Existence et unicité de solution pour le problème aux limites associé à certains systèmes hyperboliques de lois de conservation

Nawel ZAIDI

Résumé: Les systèmes de TEMPLE sont des systèmes hyperboliques de lois de conservation dont les ondes de choc et de raréfaction coincident, ils ont été introduits par B. TEMPLE (1983).
Dans ce travail, on montre d'abord l'existence de solutions faibles entropiques pour le problème aux limites associé à ces systèmes dans le cas d'une bande $(a,b)\times\mathbb{R}^+$,et ce par l'approximation parabolique.
On considère ensuite le cas particulier du système d'électrophorèse, X.GENG et C.M. DAFERMOS ont montré l'unicité de la solution pour le problème de Cauchy qui lui est associé par la méthode des caractéristiques généralisées. La positivité de ses valeurs propres nous permet d'adapter cette méthode dans le cas d'un demi plan $(-\infty,b)\times\mathbb{R}^+$ avec une donnée au bord constante; par la suite on utilise ces derniers résultats pour montrer l'unicite de la solution dans le cas d'une bande$(a,b)\times\mathbb{R}^+$, pour ce faire on introduit un prolongement et on montre que le prolongement est unique.

1.Introduction: Soit le système non linéaire de deux équations aux dérivées partielles

$$(S) \qquad \partial_t U + \partial_x F(U) = 0$$

où F est un champ de vecteurs de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$, U est une fonction vectorielle inconnue de $(a,b)\times\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}^2$
(S) est dit hyperbolique si la matrice $\nabla F(U)$ admet deux valeurs propres distinctes, il sera dit de TEMPLE si ses ondes de choc et de raréfaction coincident.
Définition: *On dira que la k-onde de choc coincide avec la k-onde de raréfaction dans un ensemble U,si l'ensemble d'Hugoniot de tout point de U contient U*
Ces systèmes apparaissent dans l'étude de simulation des réservoirs d'hydrocarbures, en élasticité et en chromatographie à multicomposants. En voici certains exemples:

$$(S_1)\begin{cases}\partial_t u + \partial_x(u\Phi(u,v)) = 0\\ \partial_t v + \partial_x(v\Phi(u,v)) = 0\end{cases}$$

$$(S_2)\begin{cases}\partial_t u + \partial_x(\dfrac{1}{1+u+v}) = 0\\ \partial_t v + \partial_x(\dfrac{kv}{1+u+v}) = 0\end{cases}$$

$$(S_3)\ \partial_t U_i + \partial_x\left(\frac{a_i U_i}{U_1+...+U_n}\right) \quad i=1,...,n$$

(S_1)apparait dans le problème de simulation des réservoirs d'hydrocarbures et en théorie de l'élasticité, (S_2) apparait dans l'étude de deux composants chromatographiques. (S_3) est le système d'electrophorèse, il modélise la séparation de n composants ioniques.

D. Serre (1987) a étudié l'existence de solutions pour le problème de Riemann et de Cauchy associés à ce genre de systèmes avec donnée initiale à variations bornées, il a montré que la solution est à variations totales décroissantes (résultat remarquable car habituellement propre aux équations).

C.M. Dafermos et X. Geng (1991) ont étudié le problème de Cauchy associé au système d'électrophorèse; par la suite en s'inspirant de leur travail A. Heibig (1994) a généralisé le résultat de l'unicité de la solution pour le problème de Cauchy associé à un système quelconque de la classe de Temple.

2. Existence de solutions faibles pour le problème aux limites associé à un système de Temple : On considère dans unebande $(a,b) \times \mathbb{R}^+$ le problème aux limites suivant:

$$\begin{cases} \partial_t U + \partial_x F(U) = 0, & (x,t)\,]a,b[\times \mathbb{R}^+ \quad (1.1) \\ U(x,0) = U_0(x) & x \in \,]a,b[\quad (1.2) \\ U \text{vérifie une certaine condition au bord sur } \{a,b\} \times \mathbb{R}^+ & \quad (1.3) \end{cases}$$

où

.F est un champ de vecteurs de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$

.U_0 est une fonction vectorielle définie de (a,b) dans $\mathbb{R}^2$

.U est une fonction vectorielle de $(a,b) \times \mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}^2$

Le système de deux lois de conservation est supposé hyperbolique et appartenant à la classe de Temple.

On montre le résultat suivant :

Théorème: *Sous les conditions :*

·*F est de classe C^2et $\|DF\|$borné*

·*$U_0 \in (BV(a,b))^2 \bigcap (L^\infty(a,b))^2$*

Le problème (1.1),(1.2) *admet dans l'espace* $(BV((a,b) \times \mathbb{R}^+))^2$ *une solution faible entropique U*

la condition au bord est formulée comme suit:

$$\begin{cases} \Psi(U(a,t)) - \Psi(U_1) - \nabla\Phi(U_1)(F(U(a,t) - F(U_1) \leq 0 \\ \Psi(U(b,t)) - \Psi(U_2) - \nabla\Phi(U_2)(F(U(b,t) - F(U_2) \leq 0 \end{cases} \quad \mathit{(1.4)}$$

pour tout couple (Φ,Ψ) *entropie- flux d'entropie.*

3. Unicité de la solution pour le problème aux limites associé à l'électrophorèse dans $(-\infty,b) \ \times \mathbb{R}^+$:On considère le système d'electrophorèse, un système particulier de la classe de Temple, dans $(-\infty,b) \times\mathbb{R}^+$ sous la forme: $\begin{cases} \partial_t u - \partial_x \left(\dfrac{v}{u}\right) = 0 \\ \partial_t v - \partial_t \left(\dfrac{1}{u}\right) = 0 \end{cases}$

On montre le résultat suivant:

Théorème: *Sous les conditions :*

i)(u_0,v_0) *est une fonction à variations bornées et à petites oscillations*

i) l'invariant de Riemann induit satisfait une condition unilatérale de Lipschitz:
$\dfrac{z_0(y) - z_0(x)}{y - x} \geq -\alpha \quad pour x < y < b$

alors le problème (S) défini par :

$$\begin{cases} \partial_t u - \partial_x \left(\dfrac{v}{u}\right) = 0 & (x,t) \in (-\infty,b) \times \mathbb{R}_+^* \\ \partial_t v - \partial_t \left(\dfrac{1}{u}\right) = 0 & (x,t) \in (-\infty,b) \times \mathbb{R}_+^* \\ (u,v)\,(x,0) = (u_0,v_0)(x,0) & x \in (-\infty,b) \end{cases}$$

admet une unique solution entropique à variations bornées.

4. Unicité de la solution pour le problème aux limites associé à l'électrophorèse dans $(a,b) \times \mathbb{R}^+$

Soit (E) le problème aux limites associé à l'électrophorèse dans $(a,b) \times \mathbb{R}^+$

$$(E) \begin{cases} \partial_t u - \partial_x \left(\dfrac{v}{u}\right) = 0 & (x,t) \in (a,b) \times \mathbb{R}_+^* \\ \partial_t v - \partial_t \left(\dfrac{1}{u}\right) = 0 & (x,t) \in (a,b) \times \mathbb{R}_+^* \\ (u,v)\,(x,0) = (u_0,v_0)(x) & x \in (a,b) \\ (u,v)\,(a,t) = (u_1,v_1)(t) & t \in \mathbb{R}^+ \end{cases}$$

On montre le théorème suivant :

Théorème : *Sous les hypothèses*

i)(u_0,v_0) *est une fonction à variations bornées à petites oscillations, et l'invariant de Riemann induit vérifie:*

$$\frac{z_0(y) - z_0(x)}{y - x} \geq -\alpha$$

ii)(u_1,v_1) *est un vecteur constant*

le problème (E)*admet une unique solution à variations bornées.*

Références

[1] *C. BARDOS, A-Y. LEROUX, J-C. NEDELC*, First order quasilinear equations with boundary conditions, comm. in. P.D.E, 4(9), 1017-1034, 1979

[2] *C-M. DAFERMOS, X. GENG*, Generalized characteristics uniqueness and regularity of solutions in a hyperbolic system of conservation laws, Ann. Inst. Henri Poincaré, Vol. 8, n° 3-4, 1991, pp 231 -269

[3] *F. DUBOIS, P. LE FLOCH*, Boundary conditions for non linear hyperbolic systems of conservation laws, J. Diff. Eqts, Vol. 70, 1987, pp 111-131

[4] *A. HEIBIG*, Existence and uniqueness of solutions for some hyperbolic systems of conservation laws, Arch. Rational Mechanics and analysis, 1994, pp 79-101.

[5] *D. SERRE*, Solutions à variations bornées pour certains systèmes hyperboliques de lois de conservation, J. Diff. Eqts. Vol. 68, 1987, pp 137-169.

[6] *B. TEMPLE*, Systems of conservation laws with invariant submanifolds, transaction of the A.M.S, vol.280, 1983, pp781-795.

Nawel ZAIDI
INI-Institut d'informatique
BP. 68M
Oued Smarr-16270-Alger
Algérie
n_zaidi@ini.dz