Symbole de Kronecker Torique

Herimampita Ratsimbazafy

La théorie des résidus analytiques peut être rapidement résumée de la façon suivante (cf. [3]) :

Etant données $n+2$ fonctions g et f_i, $i \in \{0,\ldots,n\}$, à $n+1$ variables x_i, holomorphes dans un voisinage de $0 \in \mathbb{C}^{n+1}$, telles que les f_i ne s'annulent simultanément qu'en 0, on définit, sous forme intégrale complexe, le résidu local en 0, $res_0(\omega_g)$, de la forme différentielle $\omega_g = \dfrac{g dx_0 \wedge \ldots \wedge dx_n}{f_0 \cdots f_n}$.

Dans le cas où les f_i sont des polynômes homogènes de degré d et g un polynôme homogène de degré $\rho = (n+1)(d-1)$, l'application associant g à $res_0(\omega_g)$, induit un isomorphisme entre le $\mathbb{C}$-espace vectoriel,
$\mathbb{C}[X_0,\ldots,X_n]_\rho / \langle f_0,\ldots,f_n\rangle_\rho$, des classes, modulo l'idéal $\langle f_0,\ldots,f_n\rangle$, des polynômes homogènes de degré ρ, et $\mathbb{C}$.

D. Cox généralise cette approche analytique sur une variété torique projective et complète sur $\mathbb{C}$. D'autres l'ont poursuivi en étudiant quelques propriétés de ce **résidu torique** (loi de transformation, ...) (cf. [1]).

Dans le cadre algébrique, si $(f) = (f_1,\ldots,f_n)$ est une suite de n polynômes de $\mathbb{C}[X_1,\ldots,X_n]$, vérifiant certaines conditions, on considère le $\mathbb{C}$-espace vectoriel quotient $A = \mathbb{C}[X_1,\ldots,X_n]/\langle f_1,\ldots,f_n\rangle$. On définit le bezoutien généralisé $B(f)$ associé à (f). On peut écrire :

$$B(f) = \sum_i a_i \otimes b_i \in A \otimes A, \text{ où } \{a_i\},\{b_i\} \text{ sont deux bases de } A.$$

Le résidu (affine), appelé aussi <u>Symbole de Kronecker</u> affine, se définit alors comme l'application linéaire de A vers $\mathbb{C}$ telle que :

$$\sum_i \ell(a_i) b_i = 1.$$

Dans [2], une première généralisation de cette approche, au cas torique est amorcée. Elle permet de traiter le cas du Symbole de Kronecker dans le tore associé à une suite de polynômes de Laurent.

Nous poursuivons cette généralisation, en définissant, le Symbole de Kronecker torique pour le cas d'une variété torique complète et simpliciale.

Soit $\mathcal{X}$ une telle variété, de dimension n, associée à un polytope convexe rationnel et fermé P, de $\mathbb{R}^n$. On désigne par $\mathcal{T}$ son tore maximal, et par $\eta_1, \ldots ,\eta_s$ les vecteurs primitifs normaux rentrant à P. On note $S = \mathbb{C}[X_1,...,X_s]$ l'anneau de coordonnées multihomogènes de $\mathcal{X}$, et $\deg(X_j)$ le multidegré de X_j.

On considère $n+1$ polynômes multihomogènes, $F_0,...,F_n \in S$, vérifiant certaines conditions.
On appelle multidegré critique pour les F_i, le multidegré $\rho = \sum_{i=0}^{n} \deg(F_i) - \sum_{j=1}^{s} \deg(X_j)$.
On note par $(F_0,...,\widehat{F_i},...,F_n)$ la suite $(F_0,...,F_{i-1},F_{i+1},...,F_n)$.

Une partie I, à n éléments, de $\{1,\ldots,s\}$ est dit <u>ensemble simplicial</u> si les n faces de P, perpendiculaires aux vecteurs $\eta_i,i \in I$, se rencontrent exactement en un sommet de P et si $\det(\eta_I) = \det(\eta_i, i \in I) > 0$. A chaque ensemble simplicial I, on associe l'ouvert :

$$U_I = \{(x_1 : ... : x_s) \in \mathcal{X} \ / \ x_i = 1 \ \forall \ i \notin I\}.$$

C'est une variété affine d'anneau de coordonnées : $\mathbb{C}[X_I] = \mathbb{C}[X_i, i \in I]$. Ces ouverts forment un recouvrement (affine) de $\mathcal{X}$ lorsque I varie.

Comme l'anneau de coordonnées de U_I est un anneau de polynômes à n variables, on a besoin de n polynômes pour définir le symbole de Kronecker sur U_I. On obtient le symbole de Kronecker (affine) relatif à un polynôme F_i : $\ell^I_{F_i}$. C'est une forme $\mathbb{C}$-linéaire sur $\mathbb{C}[X_I]/\langle F_{0I}, \ldots, \widehat{F_{iI}}, \ldots, F_{nI}\rangle$ (où $F_{jI}(X_k, k \in I) = F_j(X_1,\ldots,X_s)$ avec $X_l = 1$ pour $l \notin I$).

Grâce à des résultats de compatibilité entre ces symboles de Kronecker (affines), on obtient, par recollement, la restriction, $\ell^{I_1 \cap \ldots \cap I_m}_{F_i}$, sur l'intersection de m ouverts U_{I_1}, ..., U_{I_m}, du symbole de Kronecker sur $\mathcal{X}$.

On définit ensuite le symbole de Kronecker sur $\mathcal{X}$, relatif à chaque F_i :

Définition 1 :
Si on désigne par p le nombre d'ensembles simpliciaux, on appelle **Symbole de Kronecker relatif à** F_i, l'application $\mathbb{C}$-linéaire, $\ell^{\mathcal{X}}_{F_i}$ de $S_\rho/\langle F_0,...,F_n\rangle_\rho$ vers $\mathbb{C}$ définie par :

$$\ell^{\mathcal{X}}_{F_i} = \sum_{j=1}^{p} (-1)^{j+1} \sum_{1 \leq i_1 < \ldots < i_j \leq p} \ell^{I_{i_1} \cap \ldots \cap I_{i_j}}_{F_i}.$$

Afin de pouvoir définir le *Symbole de Kronecker torique associé à* $(F_0,F_1,...,F_n)$, on a le résultat suivant, qui donne une relation entre deux Symboles de Kronecker relatifs $\ell^{\mathcal{X}}_{F_i}$ et $\ell^{\mathcal{X}}_{F_j}$ pour $i,j \in \{0,...,n\}$.

Théorème (théorème d'échange) :
Pour tout $i,j \in \{0,...,n\}$, on a : $\ell^{\mathcal{X}}_{F_i}(H) = (-1)^{i+j}\ell^{\mathcal{X}}_{F_j}(H)$.

Définition 2 :
On appelle **Symbole de Kronecker torique** sur $\mathcal{X}$, l'application $\mathbb{C}$-linéaire, $\ell^{\mathcal{X}}$ de $S_\rho/\langle F_0,...,F_n\rangle_\rho$ vers $\mathbb{C}$ définie par :

$$\ell^{\mathcal{X}}(H) = (-1)^i\ell^{\mathcal{X}}_{F_i}(H), \text{ pour } i \in \{0,...,n\}.$$

Notons que $\ell^{\mathcal{X}}(H)$ dépend de l'ordre des variables $[X_1,\ldots,X_s]$.

Propriétés :
Loi de transformation
Soient $F = (F_0,...,F_n)$ et $G = (G_0,...,G_n)$ deux suites de polynômes telles que, pour tout $i \in \{0,...,n\}$, on a : $G_i = \sum_{j=0}^{n} A^i_j F_j$. On note D le déterminant de la matrice de transformation $((A^i_j)_{\ 0\leq i,j\leq n})$, alors, pour tout polynôme multihomogène H de multidegré critique ρ, on a : $\ell^{\mathcal{X}}(H;F) = \ell^{\mathcal{X}}(DH;G)$.

Valeur au Jacobien torique
Le Jacobien torique de $F = (F_0,\ldots,F_n)$ est, par définition, le déterminant :

$$J(F) = \frac{1}{\det(\eta_I)\prod_{j\notin I} x_j}\begin{vmatrix} F_0 & ... & F_n \\ \partial F_0/\partial x_{i_1} & ... & \partial F_n/\partial x_{i_1} \\ & ... & \\ \partial F_0/\partial x_{i_n} & ... & \partial F_n/\partial x_{i_n} \end{vmatrix}.$$

Il ne dépend pas de l'ensemble simplicial choisi $I = \{i_1,\ldots,i_n\}$.

La valeur du Symbole de Kronecker torique au Jacobien torique est égale au volume normalisé du polytope P, c'est-à-dire :

$$\ell^{\mathcal{X}}(J(F);F) = n!\ Vol(P).$$

Références

[1] *E. Cattani, D. Cox, A. Dickenstein*, Residues in Toric Varieties.
Compositio Mathematica, Vol. 108, pages 35 - 76 (1997)

[2] *M.F. Coste Roy, A. Szpirglas*, Symboles de Kronecker affine, projectif et dans le tore.
Prépublication IRMAR (1998)

[3] *P. Griffiths, J. Harris*, Principles of Algebraic Geometry.
Wiley, New York (1978)

Herimampita Ratsimbazafy
Département de Maths - U.F.R. Sciences
6, Avenue Le Gorgeu
29 285 Brest Cedex
France
ratsimba@univ-brest.fr