Chaînes algébriquement constructibles

Hélène Pennaneac'h

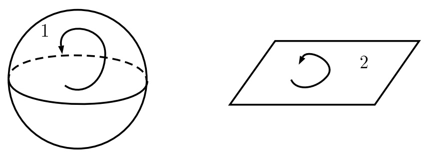
X sera une variété algébrique réelle (un sous-ensemble algébrique de $\mathbf{R}^p$, i.e de la forme $\{P = 0\}$ où P est un polynôme sur $\mathbf{R}^p$). Un *semi-algébrique* de X est l'intersection de X avec des sous-ensembles constitués d'intersections et de réunions finies d'ensembles de la forme $\{Q_i > 0\}$ et $\{R_j = 0\}$ où les Q_i et R_j sont des polynômes sur $\mathbf{R}^p$. Pour la géométrie semi-algébrique, voir [BCR].

Chaînes semi-algébriques de dimension n sur X

Ce sont des sommes formelles $\sum m_S[S]$ où $S \subset X$ est une variété lisse semi-algébrique orientée de dimension n ; ces symboles vérifient les relations :

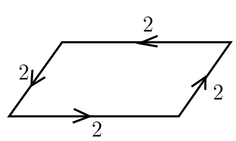
- $[S^a] = -[S]$ si S^a est S avec l'orientation opposée,
- $[S \sqcup S'] = [S] + [S']$,
- $[S] = [S']$ si S' est dense dans S avec l'orientation induite.

Cela signifie entre autre qu'on ne tient pas compte des sous-ensembles de dimension $< n$.
Exemple : une 2-chaine dans $\mathbf{R}^3$:



Ça signifie qu'on a la sphère S orientée comme indiqué avec le coefficient 1 et le rectangle R avec le coefficient 2, i.e la chaîne $[S] + 2[R]$.

On peut faire un bord : par exemple ici le bord de la chaîne $[S]$ est 0 et le bord de la chaîne $2[R]$ est la 1-chaîne :

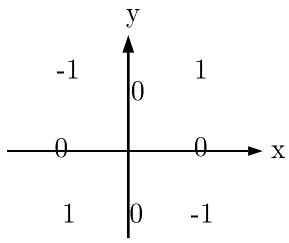


Ainsi on construit un complexe de chaîne et donc une homologie. L'homologie obtenue n'apporte rien de nouveau : c'est l'homologie de Borel-Moore de X (son homologie singulière si X est compact).

Chaînes algébriquement constructibles

D'abord : une fonction $f : X \to \mathbf{Z}$ est *constructible* s'il existe une partition finie de X en semi-algébriques telle que f est constante sur chacun des éléments de cette partition. Elle est algébriquement constructible si en plus c'est une somme finie de signes de polynômes sur X (voir [MP]).

Exemple dans $\mathbf{R}^2$: $f = \mathrm{sign}(xy)$:



Pour voir si une n-chaîne semi-algébrique donnée $\sum m_S[S]$ est algébriquement constructible, il faut regarder sur chaque composante irréductible W du *support* de la chaîne (i.e de la clôture de Zariski des S où m_S est non nul ; pour le premier exemple, c'est la sphère d'une part, et le plan contenant le rectangle d'autre part). Ensuite on prend une n-forme de Kähler ω sur le corps de fraction de W (disons, une n-forme différentielle sur la partie lisse de W, s'exprimant "algébriquement" en fonctions des coordonnées). A quelque chose de dimension $n-1$ près, ω donne une orientation à W. On suppose, quitte à changer et l'orientation de S, et le signe de m_S (ce qui me change rien à la chaîne par définition), que l'orientation donnée par ω coïncide avec l'orientation des S donnée au départ. On regarde maintenant la fonction $\sum m_S \mathbf{1}_S$. Si elle est algébriquement constructible à un sous-ensemble de dimension $n-1$ près, on dit que la chaîne elle-même est algébriquement constructible

Notre chaîne n'etait pas algébriquement constructible : sur la composante "sphère", ça va, mais sur la composante "plan", ça me marche pas (il n'y a pas de somme de signe de polynômes sur le plan qui donne 2 à l'extérieur du rectangle, et 0 à l'intérieur).

Les chaînes algébriquement constructible ont quelque chose de remarquable : leur bord est divisible par 2, et une fois divisé par 2, c'est une $n-1$-chaîne algébriquement constructible. Ainsi on peut construire un nouveau complexe, et donc une nouvelle homologie, qui donne des résultats différents de l'homologie de Borel-Moore.

En s'inspirant de cette construction, on peut construire encore d'autre groupes d'homologie, "k-algébriquement constructible", qui cette fois sont à coefficients dams $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$, et qui donne dans certains cas une filtration entre l'homologie de Borel-Moore à coefficients dans $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$ et l'homologie algébrique (pour la définition de cette dernière, voir [BCR].

Cycles lagrangiens semi-algébriques

Un deuxième intérêt des chaînes algébriquement constructibles est le suivant : dans l'isomorphisme entre les fonctions constructibles sur X et les cycles lagrangiens semi-algébriques (c'est un peu compliqué à détailler en 4 pages, voir [KS][chapitre 9 les fonctions algébriquement constructibles correspondent exactement aux cycles lagrangiens algébriquement constructibles.

Références

[BCR] J. Bochnak, M. Coste, M-F. Roy, *Géométrie algebrique réelle*, Ergebnisse der Math. 3.Folge Vo1.12 Springer (1987)

[kIP] C. McCrory, A. Parusiński, *Algebraically constructible functions*, Ann. Scient. de l'Ecole Norm. Sup. (4) **30** (1997) 527-552

[KS] M. Kashiwara, P. Schapira, *Sheaves on manifolds*, Springer-Verlag, Berlin (1990)

Hélène Pennaneac'h
IRMAR
Campus de Beaulieu
35042 Rennes Cedex
France
hpennane@maths.univ-rennes1.fr