Décidabilité de la théorie universelle de certains semigroupes commutatifs

Céline Moreira Dos Santos

Définition 1 : Un **semigroupe** est la donnée d'un triplet $(S, +\ ,0)$, où:

- S est un ensemble;
- $+$ est une opération associative, *i.e.*, vérifiant $(x+y)+z = x+(y+z)$, pour tous x, y, $z \in S$;
- 0 est un élément de S neutre pour l'opération $+$, *i.e.*, vérifiant la propriété $x + 0 = 0 + x = x$, pour tout $x \in S$.

Un semigroupe est **commutatif** si son opération vérifie $x + y = y + x$, pour tous x, $y \in S$.

Tous les semigroupes que nous considèrerons seront commutatifs.

Exemple 1 : Les structures usuelles $(\mathbb{N}, +\ ,0)$ et $(\mathbb{N} \setminus \{0\}, \cdot\ ,1)$ sont des semigroupes (commutatifs).

Définition 2 : Soient S et T des semigroupes. Un **homomorphisme de semigroupes** $f\colon S \to T$ est une application de S dans T vérifiant les propriétés suivantes:

1. $f(0_S) = 0_T$;
2. $f(x + y) = f(x) + f(y)$, pour tous x et $y \in S$.

Un plongement $f\colon S \hookrightarrow T$ est un homomorphisme de semigroupes injectif, *i.e.*, vérifiant $f(x) = f(y) \implies x = y$, pour tous x et $y \in S$.

On s'interesse plus particulièrement à deux types de propriétés sur les semigroupes: la simplifiabilité et le raffinement.

Définition 3 : Un semigroupe S est dit:

- **simplifiable**, si il satisfait: $(x + z = y + z \Rightarrow x = y)$, pour tous x, y et $z \in S$;
- **fortement séparatif**, si il satisfait: $(x + y = 2y \Rightarrow x = y)$, pour tous x et $y \in S$;
- **séparatif**, si il satisfait: $(2x = x + y = 2y \Rightarrow x = y)$, pour tous x et $y \in S$.

On remarque que

$$\text{simplifiabilité} \implies \text{séparativité forte} \implies \text{séparativité}.$$

Définition 4: Un semigroupe S est un **semigroupe de raffinement** si, pour tous a_0, a_1, b_0, $b_1 \in S$ vérifiant $a_0 + a_1 = b_0 + b_1$, il existe des éléments $c_{ij} \in S$, i, $j \in \{0,1\}$ vérifiant $a_i = c_{i0} + c_{i1}$ et $b_i = c_{0i} + c_{1i}$. Cette information s'exprime avantageusement sous la forme d'une **matrice de raffinement**:

	b_0	b_1
a_0	c_{00}	c_{01}
a_1	c_{10}	c_{11}

Cet énoncé est contraignant, mais beaucoup de semigroupes sont de raffinement, ou se plongent dans un semigroupe de raffinement.

Les liens entre semigroupes simplifiables et semigroupes de raffinement sont activement étudiés actuellement, en théorie des anneaux (cf. [1]) et en théorie des treillis (cf. [8]) tout particulièrement.

Nous donnons maintenant des résultats de décomposition. Il n'en existe actuellement pas de semblables pour les semigroupes de raffinement.

Théorème 1: (cf.[7]) S séparatif se plonge dans un produit de la forme $\prod_{i\in I} T_i \cup \{\infty\}$, où les T_i sont des semigroupes simplifiables.

Théorème 2: (cf.[5]) S fortement séparatif se plonge dans un produit de la forme $\prod_{i\in I} T_i \oplus \mathcal{L}_J(\mathbb{R})$, où les T_i sont des semigroupes simplifiables, et $\mathcal{L}_J(\mathbb{R})$ est une sorte de **puissance lexicographique** des réels strictement positifs.

On se donne $\mathcal{S}$ une classe de semigroupes (commutatifs) close par produit direct fini. En particulier, $\mathcal{S}$ pourra être la classe des semigroupes simplifiables (resp. fortement séparatifs, séparatifs).

Définition 5: On appelle

- *formule atomique*: toute formule de la forme $(\sum_{i=1}^n a_i x_i = \sum_{i=1}^n b_i x_i)$, où a_i, b_i, $1 \le i \le n$ sont des entiers positifs, et $x_1, \ldots, x_n$ sont des symboles de variables;
- *formule de Horn universelle*: toute formule de la forme

$$\varphi(\vec{\mathbf{x}})\colon (\forall \vec{\mathbf{x}})[\psi(\vec{\mathbf{x}}) \Rightarrow \theta(\vec{\mathbf{x}})], \tag{16}$$

  où $\psi(\vec{\mathbf{x}}) = \psi_1(\vec{\mathbf{x}}) \wedge \cdots \wedge \psi_l(\vec{\mathbf{x}})$ est une conjonction de formules atomiques et $\theta(\vec{\mathbf{x}})$ est une formule atomique.

Exemple 1: Les énoncés exprimant la simplifiabilité, la séparativité forte et la séparativité sont des formules de Horn universelles. L'énoncé exprimant le raffinement n'est pas une formule de Horn universelle.

Définition 6 : La **théorie universelle** de $\mathcal{S}$ est l'ensemble des formules de Horn universelles qui sont vraies dans tous les semigroupes de $\mathcal{S}$. On dit que la théorie universelle de $\mathcal{S}$ est **décidable** si il existe un algorithme prenant en entrée une formule de Horn universelle φ et déterminant si φ est vraie dans tous les semigroupes de $\mathcal{S}$.

Exemple 3 : L'énoncé $(\forall x,y)(x+y = 2y \implies x = y)$ appartient aux théories universelles des semigroupes simplifiables et fortement séparatifs, mais pas à la théorie universelle des semigroupes séparatifs.

Propriété 1 : Pour décider tous les problèmes de mot de $\mathcal{S}$, il suffit de pouvoir décider la théorie universelle de $\mathcal{S}$.

Voici deux résultats classiques.

Théorème 3 : La théorie universelle de $(\mathbb{R}, +, 0, \leq)$ est décidable (folklore).

Théorème 4 : La *théorie du premier ordre* de $(\mathbb{N}, +, 0, \leq)$ (arithmétique de Presburger) est décidable (cf.[2]).

Propriété 2 : La théorie universelle des semigroupes simplifiables est décidable.

En effet, pour qu'une formule de Horn universelle φ donnée soit vraie dans tous les semigroupes simplifiables, il faut et il suffit qu'elle soit vraie dans un certain quotient d'une puissance finie de $\mathbb{Z}$; nous pouvons conclure grâce au **Théorème 2**.

Corollaire 1 : (cf.[5, 7]) La théorie universelle des semigroupes séparatifs (resp. fortement séparatifs) est décidable.

Question ouverte : La théorie universelle des semigroupes de raffinement est-elle décidable?

De nouvelles techniques (cf. [6]) semblent assez prometteuses pour répondre à cette question. Nous en donnons un léger aperçu.

Construction d'un semigroupe de raffinement (non simplifiable):

	a_0	c_0
b_0	d_1	b_1
c_0	a_1	c_1

Nous obtenons $c_0 = a_1+c_1 = b_1+c_1$, et nous pouvons réitérer l'opération (une infinité de fois). On obtient un semigroupe de raffinement non simplifiable.

Références

[1] *P. Ara, K. R. Goodearl, K. C. O'Meara et E. Pardo* , Separative cancellation for projective modules over exchange rings.
Israel Journal of Mathematics **105** (1998), 105–137.

[2] *G. S. Boolos et R. C. Jeffrey*, Computability and Logic.
Cambridge University Press éditeur (1989)

[3] *C. C. Chang et H. J. Keisler*, Model Theory.
North Holland éditeur (1973)

[4] *A. H. Clifford et G. B. Preston*, The algebraic theory of semigroups, Vol I.
Mathematical Surveys of the A.M.S **7** (1961)

[5] *Céline Moreira*, Decomposition of strongly separative monoids.
à paraître dans J. Pure Appl. Algebra

[6] *Céline Moreira*, A refinement monoid whose maximal antisymmetric quotient is not a refinement monoid.
à paraître dans Semigroup Forum

[7] *Friedrich Wehrung* , Restricted injectivity, transfer property and decompositions of separative positively ordered monoids.
Communications in Algebra **22-5** (1994), 1747–1781.

[8] *Friedrich Wehrung* , The dimension monoid of a lattice.
Algebra Universalis **40-3** (1998), 247–411.

Céline Moreira Dos Santos
Département de Mathématiques
Université de Caen
BP 5186
14 032 Caen cedex
France
`cmoreira@math.unicaen.fr`
http://www.math.unicaen.fr/ cmoreira/