

Des squelettes dans des images 2D et dans des surfaces discrètes

Jasmine Burquet

1 Introduction

La géométrie discrète, c'est-à-dire l'étude de propriétés géométriques et topologiques d'un ensemble discret, connaît de nombreuses applications en informatique notamment. Par exemple, en imagerie, une image 2D binaire est composée de pixels (pour **p**icture **e**lement), c'est-à-dire d'unités discrètes. De plus, l'utilisation de nombres entiers supprime les problèmes d'approximation des calculs en flottants et le temps nécessaire pour les effectuer est réduit. En pratique, on peut par exemple citer le projet de navigation dans le corps humain Visible Human (<http://visible-human.epfl.ch>) qui utilise une structure de stockage et des calculs discrets.

Nous allons nous intéresser plus particulièrement à la notion de *squelettisation*, introduite dans [1]. En reconnaissance et analyse de forme, plutôt que de travailler sur un ensemble discret X de grande taille, il est parfois plus pratique de s'intéresser seulement à un sous-ensemble de X qui a les mêmes propriétés topologiques et une forme similaire. On appellera ce sous-ensemble *squelette de X* .

2 Quelques notions de base

Dans la suite, on considère un ensemble X de \mathbb{Z}^2 que l'on identifie à un ensemble de *pixels* représenté par des carrés unitaires centrés sur leurs coordonnées entières. On note \overline{X} le complémentaire de X dans \mathbb{Z}^2 . On définit des adjacences sur les pixels : deux pixels sont dits *4-adjacents* s'ils partagent une arête et *8-adjacents* s'ils partagent une arête ou un sommet. On pose $n \in \{4,8\}$. On en déduit les notions de *n -voisinage* d'un pixel (Figure 2), noté $N_n(x)$ (l'ensemble des pixels qui lui sont n -adjacents), et de *n -chemins* (Figure 3, un 4-chemin en gris foncé et un 8-chemin en gris clair).

Soient $x, y \in X$. On dit que x et y sont n -connectés si il existe un n -chemin dans X joignant x à y . Cette relation est une relation d'équivalence sur les pixels de X dont les composantes n -connexes sont les classes d'équivalence.



FIG. 2 – Les voisinages d'un pixel noir

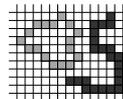


FIG. 3 – Deux chemins de pixels

Sur la Figure 4, l'ensemble gris est composé de deux composantes 8-connexes et de trois composantes 4-connexes.

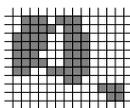


FIG. 4 – Composantes n -connexes

Un squelette S de X est un sous-ensemble de X qui en est représentatif. Par là on entend d'abord représentatif de la topologie de E : on doit conserver le nombre de composantes connexes de X et le nombre de "trous" dans X (les composantes connexes de \overline{X}). La méthode de squelettisation d'un ensemble repose sur la notion suivante :

Définition 1 : Soient $x \in X$. Le pixel x est dit **n -simple dans X** si sa suppression de X ne modifie pas la topologie de X .

Sur la Figure 5, les pixels p_1 et p_2 sont simples dans l'ensemble gris, ce qui n'est pas le cas de p_3 (suppression d'une composante connexe de \overline{X}), de p_4 (création d'une composante connexe de \overline{X}) et de p_5 (suppression d'une composante connexe de X).

Définition 2 : Soit $Y \subset X$. On dit que Y est **n -homotope à X** si et seulement si Y peut être obtenu à partir de X par une suppression *séquentielle* de pixels n -simples.

On peut visualiser sur la Figure 6 deux exemples d'ensembles homotopes ou pas.

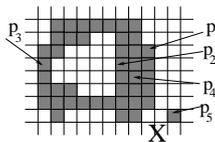


FIG. 5 – *Pixels simples?*



Homotopes Non homotopes

FIG. 6 – *Ensembles homotopes?*



FIG. 7 – *Un squelette décentré*



FIG. 8 – *De meilleurs résultats*

3 Des algorithmes plus ou moins efficaces

Afin de définir un algorithme efficace de squelettisation, il faut pouvoir caractériser *localement* la notion de pixel simple. Tout d'abord, un pixel est dit *n-intérieur* à X s'il n'a pas de n -voisin dans \overline{X} . Alors on a :

Proposition 1 : Soit $x \in X$. Alors x est n -simple dans X si et seulement si il n'est pas n -intérieur à X et si le nombre de composantes n -connexes de $X \cap N_8(x)$ qui sont n -adjacentes à x est égal à 1.

Cette caractérisation est locale puisqu'elle n'intervient que sur le voisinage d'un pixel. Nous pouvons alors définir des algorithmes de squelettisation. La première idée est de tester séquentiellement la simplicité des pixels et, le cas échéant, de les supprimer jusqu'à ce qu'il ne reste plus aucun pixel simple. Mais l'ordre de test des pixels influence sensiblement la forme des squelettes obtenus (Figure 7, où on applique un ordre lexicographique). Une première amélioration consiste alors à faire une liste du bord de l'ensemble, de supprimer les pixels simples de la liste, puis de recommencer avec le nouveau bord (Figure 8).

Mais la méthode dont les résultats sont les plus satisfaisants est directionnelle. On définit d'abord les pixels *Nord* (respectivement *Sud*, *Est*, *Ouest*) comme étant les pixels de X dont le 4-voisin au nord est dans \overline{X} . On considère alors successivement chaque direction $D \in \{ \text{Nord}, \text{Sud}, \text{Est}, \text{Ouest} \}$, on supprime séquentiellement les pixels D simples, puis on recommence jusqu'à ce

qu'il n'y ait plus de pixel supprimable (Figure 9).



FIG. 9 – Composantes n -connexes

Maintenant, on désire conserver la forme générale de X . Pour ce faire, afin de conserver les branches significatives de X , on impose à certains pixels d'être insupprimables : les pixels de X qui n'ont qu'un seul voisin dans X . On obtient alors des squelettes satisfaisants (Figures 10 et 11).

4 Surfaces discrètes et squelettes

Le calcul de squelettes dans les images binaires 2D est un processus maintenant bien connu. En 3D, il existe un analogue du pixel 2D que l'on appelle *voxel* (pour **v**olume **e**lement), représenté par un cube unitaire centré sur ses coordonnées dans \mathbb{Z}^3 . Ainsi, un objet 3D discret O est un ensemble fini de voxels, dont la surface est composée de petits carrés, les *surfels* (pour **s**urface **e**lement), qui sont les faces des voxels "en contact" avec le complémentaire de O dans \mathbb{Z}^3 . Des méthodes de squelettisation sur des ensembles inclus dans les surfaces des objets discrets 3D ont été définies (Figures 12). Une application de tel squelette est présentée dans [2].



FIG. 10 – Un squelette trop simple.



FIG. 11 – Un squelette correct.

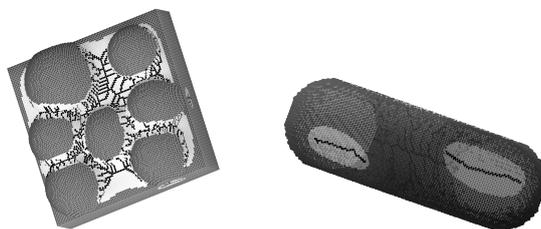


FIG. 12 – *Squelettes dans des surfaces discrètes.*

Références

- [1] *J. Blum*, A transformation for extracting new descriptors of shape. W. WATHEN-DUNN ed., Symposium models for the perception of speech and visual form (1967).
- [2] *J. Burguet, R. Malgouyres*, Strong Thinning and Polyhedric Approximation of the Surface of a Voxel Object. A paraître dans Discrete Applied Mathematics.

Jasmine Burguet
LLAIC1
IUT Département Informatique
BP 86
63172 Aubière CEDEX
France
burguet@llaic.u-clermont1.fr
<http://llaic3.u-clermont1.fr/> burguet