**Structure de treillis et modèle de Chip Firing Games**

*Ha Duong Phan*

**Resumé :** *Dans ce papier, nous étudions un système dynamique discret classique, le Chip Firing Game, utilisé comme un modèle dans la physique, l'économie et l'informatique [1, 2, 3, 11, 12]. Nous utilisons la théorie des ordres et des treillis pour montrer que l'ensemble des configurations accessibles à partir d'une configuration quelconque est un treillis, qui implique des propriétés fortement structurelles.*

**Définition 1** : **Un Chip Firing Game, (CFG)** [2] est défini par la donnée d'un (multi)graphe $G = (V,E)$ orienté (appelé *support* du CFG) et d'une répartition d'un certain nombre de jetons (chips) sur chaque commet (*la configuration initiale* du CFG). La règle d'évolution est alors : si un sommet a au moins autant de jetons que d'arcs sortants, on transfère un jeton le long de chacun de ces arcs.

On peut supposer que les sommets d'un graphe sont indexés par des entiers. Une configuration d'un CFG peut alors être représentée par un vecteur $c = (c_1, \ldots, c_n)$ tel que $c_i$ est le nombre de jetons de $i$-ème sommet. L'ensemble des configurations accessibles à partir de la configuration initiale est appelé *espace des configuration.* Cet ensemble est muni d'une relation, appelée *relation de successeur* , induite par la règle d'évolution : $a \succ b$ si et seulement si la configuration $b$ peut être obtenue à partir de la configuration $a$ par une application de la règle.

Nous montrons dans ce papier que l'espace des configurations d'un CFG est fortement structurel. Pour cela, nous utilisons la thérie des ordres.

**Définition 2** [5]: Un **ordre** est un ensemble muni d'une relation binaire réflexive, transitive et antisymétrique. Considérons deux éléments $a$ et $b$ d'un ordre. Si l'ensemble des éléments plus petits que $a$ et $b$ a un unique élément maximal, on appelle cet élément *l'infimum* de $a$ et $b$. De façon duale, si l'ensemble des éléments plus grands que $a$ et $b$ a un unique élément minimal, on appelle cet élément *le supremum* de $a$ et $b$. Sidans un ordre, tout couple d'éléments a un infimum et un supremum, alors cet ordre est un **treillis**.

Le fact que l'espace des confugurations d'un système dynamique a une structure de treillis implique certaines propriétés importantes, comme la convergence. De plus, cette convergence est très forte dans le sens suivant : pour deux configurations de ce système, il existe une unique première configuration obtenue à partir d'elles, et toute configuration qui peut être obtenue à partir d'elles peut être également obtenue à partir de cette première.

Dans la suite, nous présentons une classe spéciale de CFGs qui joue un rôle central dans notre étude. Les supports de ces CFGs ne contiennent aucune composante fermée.

**Définition 3** : **Une composante fermée** d'un multigraphe $G = (V,E)$ est un sous-ensemble $S$ de $V$ non réduit à un élément et tel que :

- $S$ est une composante fortement connexe (c'est-à-dire il existe un chemin de n'importe quel élément de $S$ à n'importe quel élément de $S$), et

- il n'y a aucun arc d'un sommet de $S$ vers un sommet de $V \setminus S$ ($S$ est fermé)

Nous montrons que dans un CFG sans composantes fermées, la relation de successeur n'a pas de cycles. elle induit donc un ordre sur les configurations accessibles. Nous étendons alors la notion de shot vector (voir par exemple [6]) et nous démontrons que l'espace des configurations est un treillis inférieurement localement distributif.

**Lemme 1** *Soit $C$ une composante fortement connexe non fermée. A partir d'une configuration $a$ quelconque, il ne peut pas exister de suite non vide d'application de la règle à des sommets de $C$ telle qu'on obtienne à nouveau $a$.*

Ce lemme implique que si on n'applique la règele qu'à des sommets qui ne sont pas dans des composantes fermées, on ne peut pas avoir de cycle dans l'espace des configurations, et induit donc un ordre :

**Théorème 1** [12] *L'espace des configurations d'un CFG sans composante fermée est ordonné par la clôture réflexive et trasitive de la relation de successeur.*

De plus, on sait [6] que les CFG sont des jeux fortement convergents. En d'autre termes, ou bien un CFG ne s'arrête jamais, ou bien toutes les séquences d'applications de la règle d'une configuration $a$ à une autre $b$ ont la même longueur. Nous allons affiner ce résultat dans le cas des CFG sans composantes fermées. Etant donné une telle séquence $p$, nous notons $|p|_i$ le nombre d'applications de la règle au sommet $i$ durant la séquence. Commençons par prouver le résultat suivant :

**Lemme 2** *Etant donné un CFG sans composantes fermées, si deux séquences $s$ et $t$ d'applications de la règle partent de la même configuration $a$ et amènent à la même configuration $b$, alors :*

$$|s|_i = |t|_i \text{ pour tout sommet } i.$$

Ce lemme nous permet de définir le *shot vector* $k(a,b)$ de deux configurations $a$ et $b$ si $b$ peut être obtenue à partir de $a$ dans un CFG sans composantes fermées : $k(a,b) = (k_a(a,b), \ldots ,k_n(a,b))$ où $k_i(a.b)$ est le nombre d'applications de la règle à $i$ pour obtenir $b$ à partir de $a$. Nous notons aussi $|k(a.b)|$ la somme $\sum_{i=1}^{i=n} k_i(a,b)$, c'est-à-dire le nombre total d'applications de la règle nécessaires pour obtenir $b$ à partir de $a$. Si $a$ et $b$ sont deux configurations obtenues à partir de la même configuration $O$, on définit l'ordre $k(O,a) \leq k(O,b)$ si pour tout $i$, $k_i(O,a) \leq k_i(O,b)$. De plus, si $a \geq b$, il est clair que $k(O,b) = k(O,a) + k(a,b)$.

Nous pouvons caractériser l'odre entre deux configurations obtenues à partir de la configuration initiale $O$ dans un CFG sans composantes fermées en comparant leurs shot vectors comme suit :

**Théorème 2** [12] *Si $a$ et $b$ deux configurations obtenues à partir de la même configuration $O$ d'un CFG sans composantes fermées, alors :*

$$a \geq b \Leftrightarrow k(O,a) \leq k(O,b).$$

Nous pouvons maitement donner le résultat principal de ce papier :

**Théorème 3** [12] *L'ensemble de toutes les configurations obtenues à partir de la configuration initiale $O$ d'un CFG sans composantes fermées, ordonné par la clôture réflexive et transitive de la relation de successeur, est un treillis inférieurement localement distributif. De plus, l'infimum de deux éléments $a$ et $b$ est définit comme suit : soit $k$ un vecteur tel que pour tout sommet $i$, $k_i = max(k_i(O,a),k_i(O,b))$; alors la configuration $c$ telle que $k(O,c) = k$ existe et elle est l'infimum de $a$ et $b$.*

Nous étudions maintenant la structure de l'esapce des configurations des CFGs quelconques, en particulier ceux dont le support a des composantes fermées. On peut remarquer que dans un tel cas on n'obient pas un treillis, ni même un ordre. Par conséquence, nous proposons une extension naturelle des notions présentées dans les parties précédentes, qui nous amènera à considerer des espaces de configurations structurées en treillis infinis.

Une *configuration étendue* d'un CFG est un couple $(i,c)$ où $c$ est une configuration, et $i$ est le nombre total d'applications de la règle nécessaires pour obtenir $c$ à partir de la configuration initiale. On étend naturellement la notion de la ralation successeur en disant que $(i,a) \succ (j,b)$ si et seulement si $j = i + 1$ et $b$ peut être obtenue à partir de $a$ par une application de la règle. Il est alors évident que l'espace des configurations étendues de n'importe quel CFG ne contient pas de cycle. De plus, il possède une structure de treillis :

**Théorème 4** [12] *L'ensemble des configurations étendues obtenues à partir de la configuration étendue initiale* $(0,O)$ *d'un CFG, ordonné par la clôture réflexive et transitive de la relation de successeur, est un treillis inférieurement localement distributif. De plus, l'infimum de deux éléments* $a$ *et* $b$ *est définit comme suit : soit* $k$ *un vecteur tel que pour tout sommet* $i$, $k_i = max(k_i(O,a),k_i(O,b))$ *; alors la configuration* $(m,c)$ *telle que* $k((0,O),(m,c)) = k$ *et* $m = \sum_{i \geq 1} k_i$ *existe etelle est l'infimum de* $a$ *et* $b$.

Le modèle CFG est un modl̀e très général, beaucoup de modèles connus peuvent être codés comme des CFGs spéciaux, à savoir les modèles suivants : Modèle de Piles de Sable (SPM) [3, 4, 7, 10], modèle $L(n,\theta)$, modèle $CFG(n,m)$ [10], le Jeux de cartes [8]. Grace à ces codages, on peut voir comment des résultats de ces modèles peuvent être déduits à partir des résulatts du modèle CFG.

# Références

[1] *N. Biggs*, Chip Firing and the critical groupe of a graph. Journal of Algebraic Combinatoirics **9** (1999), 25–45.

[2] *A. Bjorner, L. Lovász et W. Shor* , Chip-firing games on graphs. E. J. Combinatorics **12** (1991), 283–291.

[3] *P. Bak, C. Tang et K. Wiessenfeld* , Physics Review Letters . **59** (1987), 381.

[4] *R. Cori et D. Rossin*, On the sand pile group of a graph . LIX Technical Report (1998),

[5] *B. A. Davey et H. A. Prietley*, Introduction to Lattiec and Orders . Cambridge University Press (1990),

[6] *K. Eriksson*, Strongly convergent Games and Coxeter Groups . PhD thesis, Kungl Tekniska Hogskolan, Sweden (1993),

[7] *E. Goles et M. A. Kiwi*, Games on line graphs and sand piles. TCS, **115** (1993), 321-349

[8] *E. Goles, M. Morvan et H. D. Phan*, Lattice structure and convergence of a game of cards . à paraître dans Annals of Combinatorics **12**

[9] *E. Goles, M. Morvan et H. D. Phan*, Sand piles and order structure of integer partitions . a paraître dans Discrete Applied Mathematics

[10] *E. Goles, M. Morvan et H. D. Phan*, The structure of Chip Firing games and related modles . a paraître dans TCS.

[11] *Jan van den Heuvel*, Algorithmic aspect of a chip firing game . London School of Economics, CDAM Reseach Reports (1999),

[12] *M. Latapy et H. D. Phan*, The Lattice structure of Chip Firing Games Physica D (2001),

*Ha Duong Phan*
LIAFA, Université Paris 7
175, rue Chevaleret, 75013 Paris, France
phan@liafa.jussieu.fr
http://www.liafa.jussieu.fr/ phan