Algorithmes de résolution d'équations différentielles linéaires dans une extension exponentielle

Anne Fredet

Introduction

Au XVII^e siècle, on s'intéressait déjà à l'intégration sous forme finie et aux équations différentielles d'ordre un. Ces problèmes apparaissent dans différents phénomènes physiques, notamment en mécanique. Les travaux de Liouville (1809–1882) servent généralement de point de repère à l'étude d'équations différentielles linéaires de forme générale $L(y) = a_n y^{(n)} + \cdots + a_0 y = b$. Une première étape dans la recherche de ces solutions sous forme close est de considérer les solutions *rationnelles*:

Définition 1 Soient $(k,')$ un corps différentiel et $L(y) = a_n y^{(n)} + \ldots + a_1 y' + a_0 y$ une équation différentielle à coefficients dans k. Une *solution rationnelle* de L est un élément y dans k tel que $L(y) = 0$.

Plusieurs années séparent les résultats théoriques et les résultats algorithmiques. Par exemple, le premier algorithme complet d'intégration sous forme finie a été proposé par Risch en 1960 alors que les résultats théoriques dataient du milieu du XIX^e siècle. De plus, la plupart des algorithmes développés pour calculer les solutions rationnelles traitent des équations différentielles linéaires à coefficients dans $C(x)$ où C désigne un corps des constantes et x est tel que $x' = 1$. Dans cet exposé, on va s'intéresser aux équations différentielles linéaires à coefficients dans des extensions exponentielles et s'intéresser aux récents algorithmes développés pour ce cas. coefficients dans une On verra d'abord la méthode présentée dans [Singer, 1991]. Les améliorations proposées ensuite mettent en évidence l'importance du système de générateurs choisi pour définir l'extension.

Algorithmique

Soient (K,D) un corps différentiel et θ exponentiel sur K (i.e. θ transcendant sur K, $\frac{D\theta}{\theta} \in K$ et on n'étend pas le corps des constantes). Soit $L = D^n + a_{n-1}D^{n-1} + \cdots + a_0$ un opérateur différentiel linéaire unitaire à coefficients dans $K(\theta)$.

Première méthode :
Dans [Singer, 1991], un algorithme de recherche de solutions rationnelles d'équation différentielle linéaire à coefficients dans une extension exponentielle est proposé, qui se décompose en trois étapes :

- *étape 1 : Calculer le dénominateur*
  L'utilisation de développements p-adiques permet de prouver que les polynômes apparaissant aux dénominateurs de solutions rationnelles sont facteurs des dénominateurs des coefficients a_i, et une équation indicielle nous permet de borner l'ordre de ces polynômes. Un changement de variable nous réduit à chercher des solutions polynomiales au sens de Laurent.
- *étape 2 : Borner le degré et la valuation*
  On considère une solution de la forme $Y = y_\gamma\theta^\gamma + \cdots + y_\delta\theta^\delta$ avec les y_i dans K tels que $y_\gamma \neq 0 \neq y_\delta$ où γ et δ sont dans $\mathbb{Z}$, $\gamma \geq \delta$. On cherche une borne supérieure sur γ et inférieure sur δ. On écrit L comme un polynôme en θ : $L = \sum_{i=\mu}^{\nu} \theta^i L_i$ avec les L_i dans $K[D]$ tels que $L_\mu \neq 0 \neq L_\nu$ où μ et ν sont dans $\mathbb{Z}$, $\nu \geq \mu$. On montre que $L(Y) = 0$ implique que $L_\nu(y_\gamma\theta^\gamma) = 0$ et $L_\mu(y_\delta\theta^\delta) = 0$. On cherche alors les solutions *exponentielles* de L_ν et de L_μ (i.e. les solutions de la forme $e^{\int u}$ pour un u dans K). Puis on regarde quelles solutions sont de la forme $f\theta^\alpha$ pour un certain f dans K et α dans $\mathbb{Z}$. Il faut décider si l'équation $y^{'} + uy = 0$ a une solution dans $K(\theta)$. On utilise pour cela des résultats d'intégration (voir [Risch]). Les possibilités pour α nous donneront les bornes cherchées.
- *étape 3 : Calculer les coefficients*
  On écrit la solution sous la forme $y_\gamma\theta^\gamma + \cdots + y_\delta\theta^\delta$ et on l'injecte dans l'équation. On obtient un système différentiel linéaire à coefficients dans K. On utilise l'algèbre linéaire non-commutative (voir [Poo60]) pour diagonaliser ce système, et on calcule ensuite les coefficients.

Améliorations :
Dans [Bronstein, 1992], un autre algorithme permet de calculer la partie *normale* du dénominateur (étape 1), évitant la factorisation des coefficients. Dans [BF99] nous présentons des améliorations des étapes 2 et 3 pour des extensions de la forme $C(x, \exp(\int g(x)dx))$. Je généralise ces améliorations à une classe plus large d'extensions exponentielles dans [Fre01]. Voici ces améliorations esquissées dans le cas d'extensions exponentielles de $C(x)$.
À l'étape 3, on remarque que le système obtenu à une forme particulière :

Si $L(Y) = 0$ alors $M\overrightarrow{Y} = 0$ où $M = \begin{pmatrix} * & 0 & \cdots \\ \vdots & \ddots & \\ * & \cdots & * \\ & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & * \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{Y} = \begin{pmatrix} y_\delta \\ y_{\delta+1} \\ \vdots \\ y_{\gamma-1} \\ y_\gamma \end{pmatrix}$. On utilise un analogue de l'équation aux récurrences permettant de calculer les coefficients de solutions polynomiales d'équations différentielles linéaires à coefficients dans $C(x)$ (voir [ABP95]). Dans le cas des extensions exponentielles, cette relation est différentielle puisque le corps de base n'est plus un corps de constantes, et on a alors des problèmes d'existence de solutions.

À l'étape 2, on évite le calcul des solutions exponentielles de L_μ et L_ν qui ne sont pas de la forme souhaitée. On essaie de calculer directement les solutions sous cette forme (et donc de trouver directement les exposants possibles) afin d'éviter l'utilisation de résultats d'intégration difficile à mettre en place. On utilise pour cela des outils asymptotiques. Cela amène à introduire deux définitions :

Définition 2 Une extension $C(x,\theta_1,\cdots,\theta_l)$ est *une extension exponentielle plate de* $C(x)$ si pour tous c_i dans $\mathbb{Q}$, $\prod \theta_i^{c_i}$ est exponentiel sur $C(x)$

Définition 3 Une extension exponentielle plate $C(x,\theta_1,\cdots,\theta_l)$ est *bien définie* si, pour tout sous-ensemble $\mathcal{N} \subset \{1,\cdots,l\}$,

- soit en notant $\frac{\theta_i'}{\theta_i} = u_i x^{\alpha_i} + \cdots$ on constate que les u_j sont $\mathbb{Q}$-linéairement indépendants pour les $j \in \mathcal{N}$ tels que $\alpha_j = \max_{k\in\mathcal{N}}(\alpha_k)$,
- soit en notant $\frac{\theta_i'}{\theta_i} = \frac{u_i}{p^{\alpha_i}} + \cdots$ et $\alpha = \max_{k\in\mathcal{N}}(\alpha_k)$ on constate que $\alpha > 1$ et les u_j sont $\mathbb{Q}$-linéairement indépendants pour les $j \in \mathcal{N}$ tels que $\alpha_j = \alpha$, ou bien que $\alpha = 1$ et les u_j et p' sont $\mathbb{Q}$-linéairement indépendants pour les $j \in \mathcal{N}$ tels que $\alpha_j = 1$.

J'ai proposé un algorithme qui, étant donnée une extension plate, calcule un système de générateurs tel que l'extension soit bien définie (éventuellement à extension algébrique près). Lorsque l'on s'intéresse aux solutions rationnelles d'équations différentielles linéaires à coefficients dans une extension exponentielle bien définie, on se ramène à considérer des équations à coefficients dans $C(x)$, et à chercher des solutions $f\theta_1^{\gamma_1}\cdots\theta_l^{\gamma_l}$ pour f dans $C(x)$ et γ_i dans $\mathbb{Z}$. En utilisant des développements à l'infini ou p-adiques pour un polynôme p bien choisi, on peut calculer directement un ensemble fini de possibilités pour $(\gamma_1,\cdots,\gamma_l)$, sans utiliser de résultats d'intégration difficile à implanter.

Conclusion

On voit ainsi que si deux extensions sont isomorphes, et donc théoriquement semblables, le choix du système de générateurs influe sur l'efficacité de l'algorithme utilisé pour calculer les solutions rationnelles d'équations différentielles linéaires. Cette approche se généralise à certaines extensions exponentielles d'extensions monomiales.

Références

[ABP95] *S. Abramov, M. Bronstein, and M. Petkovšek* On polynomial solutions of linear operator equations. ISSAC'95. ACM Press

[Bronstein] *Manuel Bronstein*
On solutions of linear ordinary differential equations in their coefficient field. Journal of Symbolic Computation,13(4):413–440 - 1992

[BF99] *Manuel Bronstein and Anne Fredet* Solving linear ordinary differential equations over $C(x,e^{\int f(x)dx})$. ISSAC'99. ACM Press.

[Fre01] *Anne Fredet* Résolution sous forme finie d'équations différentielles linéaires et extensions exponentielles Thèse, Laboratoire Gage - École polytechnique, 2001.

[Poo60] *E.G.C Poole* Introduction to the Theory of Linear Differential Equations. Dover Publications Inc., 1960.

[Risch] *R.H. Risch*
The Problem of Integration in Finite Terms. Trans A.M.S. 1969
The Solution of the Problem of Integration in Finite Terms. Bulletin A.M.S. 1970

[Singer] *Michael F. Singer* Liouvillian solutions of linear differential equations with liouvillian coefficients. Journal of Symbolic Computation, 11:251–273. 1991

Anne Fredet
Laboratoire Gage - École polytechnique
91 128 Palaiseau cedex - France
`fredet@gage.polytechnique.fr`
http://www.gage.polytechnique.fr/ fredet