Sur les singularités dans le champs complexe des solutions de certaines équations différentielles singulièrement perturbées.

Sadjia Chettab Aït-Mokhtar

Introduction: Dans cette note, nous nous interessons à la localisation, la nature et au mouvement des singularités des solutions d'une équation différentielle singulièrement perturbée dans le champs complexe du type :

$$\epsilon u' = f(x,u,a,\epsilon) \tag{1}$$

où f désigne une fonction analytique à valeurs dans $\mathbb{C}$ et définie sur un voisinage d'un point $(x_0,u_0,a_0,0)$ de $\mathbb{C}^4$, telle que $f(x_0,u_0,a_0,0) = 0$

Ce problème a été posé par J.L. CALLOT [1] dans une prépublication datant de 1992. En utilisant des outils de l'Analyse Non Standard,il a montré dans le cas d'une équation de RICCATI lente-rapide [1] , l'existence d'une solution maximale $u_a \sim x^{\frac{p}{2}}$ dans $]-\dfrac{3\pi}{p+2},\dfrac{3\pi}{p+2}[$ lorsque $|x| \to \infty$ et admettant des lignes de pôles infiniment proches des lignes de Stokes $\arg(x) = \pm\dfrac{3\pi}{p+2}$. De plus il a observé que pour certaines valeurs du paramètre complexe a, ces lignes se déplaçaient ou disparaissaient. Il conjecturait alors que ces valeurs du paramètre sont les singularités logarithmiques de la fonction multiforme dite *"indicatrice des pôles"* qui à toute valeur du paramètre a fait correspondre les affixes des pôles de la solution u_a. Notre travail apporte des éléments de réponse à cette question : Nous allons montrer en utilisant les résultats d'-analyse transasymptotique d'O. COSTIN [2], [3] que dans le cas d'une équation de WEBER la conjecture est vraie. L'idée principale est d'associer à toute solution de l'équation une unique solution transsérie, d'introduire dans la solution transsérie une nouvelle variable pour obtenir un développement à double échelle sous la forme: $\sum_{k=0}^{\infty} F_k(\xi)x^{-k}$. Une correspondance entre les singularités de F_0 et celles de la solution est alors établie.

Equation de WEBER : C'est l'équation linéaire du second ordre:

$$v'' = (t^2 - a)v \tag{2}$$

1. $\epsilon^{\frac{p}{2}} u' = x^p - u^2 + \epsilon$ polynôme en x et en ϵ à coefficients analytiques en a

où a est un paramètre complexe. L'équation de Riccati lente-rapide associée à cette équation est:

$$\epsilon u' = z^2 - \epsilon a - u^2 \tag{3}$$

Pour tout paramètre a, il existe une unique solution $u_a \sim -x$ dans $]\frac{-3\pi}{2},\frac{3\pi}{2}[$ lorsque $|x| \to \infty$. Mais pour a impair, ces solutions gardent le même comportement asymptotique pour tout $x \in V(\infty)$. On montre alors le résultat suivant :

Théorème : Les entiers impairs positifs sont des singularités logarithmique de la fonction *Indicatrice des pôles* associée à l'équation (3).

Solutions transséries et vraies solutions : Par des changements de variables, l'équation (3) se ramène à la forme :

$$y' \;=\; -y - \frac{a}{2x}y + y^2 + \frac{3-4a+a^2}{16x^2} \tag{4}$$

Lemme 1 : L'équation(4) admet une unique solution formelle $\tilde{y}_0 = \sum_{r=2}^{\infty} \tilde{y}_{0,r} x^{-r}$

Définition 1(et proposition) : Une solution formelle à un paramètre de (4) comme combinaison de séries de puissances et d'exponentielles est une série de la forme :

$$\tilde{y}(x,C) \;=\; \sum_{k\geq 0} C^k \, e^{-kx} x^{-k\frac{a}{2}} \, \tilde{s}_k(x) \tag{5}$$

où les $\tilde{s}_k$ sont des séries formelles :

$$\begin{cases} \tilde{s}_k \;=\; \sum_{r=0}^{\infty} \frac{\tilde{y}_{k,r}}{x^r} \\ \tilde{s}_0 \;=\; \tilde{y}_0 \end{cases} \tag{6}$$

Une telle solution existe et est unique pour tout paramètre C dés que la valeur de $\tilde{y}_{1,0}$ est fixée (par exemple égale à 1).

Définition 2: Etant donnée une direction $d \in \mathbb{C}$, on appelle transsérie sur d toute solution formelle à un paramètre (5) qui est telle que si $C \neq 0$ alors $\Re(x) > 0$ sur d.

Ainsi (5) est une *transsérie* sur toute direction d du secteur ouvert défini par:

$$S_{trans} \;=\; \{\, x \in \mathbb{C} \;:\; \text{si} \;\; C \neq 0 \;\; \text{alors} \;\; \Re(x) \;>\; 0 \,\}$$

Définition 3: On appelle lignes antistokes de (5), les deux directions de $\mathbb{C}$,

données par: $i\,\mathbb{R}_+ \quad et \quad -i\,\mathbb{R}_+$
Dans un contexte beaucoup plus général que (4), une sommation de Borel généralisée est définie dans [cost1]. Cet opérateur de sommation noté $\mathcal{LB}$ opère sur toute solution transsérie (5) de (4) dans toute direction d de S_{trans} et produit une vraie solution $y(x,C) = \mathcal{LB}\tilde{y}(x,C)$. Inversement, toute solution y de (**??**) asymptotique à $\tilde{y}_0$ dans une direction d est représentée par $\mathcal{LB}\tilde{y}$, sur d pour une unique $\tilde{y}$.
Développement à double échelle et formation des singularités Pour $\arg(x) > \frac{\pi}{2}$, la transsérie explose parceque e^{-x} devient grand. La divergence de la transsérie révèle un changement dans le comportement des solutions qui habituellemnet développent des singularités dans cette région.
Lorsque x est proche de $i\,\mathbb{R}_+$, la convergence de (5) dépend de la variable: $\xi(x) = Ce^{-x}x^{-\frac{a}{2}}$. Mais quand $|x| \to \infty$, tout terme de la forme $C^k e^{-kx} x^{-k\frac{a}{2}} \tilde{y}_{k,0}$ est plus grand que tous les termes de la forme $C^k e^{-kx} x^{-k\frac{a}{2}} \tilde{y}_{k,0} x^{-r}$.
Le terme dominant dans (5) est:

$$y(x) \sim \sum_{k\geq 0} (Ce^{-x}x^{-\frac{a}{2}})^k \tilde{y}_{k,0} = \sum_{k\geq 0} \xi^k(x)\tilde{y}_{k,0} \equiv F_0(\xi(x)) \tag{7}$$

De plus si on tient compte de tous les termes de $\tilde{s}_k$

$$y(x) \sim \sum_{k\geq 0} (Ce^{-x}x^{-\frac{a}{2}})^k \sum_{j=0}^{\infty} x^{-j}\tilde{y}_{k,j} \equiv \sum_{j\geq 0} x^{-j} F_j(\xi(x)) \tag{8}$$

qu'on appelle *développement à double échelle*
A la différence du développement asymptotique classique (donné par le Lemme 1) qui est valide dans tout secteur strict de $\Re(x) > 0$ [4], le développement (8) est valide dans un domaine qui s'étend dans une surface de Riemann appropriée, à des régions où les solutions développent des singularités. Les singularités dont il est question sont liées aux deux directions antistokes $i\,\mathbb{R}_+$ et $-i\,\mathbb{R}_+$, leur localisation dépend de la constante C.
On note par Ξ l'ensemble (fini) des points singuliers dans le ξ-plan de F_0, par $\mathcal{D}$ un ouvert, relativement compact et connexe du recouvrement universel de $\mathbb{C} \setminus \Xi$ et par $\mathcal{D}_x$ la classe d'équivalence (modulo des homotopies) dans $\{|x| > R, \arg(x) \in [-\dfrac{\pi}{2} + \delta, \dfrac{\pi}{2} + \delta]\} \setminus \xi^{-1}(\Xi)$ des chemins qui préservent une certaine régularité. Nous avons alors :
Théorème : Supposons que F_0 admet une singularité isolée $\xi_s \in \Xi$, et que la projection de $\mathcal{D}$ à $\mathbb{C}$ contient un voisinage épointé de ξ_s

Alors, si $C \neq 0$, $y(x)$ est singulière à une distance au plus $o(1)$ de $x_n \in \xi^{-1}(\xi_s) \cap \mathcal{D}_x$, lorsque $x_n \to \infty$
Les x_n sont donnés par:

$$x_n \;=\; 2n\pi\imath - \beta \ln(2n\pi\imath) + \ln(C) - \ln(\xi_s) + o(1) \tag{9}$$

En revenant à la variable initiale, on montre que : 1) la constante C correspondant aux pôles de la solution u_a est à un facteur prés, la constante de *Stokes* associée à l'équation de WEBER, 2) cette constante de *Stokes* est une fonction analytiques de a, 3) les entiers impairs positifs sont les zéros de cette fonction.

Références

[1] *Jean Louis CALLOT*, Sur la piste des canards imaginaires. A. Fruchard et A. Troesch éditions, prépublication IRMA, Strasbourg, pp.191-204, 1995

[2] *Ovidiu Costin*, On Borel summation and Stokes phenomena for rank one nonlinear systems of ODE's. Duke Math. J. 93, 2 (1998), 289-344.

[3] *Ovidiu Costin*, On the formation of singularities of solutions of nonlinear differential systems in antistokes directions. Invent.math (2001)

[4] *Wolfgang Wasow*, Asymptotic expansions for ordinary differential equations. Interscience Publishers, New York, (1968).

Sadjia Chettab Aït-Mokhtar
Laboratoire de Mathematique Calcul Asymptotique
Pôle Science et Technologie
Avenue Michel Crépeau
17042 La Rochelle Cedex 1
France
schettab@univ-lr.fr
http://www.univ-lr.fr