ en ces points. Le champ est alors défini dans un voisinage du bord des strates de dimension (complexe) 1, on le prolonge à l'intérieur de ces strates avec des points singuliers isolés a_i d'indices $I(v, a_i)$. La méthode de prolongement radial, inventée par M.H. Schwartz consiste à étendre le champ v dans un tube, voisinage de la strate V_1 par parallélisme et à lui ajouter un champ « transversal » nul sur la strate, et dont la longueur augmente avec la distance à la strate. Le champ obtenu a cette jolie propriété d'avoir les mêmes points singuliers a_i dans le tube, voisinage de la strate V_1 , et d'avoir même indice en a_i , que ce soit comme champ tangent à M ou que ce soit comme champ tangent à V_1 , autrement dit :

$$I(v, a_i; V_1) = I(v, a_i; M)$$

Le champ obtenu sur le tube autour de la strate V_1 est un champ stratifié et il est « sortant » de ce tube. Il est donc défini sur un voisinage du bord des strates de dimension 2, on le prolonge à l'intérieur de ces strates avec des points singuliers isolés et on continue la procédure par strates de dimensions croissantes comme à l'étape précédente.

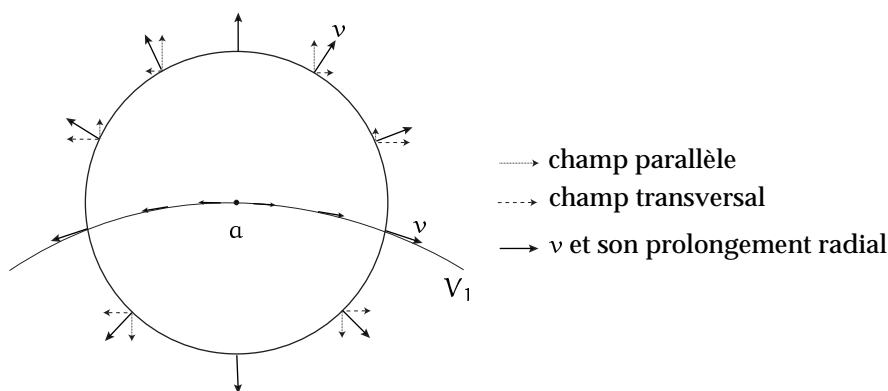


FIGURE 3

Les tubes sont des voisinages tubulaires des strates sur lesquelles on construit le champ par prolongement radial de façon à rester tangent aux strates.

Pour un tel champ, on a la formule de Poincaré-Hopf :

$$\chi(X) = \sum_i I(v, a_i)$$

La méthode utilisée par Marie-Hélène Schwartz exige des techniques très fines et minutieuses d'extensions, de recollements et de suivi des propriétés souhaitées (telles que l'obtention d'un champ stratifié). Nous avons déjà signalé que Marie-Hélène Schwartz avait d'abord écrit cette construction sans utiliser les conditions de stratification de Whitney, lesquelles ont certes simplifié son écriture.

IV. 1963...

Classes caractéristiques des variétés singulières. — La quatrième période voit la création des classes de Chern des variétés singulières. C'est B. Morin qui fait part à Marie-Hélène Schwartz de la prépublication de H. Whitney sur ses stratifications, ce qui lui donne l'idée d'étendre la définition de ses champs de vecteurs radiaux aux champs de r -repères. Il lui est naturel de penser à la définition des classes de Chern par obstruction et de vouloir définir de telles classes caractéristiques pour les variétés singulières, par obstruction à la construction de champs de r -repères. On sait que, dans une variété lisse M de dimension complexe n , l'obstruction à la construction d'un champ de r -repères se situe en dimension $2p = 2(n - r + 1)$. Cela veut dire qu'étant donnée une triangulation de M , on sait définir le champ sans singularité au dessus des simplexes de dimension $2p - 1$ et avec des singularités isolées au dessus des simplexes de dimension $2p$. Le champ étant défini sur le bord du simplexe, on peut l'étendre à l'intérieur, par exemple par une homothétie dont le centre est le barycentre du simplexe. Ce point sera donc un point singulier du champ de r -repères.

Dans le cas d'une variété singulière X plongée dans une variété lisse M , l'idée fondamentale de Marie-Hélène Schwartz est de travailler non pas avec une triangulation (K) compatible avec la stratification, ce qui ne fournit pas les bonnes dimensions d'obstruction, mais avec une décomposition cellulaire (D) duale de (K) . Les cellules sont alors transverses aux strates et l'intersection d'une cellule de dimension $2p$ avec une strate V_α est une cellule dont la dimension correspond justement à la dimension d'obstruction le long de la strate.

On définit alors les classes en construisant un champ de r -repères v_r radial dans un voisinage tubulaire de X , strate par strate comme cela a été fait pour les champs radiaux. Le champ de r -repères a des singularités a_i situées dans les cellules de dimension $2p$. L'indice $I(v_r, a_i)$ du r -repère en son point singulier a_i s'obtient par généralisation naturelle de la définition précédente. Marie-Hélène Schwartz obtient alors un cocycle obstruteur γ dont la valeur sur une cellule $(D)^{2p}$ est égale à $\sum_{a_i \in D^{2p}} I(v_r, a_i)$, d'où une classe de cohomologie dans

$H^{2p}(T, T \setminus X) = H^{2p}(M, M \setminus X)$. La définition de ces classes fait l'objet d'une pré-publication en 1964 à l'Université de Lille, où Marie-Hélène Schwartz vient d'être nommée Professeur, et de deux notes aux CRAS (22-29 Mars 1965).

En 1969, Deligne et Grothendieck conjecturent l'existence de classes caractéristiques pour les variétés algébriques complexes, mais en homologie $H_*(X)$. Ces classes sont définies pour toute fonction constructible α sur X et doivent vérifier un système d'axiomes, en particulier donner la classe de Chern classique si X est lisse et si α est la fonction caractéristique 1_X . En fait, si X est une variété analytique singulière de dimension complexe k , le morphisme de Poincaré $H^{2k-i}(X) \rightarrow H_i(X)$, cap-produit par la classe fondamentale, n'est plus un isomorphisme. Il est possible de montrer qu'il n'existe pas, en général, de classe de Chern en cohomologie (absolue) de X et la conjecture de Deligne et Grothendieck consiste à dire qu'il en existe en homologie.

Cette conjecture sera démontrée en 1974 par Robert MacPherson, par des méthodes de géométrie algébrique (en utilisant l'obstruction d'Euler locale et le transformé de Nash).

Connaissant ce résultat, Guelfand, de passage chez les Schwartz en 1976, propose à Marie-Hélène Schwartz de joindre MacPherson (alors à l'IHES) au téléphone, mais ne réussit pas. C'est quelques jours plus tard, qu'elle le rencontrera par hasard dans une petite boutique du Boulevard Saint Michel. La conversation s'engage dans la boutique exigüe et l'impression commune est bien que les deux constructions (de Marie-Hélène Schwartz et de Robert MacPherson) sont « la même chose ».

Ce résultat sera en fait démontré en 1979 par Marie-Hélène Schwartz et moi-même : les classes de MacPherson sont images des classes de Marie-Hélène Schwartz par l'isomorphisme d'Alexander

$$H^{2p}(M, M \setminus X) \rightarrow H_{2(r-1)}(X)$$

Ceci prouve donc que Marie-Hélène Schwartz avait démontré la conjecture de Deligne et Grothendieck quatre ans avant que celle-ci ne soit émise!!!

L'un des éléments de la construction des classes de MacPherson est l'obstruction d'Euler locale : Étant donnée une variété algébrique complexe, on définit le transformé de Nash \tilde{X} comme l'ensemble de toutes les limites d'espaces tangents en tous les points de X . Il est muni d'un fibré « tautologique » ξ (ensemble des vecteurs des espaces considérés). Si a est un point d'une strate V_j , singularité isolée du champ radial ν , notons b une boule dans M suffisamment petite pour que le champ soit sans autre singularité dans b (et donc sur le bord ∂b). La restriction de ν à ∂b se relève sur \tilde{X} en une section $\tilde{\nu}$ de ξ .

Avec Marie-Hélène Schwartz nous avons montré la propriété fondamentale suivante (théorème de proportionnalité) : L'obstruction à étendre le champ $\tilde{\nu}$ en une section de ξ au dessus de $\nu^{-1}(\partial b)$ est égale à

$$\text{Obs}(\nu^{-1}(b), \tilde{\nu}, \tilde{X}) = \text{Eu}_a(X) \cdot I(\nu, a)$$

Ces résultats, et surtout les théorèmes de proportionnalité, théorèmes clés de la théorie, ont été repris dans le livre sur les classes caractéristiques, que Marie-Hélène Schwartz a publié après l'exposé oral de cet article (voir à la fin).

Les applications et généralisations. — Je cite ici quelques applications des techniques et des résultats de Marie-Hélène Schwartz parmi les plus fameux :

La définition des champs radiaux de Marie-Hélène Schwartz a fait l'objet de plusieurs généralisations, par elle-même d'abord : la propriété de proportionnalité énoncée ci-dessus peut servir de définition même à ce qu'elle appelle les champs « préradiaux ». Ceux-ci semblent être la bonne généralité pour avoir un théorème de Poincaré-Hopf.

Dans le cas de stratifications abstraites, H. King et D. Trotman, puis S. Simon ont donné des généralisations de champs radiaux et d'indices de champs de vecteurs permettant d'obtenir des théorèmes de Poincaré-Hopf dans le cas de variétés singulières plus générales.

Les classes de Chern des variétés singulières ont fait l'objet de définitions équivalentes, par exemple en utilisant les variétés polaires (Lê et Teissier). La méthode de Marie-Hélène Schwartz m'a permis de définir des classes de Chern en théorie bivariante (Fulton-MacPherson), Claude Sabbah en a donné une autre définition et Jianyi Zhou a montré que nos deux définitions sont équivalentes.

D'autres généralisations de classes de Chern ont été données par plusieurs auteurs, dont S. Yokura, lequel montre que les classes se relèvent en homologie d'intersection dans le cas de singularités isolées. Le relèvement des classes de « Schwartz-MacPherson » en homologie d'intersection, dans le cas général fait l'objet d'un article de G. Barthel, K.H. Fieseler, O. Gabber et L. Kaup et moi-même.

L'obstruction d'Euler locale et la définition qu'en a donnée Marie-Hélène Schwartz intervient également dans l'étude de feuilletages singuliers, dans des travaux de plusieurs auteurs tels que X. Gomez-Mont, J. Seade, T. Suwa, A. Verjovsky...

En travaillant sur les champs radiaux et les classes caractéristiques, Marie-Hélène Schwartz a également fait une étude systématique des espaces linéaires (dans un premier temps elle les a appelés pseudo-fibrés). Ceux-ci sont une généralisation de l'espace réunion des espaces tangents aux strates, c'est-à-dire avec les notations antérieures $UT(V_\alpha) \subset TM$. La notion de transformé de Nash pour de tels espaces lui a permis de définir des classes de Mather et un caractère de Chern. Michał Kwiecinski a montré que ce caractère est relié à celui défini par Baum-Fulton-MacPherson.

Ajouté en 2001 :

Marie-Hélène Schwartz publie en 2000 le livre « Classes de Chern des ensembles analytiques » dans lequel elle reprend la construction de ses classes de façon systématique. Les théorèmes de proportionnalité, théorèmes clés de la théorie, y sont exposés en détails. Dans

son premier livre « *Champs radiaux sur une stratification analytique complexe* », Marie-Hélène Schwartz avait introduit son point de vue sur les stratifications de Whitney d'une variété analytique complexe, sur les triangulations compatibles avec une stratification donnée (résultat de S. Łojasiewicz) et sur les champs radiaux.

Dans son second livre, Marie-Hélène Schwartz expose en détail l'architecture de sa théorie et la relie à celle de MacPherson. Elle étend cette technique et ses résultats aux champs de repères (en particulier les importants théorèmes de proportionnalité). Ce livre fournit une confrontation explicite entre l'approche axiomatique et l'approche constructive des classes de Chern.

Bibliographie

Seuls sont cités les articles de Marie-Hélène Schwartz en rapport direct avec la conférence.

M.-H. Schwartz, *Exemple d'une fonction méromorphe ayant des valeurs déficientes non asymptotiques*, CRAS t.212 (1941), 382-384 .

———, *Formules apparentées à la formule de Gauss-Bonnet pour certaines applications d'une variété à n dimensions dans une autre*, Acta Math. 91 (1954) 189-244.

———, *Formules apparentées à la formule de Nevanlinna-Ahlfors pour certaines applications d'une variété à n dimensions dans une autre*, Bull. Soc. Math. France 82 (1954) 317-360.

———, *Classes caractéristiques définies par une stratification d'une variété analytique complexe*, CRAS t.260 (1965), 3262-3264 et 3535-3537.

———, *Champs radiaux et préradiaux associés à une stratification*, CRAS t.303 (1986) n° 6.

———, *Une généralisation du théorème de Hopf pour les champs sortants*, CRAS t.303 (1986) n° 7.

———, *Champs radiaux sur une stratification analytique*, Travaux en cours, 39 (1991), Hermann, Paris.

J.-P. Brasselet et M.-H. Schwartz, *Sur les classes de Chern d'un ensemble analytique complexe*, Astérisque 82-83, exposé 6.

et les deux livres :

M.-H.Schwartz, *Champs radiaux sur une stratification analytique*, Travaux en cours, 39 (1991), Hermann, Paris.

———, *Classes de Chern des ensembles analytiques*, Actualités Mathématiques, 2000, Herman, Paris.

Jean-Paul Brasselet

IML - CNRS, case 907, Luminy, 13288 Marseille Cedex 9.