Une équation de Schrödinger non linéaire stochastique

Anne de Bouard et Arnaud Debussche

L'équation de Schrödinger non linéaire est l'un des modèles de base pour décrire la propagation d'ondes non linéaires dans les milieux dispersifs. Elle intervient dans de nombreux domaines de la physique, tels que les ondes hydrodymamiques, l'optique non linéaire ou la physique des plasmas. Dans certaines circonstances, le caractère aléatoire du milieu doit être pris en compte, avec en général des échelles de temps caractéristiques négligeables devant les échelles de temps des phénomènes déterministes. Il est donc bien souvent naturel que la dépendance en temps des termes aléatoires intervenant dans l'équation soit de la forme “bruit blamc”, tandis que ces termes aléatoires peuvent être corrélés en espace, ou non. De plus, un tel terme aléatoire peut intervenir dans l'équation sous la forme d'un bruit additif (une force extérieure) ou d'un bruit multiplicatif (c'est le cas par exemple d'un potentiel aléatoire).

Dans une première partie de l'exposé, on étudie le caractère bien posé dans $L^2(\mathrm{R}^n)$ d'une équation de Schrödinger non linéaire avec un potentiel aléatoire. Lorsque ce potentiel ne dépend que de la variable temporelle, il peut facilement être éliminé par une transformation de jauge, et n'a pas d'effet sur la dynamique du système, dans le sens où le bruit n'affecte que la phase des solutions. Dans certaines situations cependant, le bruit dépend à la fois des variables spatiale et temporelle. Un tel modèle a par exemple été propose par Bang et. al. [1], pour modéliser la propagation d'une excitation dans certains agrégats moléculaires en présence de fluctuations thermiques. Dans ce cas, le potentiel peut être un bruit blanc en temps et l'équation s'écrit alors sous la forme

$$i\frac{dz}{dt} - (\triangle z + |z|^{2\sigma} z) = \dot{\eta} z,\ x \in \mathrm{R}^n,\ t \geq 0, \tag{1}$$

où z est une fonction à valeurs complexes de $t \in \mathrm{R}^+$ et de $x \in \mathrm{R}^n$ et où $\sigma = 1$. De plus, $\dot{\eta}$ est un processus gaussien à valeurs réelles dont la fonction de corrélation est donnée par

$$\mathrm{E}(\dot{\eta}(x,\ t)\dot{\eta}(y,\ s)) = c(x,\ y)\delta(t-s)\ .$$

Le cas particulier $c(x,\ y) = \delta(x-y)$ correspond au bruit blanc espace-temps, mais ce cas est particulièrement difficile à traiter mathématiquement, et on considère en réalité des fonctions de corrélation spatiale plus régulières.

Le produit apparaissant dams le membre de droite de (1) doit également être interprété correctement. Deux types de produits sont classiquement utilisés pour les processus stochastiques. Le produit d'Ito est probablement le plus courant en mathématiques car il permet 1'utilisation de puissants outils probabilistes. Le produit de Stratonovitch est souvent plus naturel en physique, et intervient par exemple dans les équations obtenues comme limites d'équations aléatoires avec des longueurs de corrélations finies. Ce dernier produit permet également l'utilisation des règles de calcul classiques de différentiation de fonctions composées. Une équation de Stratonovitch est toujours équivalente à une équation d'Ito dans laquelle on a ajouté un terme correctif. Le produit intervenant dans l'équation (1) est un produit de Stratonovitch, le seul qui permette la conservation de la norme L^2 (en espace) de la solution (cette conservation de la norme L^2 est motivée par des arguments physiques).

On donne maintenant une définition mathématique de η et de l'équation de Ito équivalente à (1). Soit $(\Omega,\ \mathcal{F},\ \mathbf{P})$ un espace probabilisé, muni d'une filtration $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$, et soit $(\beta_k)_{k\in \mathrm{N}}$ une suite de mouvements browniens indépendants associés à la filtration $(\mathcal{F}_t)_{\mathrm{t}\geq 0}$. Etant donnée une base hilbertienne $(e_k)_{k\in \mathrm{N}}$ de $L^2\left(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}\right)$ (l'espace des fonctions de L^2 à valeurs réelles), et étant donné un opérateur linéaire symétrique Φ sur $L^2\left(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}\right)$, le processus

$$W(t,\ x,\ \omega) = \sum_{k=0}^{\infty} \beta_k(t,\ \omega)\Phi e_k(x)\ ,\ t \geq 0,\ x \in \mathbf{R}^n,\ \omega \in \Omega$$

est un processus de Wiener sur $L^2\left(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}\right)$, d'opérateur de covariance $\Phi\Phi^*$ On pose alors

$$\dot{\eta} = \frac{dW}{dt},$$

et l'équation (1) est réécrite sous la forme

$$idz - \left(\Delta z + f\left(|z|^2\right) z\right) dt = z \circ dW \tag{2}$$

où 0 désigne le produit de Stratonovitch et $f(s) = s^\sigma$ L'équation Ito équivalente est alors donnée par

$$idz - (\triangle z + f(|z|^2)z)dt = zdW - \frac{1}{2} izF_\Phi dt. \tag{3}$$

La fonction F_Φ dams la correction d'Ito ne dépend que de Φ, et plus précisément,

$$F_\Phi(x) = \sum_{k=0}^{\infty}(\Phi e_k(x))^2,\ x \in \mathbf{R}^n,$$

cette quantité ne dépendant pas de la base $(e_k)_{k\in \mathrm{N}}$. Par exemple, si l'opérateur Φ est donné par un noyau $\mathcal{K}$ à valeurs réelles, alors

$$F_\Phi(x) = |\mathcal{K}(x,\ \cdot)|^2_{L^2(\mathbf{R}^n)}.$$

Pour obtenir l'existence et l'unicité d'une solution de (3), associée à la condition initiale $z(0) = z_0$, on utilise un argument de point fixe sur la formulation intégrale de l'équation. Le caractère multiplicatif du bruit considéré empêche de résoudre l'équation trajectoire par trajectoire et nécessite de se placer dans un espace du type $L^\rho(\Omega,\ \mathcal{E})$. Un argument de troncature est alors nécessaire à cause du fait que le terme non linéaire n'est pas lipschitzien. Si par exemple Φ est donné par un noyau $\mathcal{K}$ vérifiant

$$\mathcal{K} \in L^2\left(\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n; \mathbf{R}\right) \cap L^{2+\delta}\left(\mathbf{R}^n_x; L^2\left(\mathbf{R}^n_y; \mathbf{R}\right)\right),$$

l'argument de point fixe peut être mené à son terme, sous réserve que $\sigma < \min(\frac{2}{n}, \ \frac{1}{n-1})$.

On retrouve le fait que cette solution est solution de l'équation originale grâce à une estimation de la solution de l'équation tronquée dans l'espace $L^1(\Omega; L^\gamma(0, \ T; L^q(\mathbf{R}^n)))$, estimation dont la difficulté est due à la présence de l'intégrale stochastique.

Dans une seconde partie, on étudie l'explosion en temps fini des solutions d'une équation de Schrödinger non linéaire stochastique avec un bruit additif complexe, beaucoup plus corrélé spatialement que le précédent. Cette équation s'écrit

$$idz - (\Delta z + |z|^{2\sigma} z)dt = dW, \tag{4}$$

où comme précédemment, W est un processus de Wiener d'opérateur de covariance $\Phi\Phi^*$, mais qui cette fois est défini à l'aide d'une base hilbertienne de $L^2(\mathbf{R}^n)$ à valeurs complexes. Le résultat d'existence précédent est toujours valable pour l'équation (4), et si l'on suppose que l'opérateur Φ est plus régulier (par exemple que Φ est Hilbert-Schmidt de $L^2(\mathbf{R}^n)$ à valeurs dans l'espace de Sobolev $H^s(\mathbf{R}^n)$ avec $s = 1 + \frac{n\sigma}{2(\sigma+1)}$), et si $\sigma < \frac{2}{n-2}$, alors on peut montrer l'existence locale de solutions de cette équation, à valeurs presque sûrement dans $\mathcal{C}$ $([0,T]; H^1(\mathbf{R}^n))$, où T est un temps aléatoire. On montre alors que l'énergie E_1 des solutions croit au plus linéairement en temps et on généralise le calcul de viriel déterministe -c'est-à-dire le calcul de l'évolution en temps du moment d'inertie

$$\int_{\mathbf{R}^n} |x|^2 |z(t,x)|^2 dx$$

d'une solution en fonction de l'énergie $E_1(z(0))$. Ceci nous permet d'obtenir l'explosion en temps fini de certaines solutions, lorsque la puissance du terme non linéaire est surcritique, c'est-à-dire lorsque $\sigma > 2/n$, au sens suivant : si

$$\mathbf{E}(E_1(z(0))) < -C < 0,$$

pour une constante C qui ne dépend que du bruit (de l'opérateur de covariance Φ), alors il existe un temps $\tau*$ fini tel que

$$\mathbf{E}(\|z(t)\|_{H^1}^2) \to \infty, \text{ lorsque } t \to T^*$$

A l'aide d'un argument de contrôle déterministe et en utilisant l'irréductibilité du semi-groupe de transition associé à l'équation (4), on montre que ce résultat est en fait vrai *pour toute donnée initiale*, et que de plus T^* peut être choisi totalement arbitrairement : ainsi l'espérance de la norme H^1 des solutions n'est jamais finie bien que ces solutions existent trajectoriellement sur un intervalle de temps aléatoire, c'est-à-dire qu'à ω fixé, la solution $z(t, \ ., \ \omega)$ existe et appartient à $H^1(\mathbf{R}^n)$ sur $[0, \tau^*(\omega)[$.

Références

[1] *Bang, O., Chrístiansen, P. L., If, F. Rasmussen K. O.*, White Noise in the Two-dimensional Nonlinear Schrödinger Equation. Phys. Rev. E49 (1994) 4627-4636.

[2] *de Bouard A.*, *Debussche A.*, A stochastic nonlinear Schrödinger equation with multiplicative noise. Comm. Math. Phys. 205 (1999). 161-181

[3] *de Bouard A.*, *Debussche A.*, On the effect of a noise on the solutions of the focusing supercritical nonlinear Schrödinger equation. Probab. Theory Related Fields. 123, 1, (2002) 76-96.

Anne de Bouard
Laboratoire d'Analyse numerique et EDP
UMR de Mathématiques 8628 du CNRS
Bât. 425, Université Paris-Sud
91405 Orsay Cedex
France
anne.deBouard@math. u-psud.fr