

STABILITÉ DES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES LINÉAIRES À RETARD ET FRACTIONNAIRES

Catherine Bonnet

Ce travail s'inscrit dans un contexte d'automatique [5], science qui s'intéresse à la modélisation, l'analyse et la commande de processus évoluant dans le temps. Cette science est en fait encore bien souvent méconnue, probablement parce que, née d'un besoin existant au niveau de secteurs applicatifs très variés, elle intervient au carrefour de nombreuses disciplines (mathématiques, physique, chimie, biologie...)

Les notions fondamentales de l'automatique se situent au sein de la théorie des systèmes, théorie de la commande, traitement du signal, analyse statistique...

Nous nous proposons ici de décrire quelques concepts fondamentaux de la théorie des systèmes et de la commande avant de présenter des techniques permettant le contrôle robuste de systèmes linéaires gouvernés par des équations différentielles à retards ou fractionnaires.

1. Quelques concepts fondamentaux en automatique

Un système dynamique (contrôlé) est un modèle de processus évoluant dans le temps, soumis à des signaux extérieurs appelés entrées.

On trouve dans la littérature deux grandes classes de modèles :

– les modèles équations d'état qui sont donnés sous la forme d'équations différentielles (systèmes de dimension finie) ou équations aux dérivées partielles (systèmes de dimension infinie) reliant les diverses variables décrivant le phénomène (appelées variables d'état — elles sont de dimension finie ou infinie), les variables extérieures (entrées) et les variables de sortie (fonctions des variables d'état et d'entrée).

Travail réalisé en collaboration avec Jonathan R. Partington, université de Leeds, UK.

Par exemple, un système linéaire stationnaire de dimension finie à entrée et sortie scalaire est décrit par :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) \\ x(0) \quad \text{donné} \end{cases}$$

où $x(t) \in \mathbb{R}^n$ est la variable d'état, $u(t) \in \mathbb{R}$ est la variable d'entrée, $y(t) \in \mathbb{R}$ est la variable de sortie.

– les modèles entrée-sortie qui sont donnés sous la forme d'un opérateur G (c'est un opérateur de convolution dans le cas linéaire) agissant sur le signal d'entrée et fournissant le signal de sortie.

Le même système que ci-dessus peut être décrit par :

$$(1) \quad y = Gu = g * u,$$

où $u \in U$ (espace des entrées) et $y \in Y$ (espace des sorties).

Ces deux modes de description donnent lieu à des techniques très différentes d'analyse des systèmes et des liens entre les divers résultats sont souvent impossible à obtenir dans le cas de la dimension infinie.

L'approche entrée-sortie a l'avantage d'unifier les cadres d'étude des systèmes linéaires et non linéaires, de dimension finie et infinie, et surtout elle permet une analyse de la robustesse, notion sur laquelle nous reviendrons plus tard.

Dans toute la suite, nous nous limiterons au cas des systèmes linéaires causaux (la sortie ne dépend que des entrées passées) *i.e.* le noyau de convolution g est tel que $g(t) = 0$ pour $t < 0$.

Un concept fondamental en automatique est celui de *boucle fermée*. En effet, le problème de commande basique est du type : déterminer un signal d'entrée u tel que le signal de sortie y soit égal à y_d (sortie désirée). Il est clair qu'une commande du type $u = "G^{-1}"y_d$ où " G^{-1} " est un pseudo-inverse de G n'est pas robuste : à la moindre perturbation agissant sur le système, cette commande n'est plus adéquate. Il est alors proposé le schéma suivant :

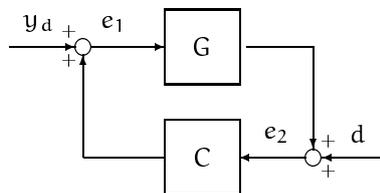


FIGURE 1. boucle fermée standard

où le problème est de déterminer un contrôleur (un opérateur de convolution) C réalisant $e_2 - d = y_d$ (problème de poursuite). On s'aperçoit alors qu'un minimum à

demander à la boucle fermée (avant même de réaliser $e_2 - d = y_d$) c'est d'être stable, *i.e.* lorsque les signaux d'entrée y_d et d (y_d est le signal de référence et d un signal de perturbation) sont bornés dans U , les signaux de sortie e_1 et e_2 doivent être bornés dans Y .

On a la relation entrée-sortie suivante :

$$\begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (I - GC)^{-1} & C(I - GC)^{-1} \\ G(I - GC)^{-1} & (I - GC)^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_d \\ d \end{pmatrix}$$

U et Y sont a priori des espaces quelconques mais la plupart du temps, les normes considérées sur ces espaces sont des normes L^p ($1 \leq p \leq +\infty$).

Stabilité

On dit que le système G défini par (1) est stable de L^p dans L^q si

$$\|G\| = \sup_{\substack{u \in L^p \\ u \neq 0}} \frac{\|Gu\|_{L^q}}{\|u\|_{L^p}} < +\infty$$

Le cas le plus répandu dans la littérature est $p = q = 2$, initialement parce que dans les applications on considère souvent spontanément que les signaux sont d'énergie finie mais aussi parce que, offrant les avantages d'un cadre Hilbertien, il simplifie l'analyse...

Nous regardons ici le cas $p = q = +\infty$ qui correspond à la BIBO-stabilité (Bounded Input-Bounded Output), il est utile dans de nombreuses applications (par exemple lorsqu'on veut poursuivre un signal de type sinusoïdal).

Les normes de ces opérateurs de convolution sont difficiles à calculer, on peut heureusement les relier à des normes de la fonction de transfert $\mathcal{L}g$ (*i.e.* transformée de Laplace de g) du système. On a :

$$\|G\|_{\langle 2 \rangle} = \|\mathcal{L}g\|_{H_\infty}$$

où $H_\infty = \{\text{fonctions analytiques et bornées dans } \{\Re s > 0\}\}$ et

$$\|G\|_{\langle \infty \rangle} = \|\mathcal{L}g\|_{\hat{\mathcal{A}}}$$

où $\hat{\mathcal{A}} = \{\mathcal{L}g, g \in \mathcal{A}\}$ et \mathcal{A} (algèbre de Wiener) désigne l'espace des distributions de la forme

$$g(t) = g_a(t) + \sum_{i=0}^{\infty} g_i \delta(t - t_i),$$

où $t_i \in [0, \infty[$, $0 \leq t_0 < t_1 < \dots$, $\delta(t - t_i)$ est une fonction de Dirac retardée, $g_i \in \mathbb{C}$, $g_a \in L^1$ et $\sum_{i=0}^{\infty} |g_i| < \infty$.

L'inégalité de Young :

$$\|f * g\|_r \leq \|g\|_q \|f\|_p \quad \text{avec} \quad \frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} - 1, \quad 1 \leq p, q, r \leq \infty$$

permet de montrer que pour tout $1 \leq p \leq +\infty$,

$$\|G\|_{\langle p \rangle} \leq \|G\|_{\langle 1 \rangle} = \|G\|_{\langle \infty \rangle} = \|g\|_{\mathcal{A}}$$

i.e. que la BIBO-stabilité, équivalente à la L^1 -stabilité, est plus forte que toutes les L^p -stabilité ($1 < p < +\infty$) et en particulier que la L^2 -stabilité appelée aussi stabilité H_∞ . Fait que l'on retrouve dans l'inclusion

$$\widehat{\mathcal{A}} \subset \{\text{fonctions analytiques et bornées dans } \{\Re s > 0\} \text{ qui sont continues sur l'axe imaginaire étendu (i.e. incluant le point à l'infini)}\}$$

Remarquons qu'en dimension finie, ces différentes notions de stabilité sont équivalentes.

Comme nous l'avons dit, nous ne considérons que des systèmes causaux. En dimension finie, cela implique que le degré du numérateur de la fonction de transfert est inférieur ou égal au degré de son dénominateur : on dira alors que la fonction est propre. Elle est strictement propre dans le cas où on a une inégalité stricte.

Dans le cas non rationnel, on définit ¹ :

G analytique dans $\{\Re s > 0\}$ et continue sur $i\mathbb{R}$ est dite propre sur $\{\Re s \geq 0\}$ si, pour ρ suffisamment grand, $\sup_{\{\Re s \geq 0, |s| \geq \rho\}} |G(s)| < \infty$.

G analytique dans $\{\Re s > 0\}$ et continue sur $i\mathbb{R}$ est dite strictement propre sur $\{\Re s \geq 0\}$ si $\lim_{\rho \rightarrow \infty} \left(\sup_{\{\Re s \geq 0, |s| \geq \rho\}} |G(s)| \right) = 0$.

Stabilisation

Nous avons vu que le problème de stabilisation était crucial, sa résolution repose sur l'existence de factorisations copremières du système (nous donnons la définition dans $\widehat{\mathcal{A}}$, celle dans H_∞ est bien sûr analogue).

On dit que (N, D) est une factorisation copremière de G dans $\widehat{\mathcal{A}}$ si $G = ND^{-1}$, $D \neq 0$, $N, D \in \widehat{\mathcal{A}}$ et il existe $X, Y \in \widehat{\mathcal{A}}$ tel que $-NX + DY = 1$ (X et Y sont appelés les facteurs de Bézout du système).

Les algèbres de Banach $\widehat{\mathcal{A}}$ et H_∞ ne sont pas des domaines de Bézout (*i.e.* tout système n'admet pas nécessairement de factorisation copremière dans $\widehat{\mathcal{A}}$ ou H_∞ : pour N, D donnés et vérifiant $G = ND^{-1}$, il n'est pas toujours possible de trouver X et Y vérifiant $-NX + DY = 1$).

Cela n'est pas vraiment un handicap puisque G est stabilisable dans $\widehat{\mathcal{A}}$ par un contrôleur admettant une factorisation copremière si et seulement si G admet une factorisation copremière (dans H_∞ , on a même le résultat plus fort suivant : G est stabilisable dans H_∞ si et seulement si G admet une factorisation copremière).

Un couple (N, D) étant donné, leur coprimalité dans $\widehat{\mathcal{A}}$ est caractérisée par la condition nécessaire et suffisante $\inf_{\{\Re s \geq 0\}} (|N(s)| + |D(s)|) > 0$ qui est assez facile à manipuler, on ne dispose pas d'un tel outil dans H_∞ .

¹Dans toute la suite, nous ferons un abus de notation entre l'opérateur G et le transfert du système $\mathcal{L}g$.

Si G admet une factorisation copremière dans $\hat{\mathcal{A}}$, il est alors possible de déterminer une paramétrisation de l'ensemble de tous les contrôleurs (admettant une factorisation copremière) BIBO-stabilisants (paramétrisation de Youla [2]) :

$$C = \frac{X + DQ}{Y + NQ} \text{ où } Q \text{ est un paramètre libre appartenant à } \hat{\mathcal{A}}.$$

Il est clair qu'un contrôleur n'admettant pas de factorisation copremière est beaucoup moins intéressant car il ne permet pas une analyse très poussée : il n'est pas facile d'étudier les normes de $(I - GC)^{-1}$, $C(I - GC)^{-1}$, $G(I - GC)^{-1}$ alors qu'il est plus aisé de considérer celles de $(Y + NQ)D$, $(X + DQ)D$ et $(Y + NQ)N$.

Robustesse

Introduisons à présent la dernière notion fondamentale intervenant dans notre étude, celle de robustesse.

Compte-tenu des erreurs inévitables de modélisation et de la nécessité de traiter parfois une approximation du modèle lorsque celui-ci est trop difficile à appréhender, il est souhaitable que le contrôleur C déterminé pour stabiliser G soit aussi capable de stabiliser \tilde{G} lorsque \tilde{G} est proche de G et soit tel que la réponse de la boucle fermée associée à G soit proche de la réponse de celle associée à \tilde{G} .

Vidyasagar [2] a défini une topologie permettant de formaliser cette idée : un voisinage $B(N, D; \eta)$ de $G = ND^{-1}$, où (N, D) est une factorisation copremière de G , est défini comme l'ensemble des G_1 admettant une factorisation copremière dans $\hat{\mathcal{A}}$, $G_1 = N_1 D_1^{-1}$ telle que

$$\left\| \begin{pmatrix} N - N_1 \\ D - D_1 \end{pmatrix} \right\| < \eta.$$

Dans cette topologie, deux systèmes G_1 et G_2 sont « proches » s'ils possèdent des factorisations copremières (N_1, D_1) et (N_2, D_2) tel que $\|(N_1, D_1) - (N_2, D_2)\|_{\hat{\mathcal{A}}}$ soit « petite » i.e. G_1 et G_2 sont « proches » si leurs graphes (on rappelle que $G_T(G) = \{(u, y) \in L^\infty \times L^\infty; y = Pu\} = \{(Dz, Nz), z \in L^\infty\}$) sont « proches », elle a donc été nommée topologie du graphe. C'est la topologie la plus faible dans laquelle la stabilisation par boucle fermée est robuste (i.e. la stabilisation robuste est possible si et seulement si toute variation du système est faite de manière continue dans la topologie du graphe).

Possédant une zone de robustesse, il est naturel d'essayer de la mesurer : on montre que la marge de robustesse $b(G, C)$ d'un contrôleur C stabilisant G (au sens BIBO) est égale à

$$\frac{1}{\left\| \begin{pmatrix} X + DQ \\ Y + NQ \end{pmatrix} \right\|_\infty}.$$

Cela signifie que si C stabilise G et si $\tilde{G} = \frac{N + \Delta N}{D + \Delta D}$ avec $\|(\Delta N, \Delta D)\|_{\hat{\mathcal{A}}} < b(G, C)$ alors C stabilise \tilde{G} .

Nous voyons donc clairement que le paramètre libre Q de $\hat{\mathcal{A}}$ peut être utilisé pour optimiser cette marge de robustesse : on regarde alors

$$\frac{1}{\inf_{Q \in \hat{\mathcal{A}}} \left\| \begin{pmatrix} X + DQ \\ Y + NQ \end{pmatrix} \right\|_{\infty}}.$$

Puisque

$$\inf_{Q \in H_{\infty}} \left\| \begin{pmatrix} X + DQ \\ Y + NQ \end{pmatrix} \right\|_{\infty}$$

est atteint pour un $Q \in \hat{\mathcal{A}}$, on a

$$b^{\text{opt}}(G) = \frac{1}{\inf_{Q \in H_{\infty}} \left\| \begin{pmatrix} X + DQ \\ Y + NQ \end{pmatrix} \right\|_{\infty}}.$$

Ce problème d'optimisation H_{∞} peut être résolu par des algorithmes disponibles en matlab ou scilab lorsqu'on est en dimension finie mais rien n'est disponible à ce jour en dimension infinie.

On propose alors la procédure suivante :

- Trouver une suite $(G_n)_{n \geq 0}$ de fonctions de transfert de dimension finie convergent vers G dans la topologie du graphe (cela est possible puisque les fonctions approximables en norme H_{∞} ou $\hat{\mathcal{A}}$ par des fonctions rationnelles stables sont exactement celles qui sont analytiques et bornées dans $\{\Re s > 0\}$ et qui sont continues sur l'axe imaginaire étendu).
- Calculer les factorisations copremières (N_n, D_n) et facteurs de Bézout (X_n, Y_n) de G_n .
- Résoudre le problème d'optimisation H_{∞} de dimension finie et déterminer Q_n^{opt} :

$$\left\| \begin{pmatrix} X_n \\ Y_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} D_n \\ N_n \end{pmatrix} Q_n^{\text{opt}} \right\|_{\infty} = \inf_{Q_n \in H_{\infty}} \left\| \begin{pmatrix} X_n \\ Y_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} D_n \\ N_n \end{pmatrix} Q_n \right\|_{\infty}.$$

Le cadre d'étude $\hat{\mathcal{A}}$ permet d'avoir des résultats qui justifient cette procédure. En effet, si la plus grande valeur singulière de $D^*X + N^*Y$ est de multiplicité égale à un, nous avons $Q_n^{\text{opt}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} Q^{\text{opt}}$, $b^{\text{opt}}(G_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} b^{\text{opt}}(G)$ et $C_n^{\text{opt}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} C^{\text{opt}}$ (dans la topologie du graphe). Nous ne disposons pas de résultats similaires dans le cadre H_{∞} .

2. Stabilisation robuste de systèmes à retards

Les systèmes à retards [6] représentent une classe de systèmes de dimension infinie largement utilisée pour la modélisation et l'analyse des phénomènes de transport et de propagation (de matière, d'énergie ou d'information) mais aussi des temps de calcul liés au traitement de l'information.

Ils apparaissent ainsi naturellement dans la modélisation de systèmes rencontrés dans de nombreux domaines : en téléopération, on rencontre des retards fluctuants dus aux lignes de transmission, aux liaisons internet ; dans les architectures électroniques embarquées, les retards sont dus à l'ordonnancement des tâches dans les réseaux embarqués. Enfin, la nature a elle-même distribué des retards : en épidémiologie, dans l'analyse de la dynamique de populations bactériennes par exemple, ils modélisent le temps de reproduction ou la durée de vie ; dans le problème de régulation du système cardio-vasculaire par le système nerveux autonome, ils modélisent le fait que la voie sympathique est plus lente que la voie parasympathique.

Notre intérêt pour les systèmes à retards a été suscité par un problème de contrôle moteur. Dans ce cas, les retards intervenaient entre admission et échappement des gaz et lors du transport du gaz jusqu'à la sonde. La simplicité de la modélisation du moteur devait être compensée par la robustesse de la commande.

Soumise ainsi à des retards, une équation différentielle du type

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

ayant une fonction de transfert rationnelle égale à $(\mathcal{L}g)(s) = C(sI - A)^{-1}B + D$ peut être transformée en une équation différentielle du type

$$(S) \begin{cases} \dot{x}(t) = \sum_{i=0}^k A_i x(t - t_i) + \sum_{i=0}^m B_i u(t - \tau_i) \\ y(t) = \sum_{i=0}^l C_i x(t - \sigma_i) + \sum_{i=0}^p d_i u(t - \nu_i) \\ x_0 \in L^2(-T, 0), \quad \text{où } T = \max_i t_i \end{cases}$$

ayant pour fonction de transfert

$$G(s) = \left(\sum_{i=0}^m B_i e^{-s\tau_i} \right) \left(sI - \sum_{i=0}^k A_i e^{-st_i} \right)^{-1} \left(\sum_{i=0}^l C_i e^{-s\sigma_i} \right) + \sum_{i=0}^p d_i e^{-s\nu_i},$$

fonction qui n'est plus rationnelle.

Ici, nous considérons les fonctions de transfert du type :

$$G(s) = \frac{\sum_{i=0}^{n_2} q_i(s) e^{-\beta_i s}}{\sum_{i=0}^{n_1} p_i(s) e^{-\gamma_i s}}$$

où $0 = \gamma_0 < \gamma_1 \cdots < \gamma_{n_1}$, $0 \leq \beta_0 < \beta_1 \cdots < \beta_{n_2}$, les p_i sont des polynômes de degré δ_i et $\delta_i < \delta_0$ pour $i \neq 0$ et les q_i sont des polynômes de degré $d_i < \delta_0$ pour chaque i .

De tels systèmes sont appelés systèmes à retards de type retardé.

Il est bien connu [1] que ces systèmes ne possèdent qu'un nombre fini de pôles dans chaque demi-plan droit et leur BIBO-stabilité peut être caractérisée de façon très simple (on retrouve la condition nécessaire et suffisante de la dimension finie) : G est BIBO-stable si et seulement si G n'a pas de pôles dans $\{\Re s \geq 0\}$.

La stabilité étant caractérisée, le problème qui se pose est donc la détermination de N , D , X et Y .

Factorisation copremière [3]

Il existe une fonction rationnelle $r(s)$ telle que $\left(\frac{h_2}{r(s)}, \frac{h_1}{r(s)}\right)$ soit une factorisation copremière de G . Si h_1 et h_2 n'ont pas plus de δ_0 zéros communs instables (*i.e.* à partie réelle positive ou nulle) alors r peut être un polynôme.

En particulier si h_1 et h_2 n'ont pas de zéros instables communs, $N(s) = \frac{h_2}{(s+1)^{\delta_0}}$ et $D(s) = \frac{h_1}{(s+1)^{\delta_0}}$ forment une factorisation copremière de $G(s)$.

Facteurs de Bézout [3]

Supposons que h_1 possède m zéros instables (comptés avec leur multiplicité) qui ne soient pas zéros de h_2 .

$$\text{Définissons } X(s) = \frac{-\mu(s)}{u(s)} \text{ et } Y(s) = \frac{r(s) - \frac{\mu(s)h_2(s)}{u(s)}}{h_1(s)},$$

où μ est un polynôme de degré $m - 1$ choisi tel que

$$\left(r(s) - \frac{\mu(s)h_2(s)}{u(s)}\right)^{(k)} = 0$$

en $s = \sigma$ pour $k = 0, \dots, m_i - 1$ si σ est un zéro de multiplicité $m_i \geq 1$, u est un polynôme choisi tel que son inverse soit dans $\hat{\mathcal{A}}$ et X soit propre ($\deg u \geq \deg \mu$).

Alors, X and Y sont des facteurs de Bézout correspondant à la factorization copremière $\left(\frac{h_2(s)}{r(s)}, \frac{h_1(s)}{r(s)}\right)$ de G sur $\hat{\mathcal{A}}$.

L'idée de la preuve est la suivante : Nous prenons $Y = \frac{1 + NX}{D}$ et cherchons X dans $\hat{\mathcal{A}}$ tel que les zéros instables de D (i.e. les zéros instables de h_1) soient aussi zéros de $1 + NX$, de façon à ce que Y soit analytique dans $\{\Re s > 0\}$.

Exemple 1. — Si $G(s) = \frac{e^{-sT}}{s - \sigma}$ et $\gamma = \sqrt{1 + \sigma^2}$, on obtient

$$N(s) = \frac{e^{-sT}}{s + \gamma}, D(s) = \frac{s - \sigma}{s + \gamma},$$

$$X(s) = -e^{T\sigma}(\sigma + \gamma) \text{ et } Y(s) = 1 + (\sigma + \gamma) \frac{1 - e^{-T(s-\sigma)}}{s - \sigma}.$$

3. Stabilisation robuste de systèmes fractionnaires

De nombreuses EDP ont une représentation fréquentielle faisant intervenir des polynômes fractionnaires en s et des exponentielles de puissances fractionnaires de s au lieu des seuls polynômes et exponentielles « standards ». Par exemple, l'équation de la chaleur avec conditions de Neumann aux bords admet $G(s) = \frac{\cosh \sqrt{s}x_0}{\sqrt{s} \sinh \sqrt{s}}$, où x_0 est un nombre compris strictement entre 0 et 1, comme fonction de transfert.

D'autres exemples de telles fonctions, comme par exemple $G(s) = \frac{\exp(-\alpha\sqrt{s})}{s}$ (où $\alpha > 0$ est une constante), apparaissent dans l'analyse de problèmes d'électricité (lignes de transmission).

Ici, nous allons regarder les systèmes dont la fonction de transfert est du type :

$$(2) \quad G(s) = \frac{q_0(s) + \sum_{i=1}^{i=n_2} q_i(s) e^{-\beta_i s^\tau}}{p_0(s) + \sum_{i=1}^{i=n_1} p_i(s) e^{-\gamma_i s^\tau}} = \frac{h_2(s)}{h_1(s)}$$

où τ est un réel compris strictement entre 0 et 1, les p_i sont de la forme $\sum_{k=0}^{l_i} a_k s^{\alpha_k}$ avec $\alpha_k \in \mathbb{R}^+$ et les q_i sont de la forme $\sum_{k=0}^{m_i} b_k s^{\delta_k}$ avec $\delta_k \in \mathbb{R}^+$.

Nous imposons la condition $\deg p_0 > \deg q_0$ de façon à ne traiter que les systèmes strictement propres. Et nous supposons que h_2 et h_1 n'ont pas de zéros communs dans $\{\Re s \geq 0\} \setminus 0$.

Nous dirons que G a un pôle d'ordre fractionnaire ν en zéro si $\lim_{s \rightarrow 0} |G(s)| = \infty$ et ν est le plus petit réel positif tel que $\lim_{s \rightarrow 0} |s^\nu P(s)|$ soit fini et non nul.

L'analyse est bien sûr différente de celle des systèmes à retards à cause de la présence d'un point de branchement en $s = 0$. Par exemple, G est méromorphe dans un voisinage de chaque point dans $\{\Re s \geq 0\} \setminus 0$ mais en général G n'est pas méromorphe autour de l'origine et il n'existe pas de bande à gauche de l'axe imaginaire

dans laquelle G pourrait être analytique, ce qui était le cas pour les systèmes à retards. On peut toutefois montrer que G est méromorphe dans $\mathcal{D} = \{s \in \mathbb{C}, s \neq 0, \text{ tel que } |\arg s| < a\pi\}$ avec $\frac{1}{2} < a < 1$ et $a\pi < \frac{1}{2}$ (i.e. h_1 a un nombre fini de zéros dans \mathcal{D}).

Cela nous permet de caractériser ici encore très simplement la *stabilité* de ces systèmes :

G est BIBO-stable si et seulement si G n'a pas de pôles (y compris d'ordre fractionnaire) dans $\{\Re s \geq 0\}$.

Ce résultat s'obtient par l'analyse du comportement de G et G' (afin d'utiliser le lemme de Hardy-Littlewood) en 0 et à l'infini.

Factorisation copremière [4]

Une factorisation copremière peut ensuite être donnée :

$$N(s) = \frac{(s+1)^{[\mu]}(s^{\{\mu\}}+1)h_2(s)}{s^\mu(s+1)^{[\gamma]}(s^{\{\gamma\}}+1)}, \quad D(s) = \frac{(s+1)^{[\mu]}(s^{\{\mu\}}+1)h_1(s)}{s^\mu(s+1)^{[\gamma]}(s^{\{\gamma\}}+1)},$$

où $\gamma > 0$ caractérise le comportement de h_1 à l'infini :

$$h_1(s) = s^\gamma(c_1 + o(1)) \text{ à l'infini ,}$$

$\alpha \geq 0$ caractérise le comportement de h_1 en zéro :

$$h_1(s) = s^\alpha(c_1 + o(1)) \text{ en zéro ,}$$

et $\mu = \min(\alpha, \beta)$ où $\beta \geq 0$ caractérise le comportement de h_2 en zéro :

$$h_2(s) = s^\beta(c_2 + o(1)) \text{ en zéro ,}$$

$[\mu]$ désigne la partie entière de μ et $\{\mu\}$ sa partie fractionnaire, de telle sorte que $\mu = [\mu] + \{\mu\}$.

Facteurs de Bézout [4]

Pour la détermination des facteurs de Bézout, l'algorithme du cas des retards peut être modifié de la façon suivante (nous traitons séparément les zéros instables non nuls et les zéros nuls) :

Soient $\sigma_1, \dots, \sigma_m$, les m zéros instables de h_1 et soit

$$T_1(s) = s^\mu(s+1)^{[\gamma]}(s^{\{\gamma\}}+1)$$

$$T_2(s) = (s+1)^{[\mu]}(s^{\{\mu\}}+1)h_2(s)$$

$$T_3(s) = (s+1)^{[\mu]}(s^{\{\mu\}}+1)h_1(s).$$

Définissons

$$Y(s) = \frac{T_1(s) + T_2(s)X(s)}{T_3(s)} \text{ et}$$

$$X(s) = \frac{f_0 + f_{\lambda_1}s^{\lambda_1} + \dots + f_{\lambda_n}s^{\lambda_n} + f_{M-m+1}s^{M-m+1} + \dots + f_M s^M}{(s+1)^M}$$

où

- $\lambda_n \in \mathbb{R}$ et $M \in \mathbb{N}$ est choisi tel que $M > \lambda_n + m$,
- les coefficients $f_0, f_{\lambda_1}, \dots, f_{\lambda_n}$ sont choisis pour que $T_1(s) + T_2(s)X(s)$ soit d'ordre fractionnaire α en zéro, et les coefficients f_{M-m+1}, \dots, f_M sont choisis pour que $T_1(\sigma_i) + T_2(\sigma_i)X(\sigma_i) = 0$ pour $1 \leq i \leq m$.

Alors (X, Y) sont les facteurs de Bézout associés à la factorisation copremière (N, D) de G .

Exemple 2. — Si $G(s) = \frac{\exp(-\sqrt{s})}{s-1}$, nous avons

$$N(s) = \frac{\exp(-\sqrt{s})}{s+1}, \quad D(s) = \frac{s-1}{s+1},$$

$$X(s) = \frac{f_0}{s+1} \text{ et } Y(s) = \frac{(s+1)^2 + f_0 \exp(-\sqrt{s})}{(s+1)(s-1)},$$

où f_0 vérifie $4 + f_0 \exp(-1) = 0$.

Conclusion

Les méthodes que nous venons de présenter peuvent être étendues au cas de systèmes mixtes (i.e. à retards et fractionnaires) permettant ainsi le contrôle robuste d'une large classe de systèmes.

Une autre classe de systèmes intéressante pour les applications est celle des systèmes à retard de type neutre (éventuellement fractionnaires) : la condition sur les degrés est $\deg p_0 \geq \deg p_i$ pour $i = 1, \dots, n_1$ (avec égalité pour au moins un polynôme p_i) et $\deg p_0 > \deg q_i$ pour $i = 0, \dots, n_2$.

Mais comme le montre l'exemple très simple $G(s) = 1/(s+1+se^{-s})$, il paraît difficile, pour de tels systèmes, de relier la position des pôles dans le plan à la BIBO-stabilité. En effet, le transfert $G(s)$ a tous ses pôles dans $\{\Re s < 0\}$ et pourtant n'est pas BIBO-stable alors que le transfert $G(s)/(s+1)^5$ est BIBO-stable. Ce dernier point montre aussi que la condition suffisante de BIBO-stabilité connue à ce jour (il existe $\alpha < 0$ tel que G n'ait pas de pôles dans $\{\Re s > \alpha\}$) n'est pas nécessaire.

Références

- [1] *R. Bellman and K. L. Cooke*, Differential-Difference Equations, Academic Press (1963).
- [2] *M. Vidyasagar*, Control System Synthesis, MIT Press (1985).
- [3] *C. Bonnet et J. R. Partington*, Bézout factors and L^1 -optimal controllers for delay systems using a two-parameter compensator scheme. IEEE Transactions on Automatic Control. **44** (1999), 1512–1521.
- [4] *C. Bonnet et J. R. Partington*, Coprime factorizations and stability of fractional differential systems. Systems and Control Letters. **41** (2000), 167–174.
- [5] <http://www.irccyn.ec-nantes.fr/gdr/>
- [6] <http://www.irccyn.ec-nantes.fr/gdr/Sar/>

Catherine Bonnet

INRIA Rocquencourt, Domaine de Voluceau, BP 105, 78 153 Le Chesnay Cedex, France.

E-mail : Catherine.Bonnet@inria.fr