Amélioration de la forme de Horner
pour l'évaluation des polynômes univariés sur les intervalles

Martine Ceberio

1 Introduction

La puissance des ordinateurs rend possibles des calculs toujours plus lourds. Cependant, seul un nombre fini de valeurs reste représentable en machine. Aussi les quantités calculées résultent souvent d'arrondis qui peuvent conduire à des erreurs tragiques. Afin de prendre en compte ces arrondis, Ramon E. Moore [3] a introduit, à la fin des années 60, l'Arithmétique des Intervalles (AI). Celle-ci est définie sur des ensembles de nombres appelés intervalles, modélisant ainsi l'incertitude et gérant les erreurs d'arrondis.

Cependant, l'AI présente des points faibles, dont le problème de dépendance, lié à la décorrélation des variables durant l'évaluation. Cela se traduit par la surestimation de la quantité réelle recherchée, et par le fait que deux expressions équivalentes sur les réels ne le sont pas forcément sur les intervalles. Pour cette raison, nous nous intéressons à rechercher une expression dont l'évaluation s'approche le plus de la quantité réelle recherchée. En particulier, nous rappelons le schéma de factorisation de Horner et nous proposons ensuite une nouvelle forme qui améliore Horner de 27% en moyenne.

2 Notions préliminaires sur les intervalles

Définition 1 : Un **intervalle (réel fermé)** $\boldsymbol{x}$ est un ensemble défini par :

$$\boldsymbol{x} = [\underline{x},\overline{x}] = \{x \in \mathbb{R} \mid \underline{x} \leq x \leq \overline{x}\}, \text{ où } \underline{x} = \inf \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}, \overline{x} = \sup \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}$$

Afin de pouvoir représenter tous les intervalles fermés, les infinis $\{^{+}_{-}\infty\}$ sont adjoints à $\mathbb{R}$. Soit $\boldsymbol{x} \in \mathbb{IR}$, la largeur de $\boldsymbol{x}$ est $w(\boldsymbol{x}) = \overline{x} - \underline{x}$. Soit $\rho \subset \mathbb{R}$, le plus petit intervalle contenant ρ est donné par $\mathbf{Hull}(\rho) = [\inf \rho, \sup \rho]$.

Les opérations de l'AI sont des extensions aux ensembles des opérations correspondantes sur les réels. Soient les intervalles $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y} \in \mathbb{IR}$ et une opération $\Diamond \in \{+, - , \times , \div\}$, on a : $\boldsymbol{x} \Diamond \boldsymbol{y} = \mathbf{Hull}(\{x \Diamond y \mid (x,y) \in \boldsymbol{x} \times \boldsymbol{y}\})$. Par exemple, l'addition de $\boldsymbol{x} = [a,b]$ et $\boldsymbol{y} = [c,d]$ vaut $\boldsymbol{z} = \boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} = [a + c,b + d]$.

Les lois d'associativité et de commutativité sont préservées sur $\mathbb{IR}$, mais l'AI implique aussi des comportements indésirables. Par exemple, l'évaluation de $(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x})$ sur $\boldsymbol{x} = [-1,1]$ vaut $[-2,2]$, alors que $\forall x \in \mathbb{R}$, $(x - x) = 0$. La sous-distributivité remplace la distributivité et on a désormais pour tous $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z} \in \mathbb{IR}$, $\boldsymbol{x} \times (\boldsymbol{y} + \boldsymbol{z}) \subseteq \boldsymbol{x} \times \boldsymbol{y} + \boldsymbol{x} \times \boldsymbol{z}$. Par conséquent, sur les intervalles, les expressions factorisées fournissent des évaluations plus fines. Un des principaux objectifs de l'AI est donc de trouver des formes factorisées qui fournissent des évaluations fines sur les intervalles.

Cependant, en pratique, les réels sont remplacés par les nombres flottants. Soit $\mathbb{F}$ l'ensemble de ces nombres, les seuls représentés en machine [2]. Soit un réel a, a^+ (resp. a^-) est le plus petit (resp. grand) flottant supérieur (resp. inférieur) à a. L'ensemble $\mathbb{IF}$ des intervalles flottants est le sous-ensemble de $\mathbb{IR}$ des intervalles à bornes dans $\mathbb{F}$. La différence entre l'arithmétique sur $\mathbb{IF}$ et sur $\mathbb{IR}$ réside dans le fait que les calculs sur $\mathbb{IF}$ nécessitent d'être arrondis. On arrondit les bornes inf. $\underline{x}$ à $\underline{x}^-$, et les bornes sup. $\overline{x}$ à $\overline{x}^+$: on est ainsi assuré de toujours contenir la quantité réelle recherchée.

3 Le schéma de factorisation de Horner

La forme de Horner d'un polynôme $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_mx^m$ est définie par :

$$h_p(x) = (\ldots(a_mx + a_{m-1})x + \cdots)\,x + a_0$$

Le schéma de factorisation de Horner [1] fournit un algorithme efficace pour l'évaluation sur les intervalles. Il est en effet constitué d'une séquence de multiplications de polynômes dit intermédiaires

$$\left\{ \begin{array}{lcll} p_m(x) & = & a_m & \\ p_i(x) & = & xp_{i+1}(x) + a_i & \quad i = m-1,m-2,\ldots,0 \end{array} \right.$$

Soit O_p le plus petit intervalle contenant 0 et l'ensemble des zéros des polynômes intermédiaires. Lorsque h_p est évaluée en dehors de O_p, Stahl [4] a montré qu'aucune surestimation n'est observée par rapport à la variation exacte de p sur les réels. En effet, l'évaluation des multiplications par l'AI en dehors de O_p s'effectuant sur les bornes des intervalles et en dehors des zéros, les monotonies sont respectées. Cependant, lorsque h_p est évaluée sur un intervalle intersectant O_p, les monotonies n'étant plus nécessairement respectées, la forme de Horner entraîne des surestimations mal contrôlées. Pour cette raison, nous proposons un nouveau schéma de factorisation.

4 Un nouveau schéma de factorisation

Les problèmes de la forme de Horner sont dus à la décomposition aveugle des puissances. En effet, seule la décomposition de puissances paires en puissances paires permet sous certaines conditions l'évaluation sur des intervalles intersectant O_p sans surestimation. Or d'autres décompositions interviennent et impliquent une surestimation. En particulier l'introduction de puissances impaires entraîne systématiquement une surestimation. Nous proposons donc un nouveau schéma de factorisation qui interdit la décomposition en puissances impaires et limite leur nombre, tout en favorisant les puissances paires.

La forme factorisée que nous proposons est basée sur la reconnaissance d'identités remarquables, c'est-à-dire sur le schéma suivant :

$$ax^{\alpha} + bx^{\alpha+\beta} \rightsquigarrow bx^{\alpha-\beta}\left[\left(x^{\beta} + \frac{a}{2b}\right)^2 - \left(\frac{a}{2b}\right)^2\right]$$

où $\alpha > \beta \in \mathbb{N}$ sont de même parité. Ainsi, même si β est impair, la forme factorisée ne contient globalement que des puissances paires.

Notons de plus que ce schéma ne concerne que des couples de puissances. Or, dans une expression polynomiale quelconque, il existe donc un nombre combinatoire de possibilités d'application de ce schéma. De nombreuses stratégies sont donc possibles, parmi lesquelles :

- favoriser les schémas tels que α est impair et β minimum,
- favoriser les schémas tels que $\alpha = \beta$.

De plus chaque stratégie peut être combinée avec la forme de Horner afin d'éviter les puissances orphelines, et/ou de gérer les expressions polynomiales ne contenant aucun schéma remarquable.

Quatre stratégies sont retenues pour être testées. Pour déterminer quelle stratégie est la meilleure, des tests comparatifs sont effectués entre les différentes stratégies et la forme de Horner seule sur un échantillon de 500 expressions polynomiales générées aléatoirement. Chaque expression polynomiale est ainsi évaluée sur un intervalle contenant 0, c'est-à-dire intersectant nécessairement O_p. La stratégie qui s'avère être la plus efficace, notée $h \circ s_0$, est celle qui :

- favorise les schémas tels que α est impair et β minimum,
- et est composée avec Horner.

En moyenne, on note une amélioration de 27% par rapport à la largeur de l'évaluation des formes de Horner seules. D'autre part, des tests analogues sont réalisés avec des évaluations en dehors de O_p, et on constate que $h \circ s_0$ y est équivalente à Horner. Ce résultat est d'autant plus intéressant que de nombreuses techniques numériques utilisent les développements en séries de Taylor, qui sont pour l'essentiel des polynômes.

5 Conclusion

Les points faibles de Horner sont éliminés. Sous les conditions de Stahl, Horner comme notre méthode fournissent la variation exacte. En dehors de ces conditions, notre stratégie améliore Horner.

Tout d'abord, notre méthode se restreint aux polynômes. Or les expressions non-polynomiales peuvent être traitées par les développements de Taylor. On peut imaginer combiner les deux approches. Notre schéma pourrait ensuite être étendu aux fonctions trigonométriques. Enfin, un schéma est également nécessaire pour traiter les expressions multivariées.

Références

[1] *William G. Horner* Philosophical Transactions of the Royal Society of London **109** (1819), 308–33

[2] *IEEE*, IEEE Standard for Binary Floating-Point Arithmetic. Technical Report IEEE Std 754-1985(1985)

[3] *Ramon E. Moore*, Interval Analysis. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ(1966)

[4] *Volker Stahl*, Interval Methods for Bounding the Range of Polynomials and Solving Systems of Nonlinear Equations. PhD thesis, University of Linz, Austria (1995)

Martine Ceberio
Institut de Recherche en Informatique de Nantes (IRIN)
Faculté des Sciences de Nantes
2 rue de la Houssinière – BP 92208
44322 Nantes Cedex 3
France
`ceberio@irin.univ-nantes.fr`
http://www.sciences.univ-nantes.fr/info/permanents/ceberio