La maïeutique des destinées
ou comment accoucher de nouveaux problèmes ouverts

Annie Chateau

1 Introduction

Lorsqu'en 1900 Hilbert proposa sa liste de 23 problèmes ouverts, on peut presque dire qu'il faisait avancer la recherche en mathématiques davantage que s'il avait proposé 23 réponses à des problèmes déjà posés. En effet la pratique mathématique ne consiste pas seulement en la résolution de problèmes, vision simpliste suggérée hélas par la pratique scolaire, mais aussi en l'"art de poser les bonnes questions". Nous nous proposons de regarder l'aspect "génératrices de problèmes" des destinées de Francis Nézondet ([4]). Si le cadre choisi reste restreint aux problèmes formalisables en arithmétique, nul doute qu'une généralisation à toute une foule de domaines est possible.

Nous présentons dans un premier temps les destinées, puis quelques exemples de problèmes arithmétiques que leur étude a fait naître, et enfin nous nous interrogeons sur une possible classification des problèmes, induite par une façon de penser "en destinées".

2 Qu'est-ce que les destinées ?

On commence par se donner un langage relationnel fini, et un domaine. Par exemple, nous allons considérer la structure $\mathbb{N}$ (entiers naturels), munie de deux prédicats binaires $\perp$ et $<$, interprétés respectivement par "être premiers entre eux" et l'ordre strict usuel sur les entiers.

Une p-destinée est un arbre dont les branches sont toutes de hauteur p, et dont les nœuds sont des éléments de la structure. L'ensemble des p-destinées de cette structure représente un modèle particulier de l'ensemble des formules du langage choisi satisfaisant aux deux conditions suivantes : elles sont vraies dans le domaine, et elles ont une profondeur de quantification inférieure ou égale à p. La profondeur de quantification d'une formule est définie par induction sur la structure de la formule comme suit :

Définition 1 : **La profondeur de quantification d'une formule** F, notée $q(F)$, est définie par :

- si F est atomique, alors $q(F) = 0$;
- si $F = \neg G$, alors $q(F) = q(g)$;
- si $F = G \wedge H$ ou $F = G \vee H$, alors $q(F) = \max(q(G),q(H))$;
- si $F = QxG(x)$ où Q est un quantificateur $\forall$ ou $\exists$, alors $q(F) = q(G){+}1$.

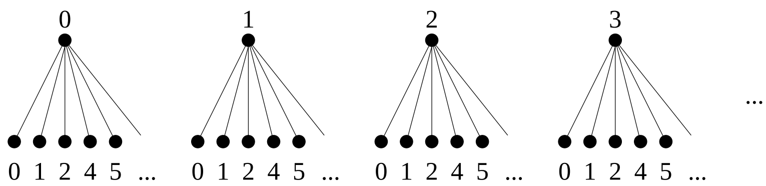
Pour construire les p-destinées d'une structure $\mathcal{X}$ sur le domaine X et le langage relationnel fini $\mathcal{L}$, on procède en trois étapes :

Première étape : Construction d'une forêt exhaustive

On considère la forêt d'arbres construits de la façon suivante :

- Tout élément de $\mathcal{X}$ est racine de l'un de ces arbres;
- Tout nœud soit est une feuille, soit a pour fils tous les éléments de $\mathcal{X}$;
- Toutes les branches sont de hauteur p.

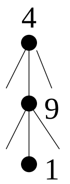
Exemple : Forêt exhaustive de hauteur 2 de la structure $\mathbb{N}$:



Deuxième étape : Constitution des listes de relations

A chaque nœud on associe la liste des relations qu'il vérifie avec ses ancêtres (lui y compris).

Exemple :



$4 \not\perp 4$

$9 \not\perp 9$, $9 \perp 4$, $9>4$

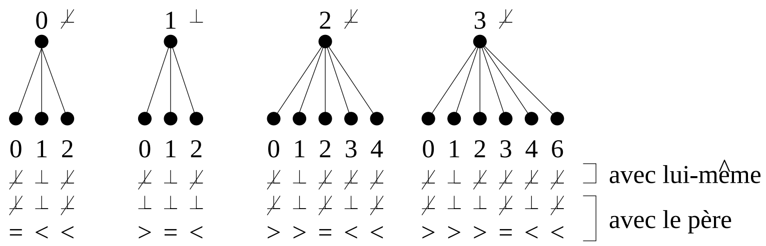
$1 \perp 1$, $1 \perp 9$, $1<9$
$1 \perp 4$, $1<4$

On obtient alors des **destinées exhaustives** portant comme information tous les cas possibles exprimables avec moins de p quantifications. Il reste un problème : l'information est présente à plusieurs reprises (et les arbres sont infinis).

Troisième étape : élimination des redondances

On réalise des simplifications en partant des feuilles : dans chaque sous-arbre de hauteur 2, on ne garde qu'une feuille de chaque classe d'isomorphisme entre les feuilles, puis dans chaque sous-arbre de hauteur 3, on ne garde qu'un représentant de chaque classe d'isomorphisme entre les sous-arbres de hauteur 2, etc. On obtient alors des **destinées essentielles**. Si on réalise enfin une simplification en ne gardant dans la forêt qu'une seule destinées par classe d'isomorphisme entre les destinées, on obtient une **p-transversale**.

Exemple : Une p-transversale de hauteur 2 de la structure $\langle \mathbb{N}, \perp, < \rangle$:



Une définition plus formelle des destinées peut être trouvée dans [1] ou [2]. Une p-transversale résume l'ensemble des formules de profondeur de quantification inférieure ou égale à p qui sont vraies dans la structure choisie. Construire la p-transversale revient donc à connaître cet ensemble. On peut de plus en déduire un algorithme de vérification pour les formules de profondeur de quantification inférieure ou égale à p (voir [2]).

3 Une usine à problèmes

3.1 L'exemple déclencheur

Les premières destinées qui ont été construites étaient aussi simples que l'exemple présenté ci-dessus avec $\langle \mathbb{N}, \perp, < \rangle$ et une profondeur 2. C'est en cherchant un exemple de destinées moins trivial que Marcel Guillaume, Denis Richard et Ji Lei Yin se sont attaqués à l'étude des 3-destinées de $\mathbb{N}$ muni du successeur et de la coprimarité. Cette étude, détaillée dans [3], commence par l'établissement de "schemas possibles de destinées", en étudiant les propriétés relatives de $\perp$ et S (par exemple un nombre est toujours premier avec son successeur), puis se prolonge par la recherche soit d'exemples satisfaisant à ces schemas, soit de preuves de leur inexistence. On aboutit ainsi à cinq problèmes ouverts correspondant à cinq destinées "possibles" mais dont on ne sait pas si elles existent (et par ailleurs à 51 destinées distinctes dont l'existence est avérée par la présence d'un exemple). Le plus simple de ces problèmes se formule ainsi : "Existe-t-il un entier impair n congru à 2 modulo

3, de la forme $2^a + 1$, dont le nombre de facteurs premiers est 3 ou plus et tel que l'ordre de l'un de ces facteurs modulo un autre est toujours impair ?".

3.2 Autres exemples

Dans certains cas, on sait construire automatiquement les p-transversales pour tout p (par exemple, c'est le cas de $\langle \mathbb{N}, < \rangle$ ou des structures H-bornées), mais dans le cas des "constructions à la main", on fait des rencontres intéressantes. Par exemple avec $\langle \mathbb{N}, P, + \rangle$ (où P est le prédicat "être premier"), on tombe sur une généralisation de la conjecture des premiers jumeaux dès la hauteur 3 : "Quelle est la condition sur n pour qu'il existe $k > n$ tel que k, $k + n$ et $k - n$ soient premiers ?". De même on tombe sur la conjecture de Golbach en construisant cette même 3-transversale. Si l'on arrive à construire cette 3-transversale, on résout du même coup toutes ces conjectures. Ce n'est évidemment pas une chose facile !

4 Vers une classification

Si l'on renverse le point de vue, on peut essayer d'estimer la difficulté d'un problème grâce à la hauteur de la p-transversale qu'il faudrait construire pour le résoudre. Cela revient à classifier les problèmes ouverts selon la profondeur de quantification minimale d'une formule les exprimant. C'est évidemment un peu réducteur, mais il n'est pas impossible de combiner cela avec des mesures intrinsèques aux destinées, par exemple le degré d'une transversale, défini comme étant la plus grande racine de la p-transversale construite en choisissant les plus petits représentants des classes d'isomorphisme. Par exemple, la 3-transversale de $\langle \mathbb{N}, S, \perp \rangle$ est de degré au moins $2^{227} - 1$, tandis que la 3-transversale de $\langle \mathbb{N}, < \rangle$ est de degré 3.

Références

[1] *Annie Chateau*, Les théories du successeur et de la coprimarité, Mémoire de DEA. Actes du LLAIC, vol. VII, (2000-2001).

[2] *Annie Chateau*, Décision des théories à nombre borné de variables sur les langages relationnels finis : un algorithme utilisant les destinées. Colloque Nationale de la Recherche en IUT, Publications de l'Université de Saint-Etienne, (2001).

[3] *Annie Chateau*, Five keys for a decision. preprint, disponible sur la page web `http://llaic3.u-clermont1.fr/~chateau/` .

[4] *Francis Nézondet*, p-destinées et applications à la théorie du successeur et de la coprimarité sur les entiers, Thèse de doctorat. Université d'Auvergne, (juin 1997),

Annie Chateau
LLAIC1
Département Informatique - IUT des Cézeaux
BP 86 - 63172 Aubière Cedex
France
`chateau@llaic3.u-clermont1.fr`
http://llaic3.u-clermont1.fr/~chateau/