

Sur l'invariant universel des 3-variétés de Le-Murakami-Ohtsuki

Catherine Gille

Les surfaces fermées orientées connexes sont classifiées par le genre. En dimension 3 en revanche, on n'a pas de classification complète et la conjecture de Poincaré tient toujours. Il est donc intéressant de construire des invariants des 3-variétés, problème qui peut être lié à la théorie des noeuds (et entrelacs), comme nous l'expliquons dans la première partie. Nous présentons ensuite un invariant récent des entrelacs -l'invariant de Kontsevich- ainsi qu'un invariant des 3-variétés qui en est issu -l'invariant de Le-Murakami-Ohtsuki-.

1. Construction d'invariants des 3-variétés via la théorie des noeuds

Définition : Un **entrelacs** orienté à l composantes dans la 3-sphère S^3 est une sous variété difféomorphe à l copies ordonnées du cercle S^1 , telle que chaque composante est munie d'une orientation. On le note $L = L_1 \cup \dots \cup L_l$. Un entrelacs à une seule composante s'appelle un noeud. On considère les entrelacs à isotopie près.

Comme $S^3 = \mathbb{R}^3 \cup \{\infty\}$, on peut toujours regarder un entrelacs de S^3 dans \mathbb{R}^3 et le représenter par un diagramme dans le plan (image par une projection régulière) en gardant en mémoire les croisements, de manière à ce que ce diagramme détermine l'entrelacs à isotopie près.

Exemple : Le diagramme  représente un entrelacs à 2 composantes.

Un **entrelacs avec framing** est un entrelacs orienté L tel que chaque composante est munie d'une section de la projection $\partial N(L_i) \rightarrow L_i$ (à isotopie près) où $\partial N(L_i)$ est le bord d'un voisinage tubulaire de L_i . Cela revient à considérer chaque composante comme un ruban $S^1 \times [0, 1]$ et non plus comme un cercle S^1 . Un entrelacs avec framing peut encore être représenté par un diagramme dans le plan : il suffit de penser à chaque courbe comme un ruban aplati.

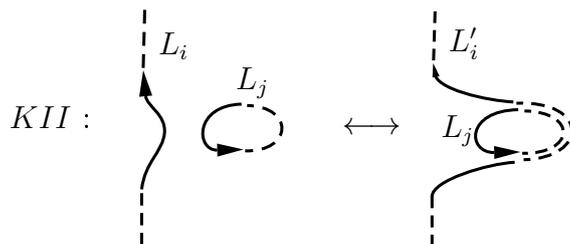
Exemple : Les diagrammes  et  représentent le noeud trivial mais avec des framing différents.

A partir de tout entrelacs avec framing de S^3 , on peut construire par chirurgie de Dehn une 3-variété fermée orientée connexe, notée $S^3(L)$. On a les deux résultats fondamentaux suivants :

Théorème (Lickorish 1962) *Pour toute 3-variété fermée orientée connexe M , il existe un entrelacs avec framing L tel que $M = S^3(L)$.*

Théorème (Kirby 1978) *$S^3(L)$ et $S^3(L')$ sont difféomorphes si et seulement si L et L' sont reliés, à orientation près, par une suite finie de mouvements élémentaires de types suivants, définis sur les diagrammes dans le plan :*

$$KI : L \longleftrightarrow L \amalg \left(\text{circle with framing } 1 \right), \quad KI : L \longleftrightarrow L \amalg \left(\text{circle with framing } -1 \right)$$



Conséquence des théorèmes de Lickorish et Kirby : Soit maintenant un invariant des entrelacs, c'est-à-dire une fonction I de l'ensemble des entrelacs dans un ensemble quelconque. Si I passe au quotient pour les mouvements de Kirby KI et KII et le changement d'orientation d'une composante, on obtient un invariant des 3-variétés.

2. L'invariant de Kontsevich des entrelacs

Dans [2], Le et Murakami ont construit un invariant $\hat{Z}(L)$ des entrelacs orientés avec framing L qui généralise l'intégrale de Kontsevich des noeuds et est universel pour les invariants de Vassiliev. L'existence de cet invariant est un théorème difficile mais nous voulons ici mettre l'accent sur le fait qu'il est calculable facilement à partir des diagrammes des entrelacs.

Définition : Si X est une variété (abstraite) de dimension 1 compacte orientée, un **diagramme univalent** de support X est la variété X munie d'un graphe univalent tel que les sommets univalents sont sur X et les sommets trivalents sont munis d'une orientation (c'est-à-dire un ordre cyclique des sommets adjacents). Les diagrammes univalents sont regardés à homéomorphisme près respectant les composantes de X , l'orientation de X et l'orientation des sommets trivalents du graphe. Le **degré** d'un diagramme univalent est la moitié du nombre de sommets de son graphe. Dans une représentation plane d'un diagramme univalent de support X , on représente les composantes de X par des lignes pleines et le graphe par des lignes pointillées. L'orientation des sommets trivalents est donnée par le sens trigonométrique.

Exemple :  est un diagramme univalent de support S^1 et de degré 3.

On note $\mathcal{A}(X)$ le \mathbb{Q} -espace vectoriel engendré par les diagrammes univalents de support X , quotienté par certaines relations non détaillées ici. Ces relations respectent le degré, ainsi $\mathcal{A}(X)$ est gradué. Si $X = \emptyset$, les diagrammes univalents sont simplement des graphes trivalents. $\mathcal{A}(\emptyset)$ est muni d'une structure d'algèbre commutative graduée, le produit étant donné par l'union disjointe.

Un q -**tangle** est un tangle orienté avec framing dont les extrémités sont des mots non-associatifs. Tout entrelacs peut se décomposer en produit de q -tangles élémentaires  et avec éventuellement des orientations différentes et où chaque composante peut être remplacée par plusieurs composantes parallèles.

On définit :

- $\hat{Z} \left(\begin{array}{c} \uparrow \\ \uparrow \\ \uparrow \end{array} \right) = \uparrow \in \mathcal{A} \left(\begin{array}{c} \uparrow \\ \uparrow \\ \uparrow \end{array} \right)$

- $\hat{Z}(\text{loop}) = \text{loop} + \frac{1}{48} \text{loop with dot} + \dots \in \mathcal{A}(\text{loop})$
- $\hat{Z}(\text{loop}) = \text{loop} + \frac{1}{48} \text{loop with dot} + \dots \in \mathcal{A}(\text{loop})$
- $\hat{Z}(\text{cross}) = \text{cross} + \frac{1}{2} \text{cross with dot} + \frac{1}{8} \text{cross with dot} + \dots \in \mathcal{A}(\text{cross})$
- $\hat{Z}(\text{cross}) = \text{cross} - \frac{1}{2} \text{cross with dot} + \frac{1}{8} \text{cross with dot} + \dots \in \mathcal{A}(\text{cross})$
- $\hat{Z}(\text{trivalent}) = \text{trivalent} + \frac{1}{24} (\text{trivalent with dot} - \text{trivalent with dot}) + \dots \in \mathcal{A}(\text{trivalent})$
- $\hat{Z}(\text{trivalent}) = \text{trivalent} - \frac{1}{24} (\text{trivalent with dot} - \text{trivalent with dot}) + \dots \in \mathcal{A}(\text{trivalent})$

On définit aussi ce qui se passe lorsqu'on change l'orientation d'une composante d'un q -tangle ou lorsqu'on double une composante (cf [2]). On peut alors calculer $\hat{Z}(L) \in \mathcal{A}(\amalg_{i=1, \dots, l} S^1)$ pour tout entrelacs L à l composantes.

Exemple : $\hat{Z}(\text{circle}) = \hat{Z}(\text{loop}) \circ \hat{Z}(\text{loop}) = (\text{loop} + \frac{1}{48} \text{loop with dot} + \dots) \circ (\text{loop} + \frac{1}{48} \text{loop with dot} + \dots) = \text{circle} + \frac{1}{24} \text{circle with dot} + \dots \in \mathcal{A}(\text{circle})$

3. L'invariant de Le-Murakami-Ohtsuki des 3-variétés

\hat{Z} n'est pas invariant par les mouvements de Kirby. Cependant, dans [4], Le, Murakami et Ohtsuki ont construit une fonction explicite qui composée avec \hat{Z} le devient, ce qui fournit ainsi un invariant des 3-variétés. L'invariant obtenu $\Omega(M)$ est un élément de $\mathcal{A}(\emptyset)$, l'algèbre graduée des graphes trivalents. On a le résultat suivant :

Théorème ([3]) *Pour toute 3-variété M , $\Omega(M) = 1 + \frac{(-1)^{b_1(M)}}{2} \lambda(M) \text{circle with dot} + O(2)$ où b_1 est le premier nombre de Betti, λ l'invariant de Casson-Walker-Lescop ([5]) et où $O(2)$ désigne des termes de degré ≥ 2 .*

Ainsi, on sait interpréter le terme de degré 1 de l'invariant Ω mais on ne sait rien sur le terme de degré 2. Pour avancer dans cette direction, l'idée est de le calculer pour les sphères d'homologie entières dont l'invariant de Casson est nul. Voici un résultat pour une famille de telles variétés.

Théorème ([1]) *Soit K un noeud de framing trivial et soit \tilde{K}_η , double non-twisté du noeud K ($\eta = \pm 1$). Alors : $\Omega(M_{\tilde{K}_\eta}) = 1 + \frac{-1}{4} a_2(K) \text{circle with dot} + O(3)$ où $a_2(K)$ est le coefficient de degré 2 du polynôme de Conway du noeud K .*

Références

[1] Gille C., Sur l'invariant de Le-Murakami-Ohtsuki en degré 2. Preprint.

- [2] *Le T. T. Q., Murakami J.*, The universal Vassiliev-Kontsevich invariant for framed oriented links. *Compos. Math.* **102** (1996), 41-64.
- [3] *Le T. T. Q., Murakami H., Murakami J., Ohtsuki T.*, A three manifold invariant via the Kontsevich integral. Preprint (1995).
- [4] *Le T. T. Q., Murakami J., Ohtsuki T.*, On a universal quantum invariant of 3-manifolds. *Topology* **37** (1998), 539-574.
- [5] *Lescop C.*, *Sur l'invariant de Casson-Walker : formule de chirurgie globale et généralisation aux variétés de dimension 3 fermées orientées.* *C. R. Acad. Sci. Paris Ser.I*, **315** (1992), 437-440.

Catherine Gille
Mathematisches Institut, Universität Bern
Sidlerstrasse 5, 3012 Bern, Suisse
gille@math-stat.unibe.ch