Régularité des configurations micromagnétiques ayant une énergie de paroi nulle

Myriam Lecumberry

Considérons un échantillon fin d'un matériau ferromagnétique. On suppose que l'échantillon fin est un cylindre de base $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ et d'épaisseur ϵ. Une magnétisation spontanée est générée dans le matériau. On la note u, elle est de norme constante, que l'on prendra égale à 1. On supposera qu'il y a invariance par translation, ce qui nous ramène à un problème en dimension 2 sur un domaine Ω de $\mathbb{R}^2$.

Les énergies du problème sont les suivantes:

- L'énergie d'échange (qui pénalise les variations de u): $\int_\Omega |\nabla u|^2$,
- L'énergie démagnétisante: la magnétisation u est compensée par un champ H_u défini sur $\mathbb{R}^2$ par

$$\begin{cases} \operatorname{div}(\bar{u} + H_u) = 0 & \text{dans } \mathbb{R}^2 \\ \operatorname{rot}(H_u) = 0 & \text{dans } \mathbb{R}^2 \end{cases}$$

  où $\bar{u}$ est l'extension de u par 0 hors de Ω. L'énergie qui en résulte est $\int_{\mathbb{R}^2} |H_u|^2$,
- L'énergie d'anisotropie (qui privilégie une direction pour u),
- L'énergie due au champ magnétique extérieur.

On supposera que le matériau est anisotrope et que le champ extérieur est nul. Les deux dernières énergies sont donc nulles. L'énergie totale dépend de l'épaisseur ϵ de la manière suivante:

$$E_\epsilon(u) = \int_\Omega \frac{\epsilon}{2} |\nabla u|^2 + \frac{1}{2\epsilon} \int_{\mathbb{R}^2} H_u^2$$

Un des principaux problèmes est de comprendre le comportement asymptotique d'une famille de configurations u_ϵ, $\epsilon > 0$, dans $H^1(\Omega, S^1)$, ayant une énergie $E_\epsilon(u_\epsilon)$ uniformément bornée quand $\epsilon \to 0$.

Les résultats qui suivent (Théorème 1 et Proposition 1) ont été démontrés dans [4].

Théorème 1 :
Soit $\epsilon_n \to 0$ et $u_n \in H^1(\Omega, S^1)$ tel que u_n admet un relèvement $\phi_n \in H^1(\Omega, \mathbb{R})$

(ie $u_n = e^{i\phi_n}$ p.p.). Supposons que $E_{\epsilon_n}(u_n) \leq C$ et $\|\phi_n\|_{L^\infty} \leq N$. Alors, il existe u et ϕ dans $L^p, \forall\, p < \infty$ tels que, modulo une extraction,
$\phi_n \to \phi$ et $u_n \to u$ dans L^p, fort $\forall\, p < \infty$.
De plus, u et ϕ vérifient

i) $\operatorname{div} \bar{u} = 0$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^2)$,

ii) $u = e^{i\phi}$ p.p. in Ω,

iii) $\operatorname{div}(\phi u + u^\perp)$ est une mesure de Radon sur Ω.

$u^\perp$ désigne la rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$ de $u = (u_1,u_2)$, i.e $u^\perp = (-u_2,u_1)$.
On note par $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^2)$ l'espace des distributions sur $\mathbb{R}^2$.
Une mesure de Radon sur Ω est une application linéaire sur l'espace des fonctions continues à support compact dans Ω.

$\mathcal{C}_L$ est l'ensemble des couples (u,ϕ) tel que u et ϕ sont limites dans L^1 de suites (u_n) et (ϕ_n) dans $H^1(\Omega)$ vérifiant $u_n = e^{i\phi_n}$ p.p. dans Ω et telles que $E_{\epsilon_n}(u_n)$ et $\|\phi_n\|_{L^\infty}$ soient uniformément bornées.
La mesure $\operatorname{div}(\phi u + u^\perp)$, $\forall (u,\phi) \in \mathcal{C}_L$, est liée aux troncatures $T^a u$ définies par

$$\begin{cases} T^a\phi = \inf(\phi,a) \\ T^a u = e^{iT^a\phi} \end{cases}$$

de la manière suivante:

$$\operatorname{div}(\phi u + u^\perp) = -\int_{\mathbb{R}} \operatorname{div} T^a u \, da \tag{10}$$

Proposition 1:
Si $(u,\phi) \in \mathcal{C}_L$, alors

$$\int |\operatorname{div}(\phi u + u^\perp)| \leq \int\!\!\int |\operatorname{div} T^a u| \, da \leq \liminf_{n\to\infty} E_{\epsilon_n}(u_n)$$

quelque soit la suite $u_n = e^{i\phi_n}$, $\phi_n \in H^1(\Omega)$, telle que $E_{\epsilon_n}(u_n)$ et $\|\phi_n\|_{L^\infty}$ soient uniformément bornées, et $\phi_n \to \phi$ dans L^1.

Remarques:

1. Si on suppose que $u_n \in H^1(\Omega)$ vérifie $E_{\epsilon_n}(u_n) \to 0$ et que $u_n \to u$ dans L^1, alors u vérifie div $T^a u = 0$ dans $\mathcal{M}'(\Omega \times \mathbb{R})$.
2. Si u est régulière (par exemple $u \in H^1(\Omega)$), alors div $u = 0$ implique que div $T^a u = 0$.

Essayons maintenant de voir à quel point la mesure div $T^a u$ caractérise le manque de régularité de $(u,\phi) \in \mathcal{C}_L$. Le résultat suivant est démontré dans [3].

Théorème 2:
Soit $(u,\phi) \in \mathcal{C}_L$. Il y a équivalence entre

1. $\operatorname{div} T^a u = 0$, dans $\mathcal{D}'(\Omega \times \mathbb{R})$.
2. $\phi \in H^{1/2}(\Omega)$.

De plus, si 1. (et 2.) est vrai, then quelque soit $\omega \subset\subset \Omega$, ϕ est Lipschitz dans ω et les ensembles de niveaux de ϕ dans ω sont des lignes droites qui ne se coupent pas dans ω.

Idée de la preuve:
L'équivalence se démontre en utilisant l'interprétation cinétique du problème, donnée dans [4]:

$$\nabla_x \chi(x,a).(e^{ia})^{\perp} = -\partial_a(\operatorname{div} T^a u), \text{ dans } \mathcal{D}'(\Omega \times \mathbb{R}) \tag{11}$$

où χ est défini sur $\Omega \times \mathbb{R}$ par $\chi(x,a) = 1$ si $\phi(x) \leq a$ et $\chi(x,a) = 0$ sinon. Si 1. est vrai, le terme de droite dans l'égalité (2) est nul, la régularité $H^{1/2}$ est obtenue de manière standard grâce à un lemme de moyenne cinétique démontré dans [2].

Supposons maintenant que 1. est vrai, alors d'après (1), $\operatorname{div}(\phi u + u^{\perp}) = 0$. Rappelons que div $u = 0$. Il existe donc deux fonctions Lipschitz g,h telles que

$$\begin{cases} u = \nabla^{\perp} g & \text{dans } \Omega \\ \phi u + u^{\perp} = \nabla^{\perp} h & \text{dans } \Omega \end{cases}$$

où $\nabla^{\perp} = (-\frac{\partial}{\partial y},\frac{\partial}{\partial x})$.
On définit Ψ sur Ω à valeurs dans $\mathbb{R}^2$ par $\Psi(x,y) = (g,h)$, $\forall (x,y) \in \Omega$. Ψ is Lipschitz et $\mathrm{Jac}(\Psi) = 1$ dès qu'il est défini. On peut alors appliquer à Ψ un théorème d'inversion locale généralisé:
Pour presque tout $(x_0,y_0) \in \Omega$, $\exists V$, voisinage de (x_0,y_0), $\exists W$, voisinage de $\Psi(x_0,y_0)$, tels que $\Psi : V \to W$ est inversible. De plus, Ψ^{-1} est Lipschitz sur W. Pour chaque fonction f définie sur V, on note $\tilde{f} = f \circ \Psi^{-1}$.

Proposition 2 :
$\tilde{\phi}$ est une solution faible de l'équation de Burger sur W, i.e.

$$\forall\, \tilde{v} \in C_c^\infty(W), \quad \int_W \tilde{\phi}\frac{\partial \tilde{v}}{\partial g} + \frac{\tilde{\phi}^2}{2}\frac{\partial \tilde{v}}{\partial h} = 0$$

De plus, pour toute fonction $S \in C^2(\mathbb{R},\mathbb{R})$,

$$\forall\, \tilde{v} \in C_c^\infty(W), \quad \int_W S(\tilde{\phi})\frac{\partial \tilde{v}}{\partial g} + F(\tilde{\phi})\frac{\partial \tilde{v}}{\partial h} = 0,$$

où F est défini par $F'(t) = tS'(t)$, $\forall\, t \in \mathbb{R}$.

En particulier, $\tilde{\phi}$ est une solution entropique. Par un argument d'unicité locale pour les solutions entropiques de lois de conservation (cf [1] par exemple), on conclut que $\tilde{\phi} \in BV_{loc}(\Omega)$. Cette régularité est suffisante pour définir les caractéristiques de $\tilde{\phi}$ (courbes sur lesquelles $\tilde{\phi}$ est constante). On montre alors que ce sont des lignes droites qui ne se coupent pas.

Références

[1] *C.M. Dafermos*, Hyperbolic Conservation Laws in Continuum Physics, Springer (1991)

[2] *F. Golse, P.L. Lions, B. Perthame et R. Sentis* , Regularity of the moments of the solution of a transport equation, *J. Funct. Anal.* **76** (1988), no.1, 110-125.

[3] *M.Lecumberry et T. Rivière*, Regularity for Micromagnetic Configurations having Zero Jump Energy, to appear in *Calc. Var. PDE* (2002).

[4] *T. Rivière et S. Serfaty*, Compactness, Kinetic Formulation, and Entropies for a Problem Related to Micromagnetics, submitted.

Myriam Lecumberry
Laboratoire de Mathématiques, UMR 6629
Université de Nantes
2, rue de la Houssinière
44322 Nantes Cedex 03
France
Myriam.Lecumberry@math.univ-nantes.fr