Sur les critères et les formules de résultant
pour l'inversion des applications polynômiales

Sihem Hachaïchi-Mesnager

K désigne un corps quelconque, X_1,X_2, Y_1,Y_2 désignent des indéterminées sur K. On note $X = (X_1,X_2)$ et $Y = (Y_1,Y_2)$, $K[X]$ l'anneau des polynômes en X sur K et $K(X)$ le corps des fractions de $K[X]$. Si f, $g \in K[X_1,X_2,Y_1,Y_2]$ et $i \in \{1,2\}$, $j = \{1,2\} \setminus \{i\}$, $\mathrm{Res}_{X_i}(f,g)$ désignera le résultant de f et g par rapport à X_i en tant que polynômes à indéterminée X_i et à coefficients dans $K[X_j,Y_1,Y_2]$. Enfin $\mathrm{Cd}_{X_i}(f)$ et $\deg_{X_i}(f)$ désignent respectivement le coefficient dominant et le degré de f par rapport à X_i. On considère $F = (F_1,F_2) : K^2 \to K^2$ une application polynomiale donnée par ses fonctions coordonnées $F_i \in K[X]$ $(i = 1, 2)$.

Si on s'intéresse aux problèmes d'inversion d'une telle application F en termes de résultants, il est naturel de considérer les questions (1) et (2) suivantes :

(1) Comment peut-on reconnaître par un calcul de résultant si F est inversible d'inverse polynomial, c.a.d $\exists\, G = (G_1,G_2) \in (K[X_1,X_2])^2$ tel que $F \circ G(X) = G \circ F(X) = X$? et dans ce cas, comment obtient-on son inverse G en termes de résultant ?

(2) Comment peut-on reconnaître par un calcul de résultant si F est inversible d'inverse rationnel (ou encore birationnelle), c.a.d $\exists\, G = (G_1,G_2) \in (K((X_1,X_2))^2$ tel que $F \circ G(X) = G \circ F(X) = X$? et dans ce cas, comment obtient-on son inverse G en termes de résultant ?

Ces problèmes d'inversion ont attiré l'attention de plusieurs auteurs, et la première approche du problème (1) est due à McKay et Wang [3], mais leur résultat ne répond que partiellement aux questions (1). En effet, il fournissent seulement une formule explicite de l'inverse de F en fonction de certains coefficients c, d et J, dans le cas particulier où F est supposée inversible et sans termes constants. D'autre part, Adjamagbo et van den Essen [1] ont apporté une réponse complète au problème (1). En effet, ils fournissent non seulement un critère nécessaire et suffisant d'inversibilité de F reposant sur l'existence de coefficients λ_1 et λ_2 dans $K^\star$, mais aussi une expression explicite de l'inverse de F, lorsque F est inversible.

Compte tenu de "l'état de la question" du problème (1), notre premier objectif est d'établir le lien entre les coefficients c,d, J dans le théorème

McKay et Wang et les coefficients λ_1, λ_2 dans le théorème d'Adjamagbo et van den Essen. C'est l'objet du théorème ci-dessous.

Théorème Les coefficients λ_1 et λ_2 du théorème d'Adjamagbo et van den Essen sont telles que :

$$\lambda_1 = (-1)^m Jc \quad \text{et} \quad \lambda_2 = (-1)^{k+1} Jd.$$

avec :

$$\begin{aligned}
m &= \deg_{X_2} F_1(0,X_2), \quad k = \deg_{X_1} F_1(X_1,0), \quad J = \left.\frac{\partial(F_1,F_2)}{\partial(X_1,X_2)}\right|_{X_1=0,X_2=0} \\
c &= \mathrm{Res}_{X_2}\left(\frac{F_1(0,X_2)-F_1(0,0)}{X_2},\frac{F_2(0,X_2)-F_2(0,0)}{X_2}\right), \\
d &= \mathrm{Res}_{X_1}\left(\frac{F_1(X_1,0)-F_1(0,0)}{X_1},\frac{F_2(X_1,0)-F_2(0,0)}{X_1}\right).
\end{aligned}$$

L'intérêt principal de ce dernier résultat, est d'être à la fois un raffinement du théorème d'Adjamagbo et van den Essen et d'avoir comme corollaire le théorème de McKay et Wang. Cet intérêt est renforcé par le fait qu'on prouve que dans la cas où F est linéaire, le critère résultant de ce théorème est équivalent au critère classique de déterminant pour l'inversion des applications linéaires, et que les formules d'inversions du théorème en question sont identiques aux formules classiques de Cramer.

Quant au problème (2) et en supposant que les coefficients de F sont " en position générique " (c'est-à-dire $\forall(i,j) \in \{1,2\}^2, F_i \notin K[X_j]$ et $\forall i \in \{1,2\}$ et $j \in \{1,2\}\setminus\{i\}$, $\mathrm{Cd}_{X_j}F_1(X_1,X_2)$ et $\mathrm{Cd}_{X_j}F_2(X_1,X_2)$ sont premiers entre eux), Abhyankar énonce une réponse complète à ce problème en termes presque identiques à ceux d'Adjamagbo et van den Essen. Son critère d'inversibilité repose sur l'existence de coefficients λ_1,λ_2 éléments de K^* et non de $K[X_1]\setminus\{0\}$ et $K[X_2]\setminus\{0\}$ respectivement, comme on peut s'y attendre à priori. Malheureusement, Abhyankar ne donne pas une démonstration explicite de ce théorème. Sans doute induit en erreur par ce manque de démonstration, Yu dans [4] cite le résultat d'Abhyankar en omettant l'hypothèse cruciale de "position générique"; il énonce ensuite une généralisation à un nombre quelconque d'indéterminées suivie d'une démonstration qui est erronée même dans le cas de deux indéterminées, comme le montre le contre exemple que nous indiquons dans la suite.

La réponse complète suivante au problème (2) a été apportée par Adjamagbo et Boury [2], où ils supposent plus généralement que F est un couple de fractions rationnelles à deux indéterminées:

Théorème (Adjamagbo et Boury) Soient $F = (F_1,F_2) \in (K(X_1,X_2))^2$ et $(P_1,Q_1,P_2,Q_2) \in (K[X_1,X_2])^4$ tels que $Q_1Q_2 \neq 0$, $F_1 = \frac{P_1}{Q_1}$, $F_2 = \frac{P_2}{Q_2}$, P_1 et Q_1 sont premiers entre eux, P_2 et Q_2 sont premiers entre eux. Alors les deux propositions suivantes (i) et (ii) sont équivalentes:

(i) F est birationnelle.

(ii) $\exists (R_1,S_1), (R_2,S_2) \in (K[Y_1,Y_2]\backslash K)^2$ avec R_1 et S_1 premiers entre eux, R_2 et S_2 premiers entre eux, $\exists \lambda_1 \in K[X_1] \setminus \{0\}, \lambda_2 \in K[X_2] \setminus \{0\}$ vérifiant (a) et (b):

- **(a)** $\forall i \in \{1,2\}$, $F \notin (K(X_i))^2$.
- **(b)** $\forall i \in \{1,2\}$, $j \in \{1,2\}\backslash\{i\}$, $\mathrm{Res}_{X_j}(P_1 - Y_1Q_1, P_2 - Y_2Q_2) = \lambda_i(S_iX_i - R_i)$.

De plus, si F est inversible d'inverse rationnel noté $G = (G_1,G_2)$, alors on a:

$$G_1(Y_1,Y_2) = \frac{R_1(Y_1,Y_2)}{S_1(Y_1,Y_2)}, \quad G_2(Y_1,Y_2) = \frac{R_2(Y_1,Y_2)}{S_2(X_1,Y_2)}.$$

Une des particularités du théorème d'Adjamagbo et Boury sur laquelle nous voudrions insister, est que les coefficients λ_1 et λ_2 sont des éléments respectivement, de $K[X_1] \setminus \{0\}$ et $K[X_2] \setminus \{0\}$ et non de K^* comme dans le théorème d'Abhyankar. La question naturelle qui vient alors à l'esprit est: dans le cas où F est polynomial (et non pas seulement rationnel), ce point de leur résultat peut-il être amélioré en prenant pour λ_1 et λ_2 des constantes dans K^*?

Compte tenu de "l'état de la question" du problème (2), notre second objectif est de préciser le lien entre les coefficients λ_1,λ_2 du théorème d'Adjamagbo et Boury d'une part, et les coefficients de F d'autre part, de manière à apporter une réponse à la question naturelle précédemment soulevée à propos de ce théorème. C'est l'objet du théorème et du corollaire ci-dessous.

Théorème Avec les notations du théorème d'Adjamagbo et Boury[2], pour tous $i \in \{1,2\}$ et $j \in \{1,2\}\backslash\{i\}$, le plus grand commun diviseur de $\mathrm{Cd}_{X_j}(F_1(X_1,X_2) - Y_1)$ et $\mathrm{Cd}_{X_j}(F_2(X_1,X_2) - Y_2)$ est un élément $\mu_i(X_i) \in K[X_i]$ qui a le même ensemble de racines que $\lambda_i(X_i)$ dans la clôture algébrique $\bar{K}$ de K.

Corollaire Soient $F = (F_1,F_2) \in (K[X_1,X_2])^2$ et $\mu_i(X_i) \in K[X_i]$ le plus grand commun diviseur de $\mathrm{Cd}_{X_j}(F_1(X_1,X_2) - Y_1)$ et de $\mathrm{Cd}_{X_j}(F_2(X_1,X_2) - Y_2)$

avec $i \in \{1,2\}$ et $j \in \{1,2\} \setminus \{i\}$. Les conditions (i) et (ii) suivantes sont équivalentes:

(i) F est inversible d'inverse rationnel tel que $\mu_i \in K^*$ pour $i \in \{1,2\}$.

(ii) il existe deux couples (R_1,S_1) et (R_2,S_2) d'éléments de $K[Y_1,Y_2] \setminus K$ avec R_1 et S_1 premiers entre eux, R_2 et S_2 premiers entre eux, et λ_1,λ_2 éléments de K^* vérifiant :

$$\begin{aligned}\mathrm{Res}_{X_2}(F_1 - Y_1, F_2 - Y_2) &= \lambda_1(S_1X_1 - R_1),\\ \mathrm{Res}_{X_1}(F_1 - Y_1, F_2 - Y_2) &= \lambda_2(S_2X_2 - R_2).\end{aligned}$$

L'intérêt principal de ce dernier théorème, est d'être à la fois un raffinement du théorème d'Adjamagbo et Boury et d'avoir comme corollaire, le théorème d'Abhyankar dont il fournit enfin une démonstration explicite. Quant au corollaire, il permet également d'apporter une réponse négative à la question naturelle précédente, c'est-à-dire d'exhiber un couple de polynôme F élément de $(K[X_1,X_2])^2$ d'inverse rationnel et dont les coefficients λ_1,λ_2 ne sont pas des éléments de K^* en prenant $F_1 = X_1^2X_2$ et $F_2 = X_1X_2$. Ce qui apporte un contre exemple à l'énoncé de Yu [4] et montre que les transformations linéaires génériques sont nécessaires pour garantir la validité du Théorème d'Abhyankar.

Références

[1] *K. Adjamagbo et A. ven den Essen*, A resultant Criterion and formula for the inversion of a polynômial map in two variables. J. of Pure and Appl. Algebra **64** (1990), 1–6.

[2] *K. Adjamagbo et Pierre Boury*, A resultant Criterion and formula for the inversion of a rational map in two variables. J. of Pure and Appl. Algebra **79** (1992), 1–13.

[3] *J.McKay et S. S.S.Wang*, *An inversion formula for two polynômials in two variables.* J. of Pure and Appl. Algebra **40** (1986), 245–257.

[4] *J-T. Yu*, Computing minimal polynomials and the inverse via GCP. communications in algebra, **21** (1993), 2279–2294.

Sihem Hachaïchi-Mesnager

Institut de Mathématiques, Université de Paris VI

4, Place Jussieu, 75252, Paris Cedex 05

hachai@math.jussieu.fr