Méthode de décomposition de domaine pour des équations au dérivées partielles

Véronique Martin

Introduction

Ces dernières décennies, les mathématiques appliquées ont connu un succès grandissant dans les milieux industriels. En effet, là où des essais effectués en taille réelle étaient coûteux, la simulation numérique offre une grande souplesse dans la résolution du problème étudié.

Dans un premier temps, on choisit les équations qui proviennent de la physique et qui rendent compte du phénomène étudié. Ensuite il s'agit de résoudre ces équations. La plupart n'ayant pas de solution analytique, nous en calculons une approximation de façon numérique à l'aide d'outils informatiques.

Toutefois les problèmes étudiés sont de plus en plus complexes et certaines applications demandent plus de mémoire qu'un seul ordinateur ne peut leur en fournir. Une solution proposée est de décomposer le problème initial en sous-problèmes de plus petite taille qui pourront être gérés chacun par un seul ordinateur. Ensuite un échange d'informations selon un processus itératif permet d'obtenir la solution globale (voir [4], [6]).

1 Méthode de décomposition de domaine

Nous présentons la méthode sur un problème très simple. Sur l'intervalle $I = [0,1]$, on considère l'équation $-C^2 u + \dfrac{d^2u}{dx^2} = 0$ avec $C > 0$, et les conditions limites $u(0) = 1$ et $u(1) = e^{1/C}$. On en connait la solution $u = e^{x/C}$.

Nous allons résoudre ce problème par décomposition de domaines i.e. nous introduisons deux sous-domaines I_1 et I_2, avec $I_1 = [0,\frac{1}{2} + L[$, $I_2 =]\frac{1}{2},1]$ et $L < 1/2$ la taille du recouvrement.

Mettre en place une méthode de décomposition de domaines revient à résoudre le problème suivant. Nous possédons deux ordinateurs ; le premier résout l'équation de diffusion sur I_1 avec $u(0) = 1$ et une condition en $x = 1/2 + L$ à définir. Le deuxième résout également l'équation mais sur I_2 avec $u(1) = e^{1/C}$ et une condition à définir en $x = 1/2$. Comment obtenir la solution globale sur I à partir de ces deux machines?

Pour obtenir la solution sur I il est nécessaire que les deux ordinateurs s'échangent des informations au niveau des interfaces artificielles ($x = 1/2 + L$, $x = 1/2$). Historiquement le premier algorithme proposé est le suivant :

$$\left\{ \begin{array}{lcl} -C^2 \dfrac{d^2u}{dx^2}^{k+1} + u^{k+1} & = & 0 \quad \text{sur } I_1, \\ u^{k+1}(0) & = & 1, \\ u^{k+1}(1/2+L) & = & v^k(1/2+L), \end{array} \right. \qquad \left\{ \begin{array}{lcl} -C^2 \dfrac{d^2v}{dx^2}^{k+1} + v^{k+1} & = & 0 \quad \text{sur } I_2, \\ v^{k+1}(1/2) & = & u^{k+1}(1/2), \\ v^{k+1}(1) & = & e^{1/C}. \end{array} \right. \tag{12}$$

La figure (13) montre les différentes étapes de l'algorithme et comment il converge vers la solution du problème global.

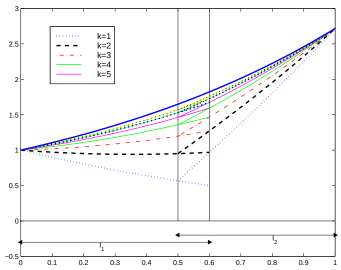

FIG. 13 – *Dirichlet*

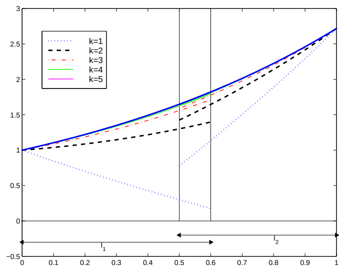

FIG. 14 – *Robin* $\lambda = 10$

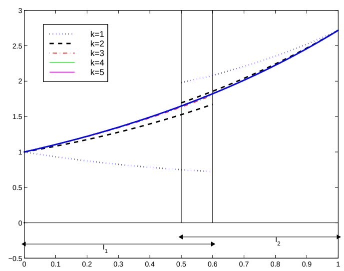

FIG. 15 – *Robin* $\lambda = 1/C$

Ensuite on peut améliorer la vitesse de convergence de cette méthode en changeant les conditions de transmission. On remplace donc dans l'algorithme (12) les conditions en $x = 1/2 + L$ et $x = 1/2$ par les conditions dites de Robin :

$$\begin{array}{lcl} (\dfrac{du}{dx}^{k+1} + \lambda u^{k+1})(1/2+L) & = & (\dfrac{dv}{dx}^{k} + \lambda v^{k})(1/2+L) \\ (\dfrac{dv}{dx}^{k+1} - \lambda v^{k+1})(1/2) & = & (\dfrac{du}{dx}^{k+1} - \lambda u^{k+1})(1/2). \end{array}$$

avec λ à définir. Les figures (14) et (15) montrent le résultat pour deux valeurs de λ. On voit que d'une part il faut moins d'itérations à cette méthode que pour celle de Dirichlet pour converger et que ce nombre d'itérations dépend du choix de λ.
On note que dans ce dernier cas le recouvrement L peut être pris égal à 0.

2 Application à l'équation de convection diffusion

On s'intéresse ici à l'équation de convection diffusion (13) qui régit l'évolution d'un polluant soumis à une force extérieure (par exemple du vent) dans un domaine donné Ω, de frontière $\partial\Omega$.

$$\begin{cases} \mathcal{L}u \equiv \dfrac{\partial u}{\partial t} + a\dfrac{\partial u}{\partial x} + b\dfrac{\partial u}{\partial y} - \nu\triangle u = f \text{ dans } \Omega \\ u(.,0) = u_0 \\ u = g \text{ sur } \partial\Omega \end{cases} \tag{13}$$

On décompose Ω en deux sous-domaines Ω_1 et Ω_2, et on note Γ l'interface commune qui est supposée rectiligne. L'objet de cette étude est d'écrire un algorithme de décomposition de domaine appliqué à cette équation avec pour objectif d'obtenir la convergence la plus rapide possible.

On connait les conditions de transmission (au niveau de l'interface) qui donnent une convergence de l'algorithme en deux itérations ; elles sont données par l'opérateur de Dirichlet-Neumann (voir [3] pour les conditions limites absorbantes). Elles ne sont pas utilisables du point de vue numérique, on est alors amené à les approcher par des opérateurs différentiels en temps et en la variable définie sur l'interface. Ceci conduit à l'algorithme (14), (15) .

$$\begin{cases} \mathcal{L}u^{k+1} & = & f \text{ dans } \Omega_1 \times]0,T[\\ u^{k+1}(\cdot,0) & = & u_0 \text{ dans } \Omega_1 \\ \Big(\dfrac{\partial}{\partial x} + \dfrac{a+p}{2\nu} + q\dfrac{\partial}{\partial t} + bq\dfrac{\partial}{\partial y}\Big)u^{k+1} & = & \Big(\dfrac{\partial}{\partial x} + \dfrac{a+p}{2\nu} + q\dfrac{\partial}{\partial t} + bq\dfrac{\partial}{\partial y}\Big)v^{k} \quad \text{sur } \Gamma \end{cases} \tag{14}$$

$$\begin{cases} \mathcal{L}v^{k+1} & = & f \text{ dans } \Omega_2 \times]0,T[\\ v^{k+1}(\cdot,0) & = & u_0 \text{ dans } \Omega_2 \\ \Big(\dfrac{\partial}{x} + \dfrac{a-p}{2\nu}Id - q\dfrac{\partial}{\partial t} - bq\dfrac{\partial}{\partial y}\Big)v^{k+1} & = & \Big(\dfrac{\partial}{x} + \dfrac{a-p}{2\nu}Id - q\dfrac{\partial}{\partial t} - bq\dfrac{\partial}{\partial y}\Big)u^{k} \quad \text{sur } \Gamma \end{cases} \tag{15}$$

Le résultat suivant valide cet algorithme. Sa démonstration repose sur des estimations d'energie.

Théorème : L'algorithme (14),(15) definit un problème bien posé dans l'espace de Sobolev *ad hoc* . Et la suite (u^k,v^k) converge vers u.

Pour le choix de p et q i.e. pour l'approximation des conditions exactes, on peut faire un développement de Taylor en basses fréquences du symbole de

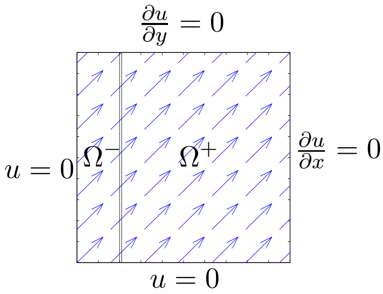

FIG. 16 – *Le problème*

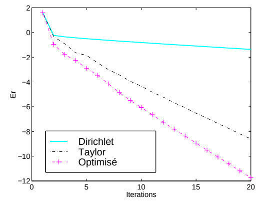

FIG. 17 – *L'erreur*

l'opérateur Dirichlet-Neuman, ou choisir les valeurs de p et q qui minimisent le taux de convergence de l'algorithme (voir [1] pour le cas stationnaire).
On étudie le problème aux limites décrit sur la figure (16). La figure (17) montre l'évolution de l'erreur numérique en fonction du nombre d'itérations dans le cas des différents algorithmes proposés. On voit que la convergence de la méthode de Dirichlet est très lente. La méthode de Taylor permet une convergence plus rapide. Mais la méthode la plus rapide est encore la méthode optimisée puisqu'elle prend en compte toutes les fréquences du phénomène.

Références

[1] *Japhet C., Nataf F., Rogier F.*, The optimized order 2 method. Application to convection-diffusion problems. Future Generation Computer Systems FUTURE 2001.

[2] *M.J. Gander, L. Halpern, F. Nataf*, Optimal convergence for overlapping and non-overlapping Schwarz waveform relaxation. Eleventh International Conferences on Domain Decomposition Methods.

[3] *L. Halpern, M. Schatzman*, Artificial boundary conditions for incompressible flows. SIAM Journal on Math. Anal.. 1989, vol 20, 2, 308-353 .

[4] *Lions P.L.*, On the Schwarz alternating method I. First International Symposium on Domain Decomposition Methods for Partial Differential Equations.

[5] *V. Martin*, Domain decomposition method for unsteady convection diffusion equation. En préparation.

[6] *A. Quarteroni et A. Valli*, Domain decomposition methods for partial differential equations Oxford Science Publications, 1999.

Véronique Martin
LAGA,Institut Galilée Université Paris 13
avenue Jean Baptiste Clément, 93 430 Villetaneuse, France
`martin@math.univ-paris13.fr`