Comportement à distance finie des tests fondés sur les graphes PP

Naïma Bessah

Résumé : Désignons par F_m et G_n les fonctions de répartition empiriques de deux échantillons indépendants de tailles respectives m et n et soient F_m^{-1} et G_n^{-1} les fonctions quantiles empiriques correspondantes. La statistique de test de Bahadur Kiefer est définie par :

$$BK(F_m,G_n) = Sup_{0<s<1} \left| F_m G_n^{-1}(s) + G_n F_m^{-1}(s) - 2s \right|$$

Nous nous intéressons à la comparaison de ce test avec le test classique de Kolmogorov- Smirnov, par une approche finie et sous l'hypothèse de contiguité des distributions.

Introduction: Les tests d'hypothèses (ou tests statistiques) nous permettent de décider si une hypothèse (appelée hypothèse nulle et notée H_0) est acceptée ou rejetée avec un taux d'erreur α.
Parmi ces tests, celui de Kolmogorov Smirnov à deux échantillons nous permet de décider si deux échantillons indépendants provenant de deux populations différentes ont même fonction de distribution ou pas.
Le but de cette étude est d'introduire le test de Bahadur Kiefer et de le comparer au test de Kolmogorov Smirnov.

Définitions: Soient $X_1,X_2,...,X_m$ et $Y_1,Y_2,...Y_n$ deux échantillons indépendants de lois respectives F et G inconnues
Les fonctions de répartition empiriques sont définies par

$$F_m(x) = \frac{1}{m}\#\{1 \leq i \leq m, X_i \leq x\} \text{ et } G_n(y) = \frac{1}{n}\#\{1 \leq i \leq n, Y_i \leq y\}$$

le symbole # désigne le cardinal de l'ensemble.
Les fonctions inverses sont appelées fonctions empiriques quantiles et définies par : $F_m^{-1}(s) = inf\,\{x, F_m(x) \geq s\}$ et $G_n^{-1}(s) = inf\{y, G_n(y) \geq s\ \}\ pour\ 0 \leq s \leq 1$ **Notation :** On pose $N = \frac{mn}{m+n}$

Le processus P-P plot empirique de F contre G est défini par :

$$A_{mn}(s) = N^{1/2}\left(F_m(G_n^{-1}(s)) - F(G^{-1}(s))\right)$$

Sous l'hypothèse nulle d'égalité des deux distributions : $H_0 : F = G$,

$$A_{mn}(s) = N^{1/2}\left(F_m(G_n^{-1}(s)) - s\right)$$

Remarque : La statistique de test de Kolmogorov Smirnov est définie par

$$\| \left(F_m(G_n^{-1}(s)) - s\right) \| = \sup_{0<s<1} \mid \left(F_m(G_n^{-1}(s)) - s\right) \mid$$

Le processus de type Bahadur Kiefer à deux échantillons est fondé sur les graphes P-P; il est défini par :

$$R_{mn} = \sqrt{N}\,\{F_m(G_n^{-1}(s) + G_n(F_m^{-1}(s) - 2s\}$$

Théorème (P.DEHEUVELS et D.M MASON 1990b)
Supposons que $F = G$ est continue et que $m \longrightarrow \infty$ et $n \longrightarrow \infty$. Alors $N^{1/4}(\log(N))^{-1/2} \parallel R_{mn} \parallel \longrightarrow_d \parallel B \parallel^{1/2}$
où B désigne un pont brownien et $\parallel f \parallel = \sup_{0\leq x\leq 1} \mid f(x) \mid$

La statistique de test de Bahadur Kiefer est définie par $\parallel F_m(G_n^{-1}(s) + G_n(F_m^{-1}(s) - 2s \parallel$, sa loi est donc connue d'aprés le théorème précédent .

Niveau de signification d'un test : Un niveau de signification, noté α,est la probabilité maximum de rejeter une hypothèse nulle vraie.
L' hypothèse nulle d'égalité des deux distributions $H_0 : F = G$ est rejetée au niveau de signification α pour chacun des tests si

$$P(\| \left(F_m(G_n^{-1}(s)) - s\right) \| > c_1) = P(\| F_m(G_n^{-1}(s) + G_n(F_m^{-1}(s) - 2s\| > c_2) = \alpha$$

$$c_1 = k_\alpha N^{-1/2} \quad et\ c_2 = \sqrt{k_\alpha} N^{-3/4}(Log N)^{1/2}$$

La valeur de k_α est lue sur la table de Kolmogorov Smirnov pour α donné (par exemple $\alpha = 0.05$ $k_\alpha = 1.36$)

Puissance d'un test
Définition La puissance d'un test, notée β , est la probabilité de rejeter une hypothèse nulle fausse.

Comparaison des deux tests : On a comparé les puissances β_{KS} et β_{BK}, obtenues par simulation, des deux tests de Kolmogorov Smirnov et de Bahadur Kiefer respectivement; on s'est interessé, en particulier au cas où la loi de F est uniforme sur [0,1] et au cas où la loi est gaussienne, l'alternative G sera contigue à F par translation, dilatation ou contamination pour des tailles d'ééchantillons égales ($n = m = 200$) ou différentes ($m = 100$ *et* $n = 80$)

Quelques résultats de simulation

Tableau 1 : $n = m = 200 F \tilde{} U[0,1]$ et $G \tilde{} U[a_m, 1 - a_m]$

a_m	β_{KS}	β_{BK}	β_{BK}/β_{KS}
$\frac{1}{3\sqrt{m}}$	0.044 [0.035,0.053]	0.0475 [0.038,0.0056]	1.067
$\frac{2}{3\sqrt{m}}$	0.0545 [0.044,0.064]	0.146 [0.13,0.161]	2.67
$\frac{5}{6\sqrt{m}}$	0.084 [0.071,0.096]	0.343 [0.322,0.364]	4.08
$\frac{1}{\sqrt{m}}$	0.136 [0.121,0.151]	0.629 [0.607,0.65]	4.62
$\frac{4}{3\sqrt{m}}$	0.321 [0.3,0.34]	0.963 [0.955,0.971]	3
$\frac{2}{\sqrt{m}}$	0.946 [0.93,0.95]	1	1.05

Tableau 2: $n = m = 200 F \tilde{} N[0,1]$ et $G \tilde{} N[a_m, 1]$

a_m	β_{KS}	β_{BK}	β_{BK}/β_{KS}
$\frac{1}{2\sqrt{m}}$	0.048 [0.039,0.057]	0.051 [0.041,0.06]	1.05
$\frac{1}{\sqrt{m}}$	0.0725 [0.061,0.083]	0.0605 [0.05,0.07]	0.83
$\frac{3}{2\sqrt{m}}$	0.13 [0.115,0.144]	0.097 [0.08,0.109]	0.74
$\frac{2}{\sqrt{m}}$	0.194 [0.177,0.211]	0.153 [0.137,0.169]	0.78
$\frac{3}{\sqrt{m}}$	0.396 [0.374,0.417]	0.292 [0.272,0.311]	0.73
$\frac{6}{\sqrt{m}}$	0.943 [0.93,0.95]	0.835 [0.81,0.85]	0.88

Tableau 3 : $n = 80$, $m = 200$ $F\tilde{}U[0,1]$ et $G\tilde{}U[a_m,1-a_m]$

a_m	β_{KS}	β_{BK}	β_{BK}/β_{KS}
$\frac{1}{2\sqrt{m}}$	0.059 [0.049,0.069]	0.077 [0.065,0.088]	1.3
$\frac{1}{\sqrt{m}}$	0.131 [0.116,0.145]	0.446 [0.424,0.468]	3.4
$\frac{3}{2\sqrt{m}}$	0.489 [0.467,0.51]	0.946 [0.936,0.955]	1.93

Conclusion: Selon les situations de l'alternative, le test de Bahadur Kiefer

peut s'averer meilleur que le test de Kolmogorov Smirnov, le rapport des puissances des deux tests peut dépasser 3 dans diverses situations en faveur du test de Bahadur Kiefer, il y'a néanmoins quelques cas où le rapport se montre légèrement inférieur à 1.

Références

[1] J. BEIRLANT, P. DEHEUVELS, *On the approximation of P-P and the Q-Q plot processes by brownian bridges, Statistics and Probability letters,9, 1990, pp 241-251*

[2] M. CSORGO, P REVESZ, *Strong approximation in probability and Statistics, Academic Press, New York., 1981*

[3] P. DEHEUVELS, D-M MASON, *A Bahadur-Kiefer-type two sample statstic with applications to tests of goodness of fit., Coll. Math.. Soc. Janos Bolayai, 57, 1990b, pp 157-172.*

[4] P. DEHEUVELS, D-M MASON *,Bahadur-Kiefer type processes, Annals of Probability, 18, 1990a, pp 669-697.*

[5] J. HAJECK, Z. SIDAK, *Theory of rank tests, Academic Press, New York.*

Naïma BESSAH

Institut d'informatique BP. 68M

Oued Smar, 16270, Alger, Algérie

n_bessah@yahoo.fr