

MODÉLISATION MATHÉMATIQUE DES MOUVEMENTS DE FOULE

Juliette Venel, Bertrand Maury

Résumé. — Nous proposons un modèle de mouvements de foule basé sur une approche Lagrangienne où chaque individu est pris en compte. Notre objectif principal est de modéliser des situations d'évacuation : plusieurs personnes se trouvent dans une salle contenant des obstacles et veulent se diriger vers la sortie. Nous aboutissons à une équation d'évolution où intervient un opérateur multivalué. La difficulté vient du fait que, sauf dans des cas particuliers, ce dernier n'est pas maximal monotone. Enfin, nous présentons un schéma numérique qui permet de simuler l'évacuation de milliers de personnes hors de salles de géométrie quelconque.

1. Présentation du modèle

Le modèle de mouvements de foule que nous proposons repose sur deux principes. D'une part, on définit un champ de vitesses souhaitées, correspondant au déplacement que ferait une personne seule. D'autre part, le déplacement effectif doit respecter une contrainte d'encombrement maximal.

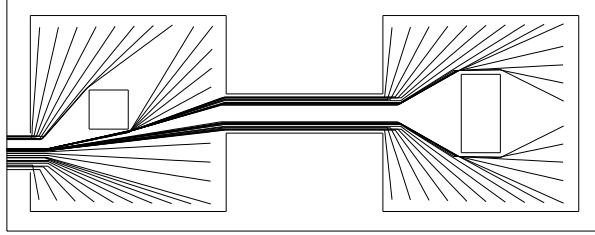
Les N individus sont assimilés à des disques de rayon r , repérés par les coordonnées de leurs centres : $\mathbf{q} = (\mathbf{q}_1, \dots, \mathbf{q}_N) \in \mathbb{R}^{2N}$. Les obstacles sont représentés par un ensemble de segments. Par souci de clarté, on ne présente que la gestion des contacts entre personnes mais il en est de même des contacts entre les personnes et les obstacles.

Les disques ne devant pas se chevaucher, le vecteur position \mathbf{q} doit appartenir à un ensemble de configurations admissibles :

$$Q_0 = \{ \mathbf{q} \in \mathbb{R}^{2N}, \forall i, j \quad D_{ij}(\mathbf{q}) = |\mathbf{q}_i - \mathbf{q}_j| - 2r \geq 0 \}.$$

Détaillons le premier point de notre modèle. On définit à tout endroit M de la salle une vitesse souhaitée $U_0(M)$, vitesse qu'aurait une personne seule, à cette position, désirent gagner la sortie. Cette vitesse est choisie en fonction de la géométrie de la pièce : un individu se déplaçant avec cette vitesse minimise la distance à parcourir pour atteindre la sortie. Pour les N personnes, le vecteur des vitesses souhaitées est :

$\mathbf{U}(\mathbf{q}) = (U_0(\mathbf{q}_1), \dots, U_0(\mathbf{q}_N)) \in \mathbb{R}^{2N}$. On a représenté ci-après une salle contenant des obstacles et le champ des vitesses souhaitées associé. On remarque tout de suite les endroits où il y aura une forte concentration de personnes.



Les personnes quand elles se déplacent, se gênent mutuellement et ne peuvent avancer avec leur vitesse souhaitée. Leur vitesse réelle, notée \mathbf{u} est différente : dès qu'il y a contact entre 2 personnes, elle ne peut qu'augmenter la distance entre elles. Pour prendre en compte ce fait, on introduit le cône des vitesses admissibles en \mathbf{q} :

$$C_{\mathbf{q}} = \{ \mathbf{v} \in \mathbb{R}^{2N}, \forall i < j \quad D_{ij}(\mathbf{q}) = 0 \Rightarrow \mathbf{G}_{ij}(\mathbf{q}) \cdot \mathbf{v} \geq 0 \},$$

où $\mathbf{G}_{ij}(\mathbf{q}) = \nabla D_{ij}(\mathbf{q})$ et son cône polaire : $N_{\mathbf{q}} = C_{\mathbf{q}}^{\circ} = \{ \mathbf{w} \in \mathbb{R}^{2N}, \forall \mathbf{v} \in C_{\mathbf{q}} \quad \mathbf{v} \cdot \mathbf{w} \leq 0 \}$. Le lemme de Farkas fournit une expression plus explicite de ce dernier :

$$N_{\mathbf{q}} = \left\{ - \sum \mu_{ij} \mathbf{G}_{ij}(\mathbf{q}), \mu_{ij} = 0 \text{ si } D_{ij}(\mathbf{q}) > 0, \mu_{ij} \geq 0 \text{ si } D_{ij}(\mathbf{q}) = 0 \right\}.$$

Dans notre modèle, la vitesse réelle \mathbf{u} est la projection euclidienne de la vitesse souhaitée \mathbf{U} sur l'ensemble des vitesses admissibles $C_{\mathbf{q}}$: $\mathbf{u} = P_{C_{\mathbf{q}}} \mathbf{U}$. Comme $C_{\mathbf{q}}$ et $N_{\mathbf{q}}$ sont des cônes mutuellement polaires, on a : $P_{C_{\mathbf{q}}} + P_{N_{\mathbf{q}}} = \text{Id}$. On peut dès lors préciser le lien entre vitesses réelle et vitesse souhaitée et aboutir à une équation d'évolution sur la position :

$$\mathbf{u} = P_{C_{\mathbf{q}}} \mathbf{U} \Leftrightarrow \mathbf{u} = (\text{Id} - P_{N_{\mathbf{q}}}) \mathbf{U} \Leftrightarrow \mathbf{u} + P_{N_{\mathbf{q}}} \mathbf{U} = \mathbf{U}.$$

On obtient alors l'équation suivante :

$$(1) \quad \dot{\mathbf{q}} + N_{\mathbf{q}} \ni \mathbf{U}(\mathbf{q}).$$

2. Résultats Théoriques

Dans des cas particuliers (personnes dans un couloir ou une seule personne dans une pièce convexe), l'ensemble des configurations admissibles Q_0 est convexe et en conséquence, on peut montrer que N est un opérateur maximal monotone. La théorie de ces opérateurs [1] permet alors de conclure à l'existence et à l'unicité d'une solution à l'équation d'évolution (1) vérifiant la condition initiale $\mathbf{q}(0) = \mathbf{q}_0 \in Q_0$. Néanmoins, dans des cas plus généraux, Q_0 n'est plus convexe et on ne peut plus appliquer la théorie précédente.

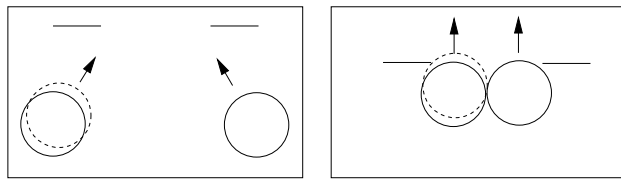
L'équation (1) traduit le fait que le vecteur \mathbf{q} doit évoluer tout en restant dans l'espace Q_0 . Ce point de vue revient à considérer le problème comme un processus de rafle introduit par Moreau [2] dans les années 70. Cependant, la présence d'un second membre \mathbf{U} et le défaut de convexité de Q_0 nous amènent à utiliser des résultats récents de L. Thibault et J. F. Edmond [5]. En effet, la bonne propriété conservée par Q_0 est celle de prox-régularité : plus précisément, il existe un réel r strictement positif tel que pour tout point $\tilde{\mathbf{q}}$ à distance $d < r$ de Q_0 , la projection de $\tilde{\mathbf{q}}$ sur Q_0 soit bien définie. On peut montrer que notre problème (1) se situe bien dans le cadre de la théorie de L. Thibault et J. F. Edmond [5] et ainsi établir le résultat suivant :

Théorème 2.1. — *On suppose \mathbf{U} Lipschitz.*

Alors quel que soit \mathbf{q}_0 dans Q_0 , il existe une unique fonction $\mathbf{q}(\cdot)$ absolument continue vérifiant :

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{q}}(t) + N(\mathbf{q}(t)) \ni \mathbf{U}(\mathbf{q}(t)) \text{ pp sur }]0, T[\\ \mathbf{q}(0) = \mathbf{q}_0 \end{cases}$$

Remarque 2.2. — Il est à noter que le module de la vitesse réelle peut être très inférieur à celui de la vitesse souhaitée. En effet, des situations d'engorgement apparaissent lorsque le champ des vitesses souhaitées est concentrant, plus précisément à divergence négative et lorsque la densité initiale des individus est suffisamment grande. Certains cas présentant des symétries parfaites peuvent même engendrer de véritables bouchons (voir dessin).



Toute brisure de symétrie dans la configuration initiale engendre la disparition de ce blocage infini. Néanmoins, il existe une certaine stabilité vis-à-vis des conditions initiales dans le sens où pour une petite perturbation de la symétrie, le temps de sortie des deux personnes sera très long.

3. Présentation du schéma numérique

On propose l'algorithme suivant pour calculer à chaque pas de temps la position des N personnes :

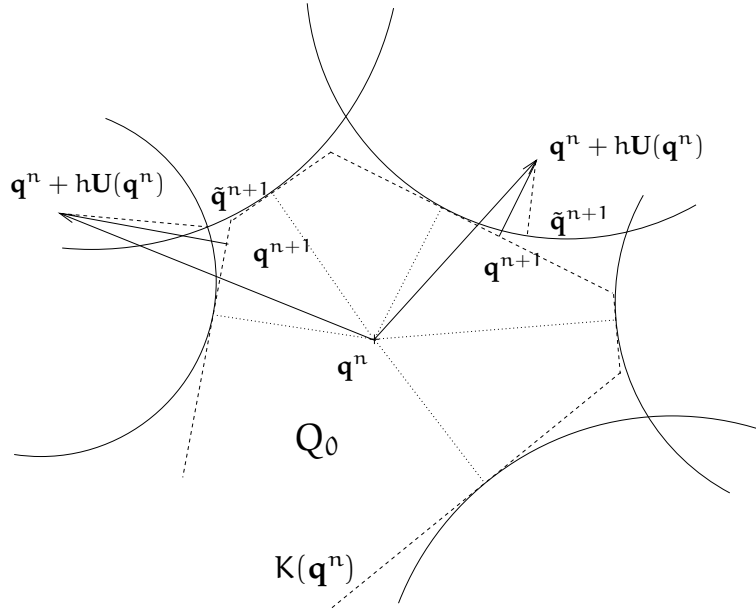
$$\begin{aligned}
 \text{Initialisation :} & \quad \mathbf{q}^0 = \mathbf{q}_0 \\
 \text{Boucle en temps :} & \quad \mathbf{q}^n \text{ connu} \\
 & \quad \mathbf{u}^n = P_{C_h(\mathbf{q}^n)}(\mathbf{U}(\mathbf{q}^n)) \\
 & \quad \text{où } C_h(\mathbf{q}^n) = \{\mathbf{v} \in \mathbb{R}^{2N}, \forall i < j, D_{ij}(\mathbf{q}^n) + h\mathbf{G}_{ij}(\mathbf{q}^n) \cdot \mathbf{v} \geq 0\} \\
 & \quad \mathbf{q}^{n+1} = \mathbf{q}^n + h\mathbf{u}^n
 \end{aligned}$$

\mathbf{u}^n est approché numériquement par l'algorithme d'Uzawa.

Pour démontrer leurs résultats théoriques, les auteurs de [5] ont construit une solution approchée en utilisant le fait qu'à une distance suffisamment petite de Q_0 , la projection sur celui-ci était bien définie. Cependant, il ne semble pas aisé de calculer numériquement la projection d'un point sur Q_0 . Si l'on interprète notre algorithme en terme de position, on a :

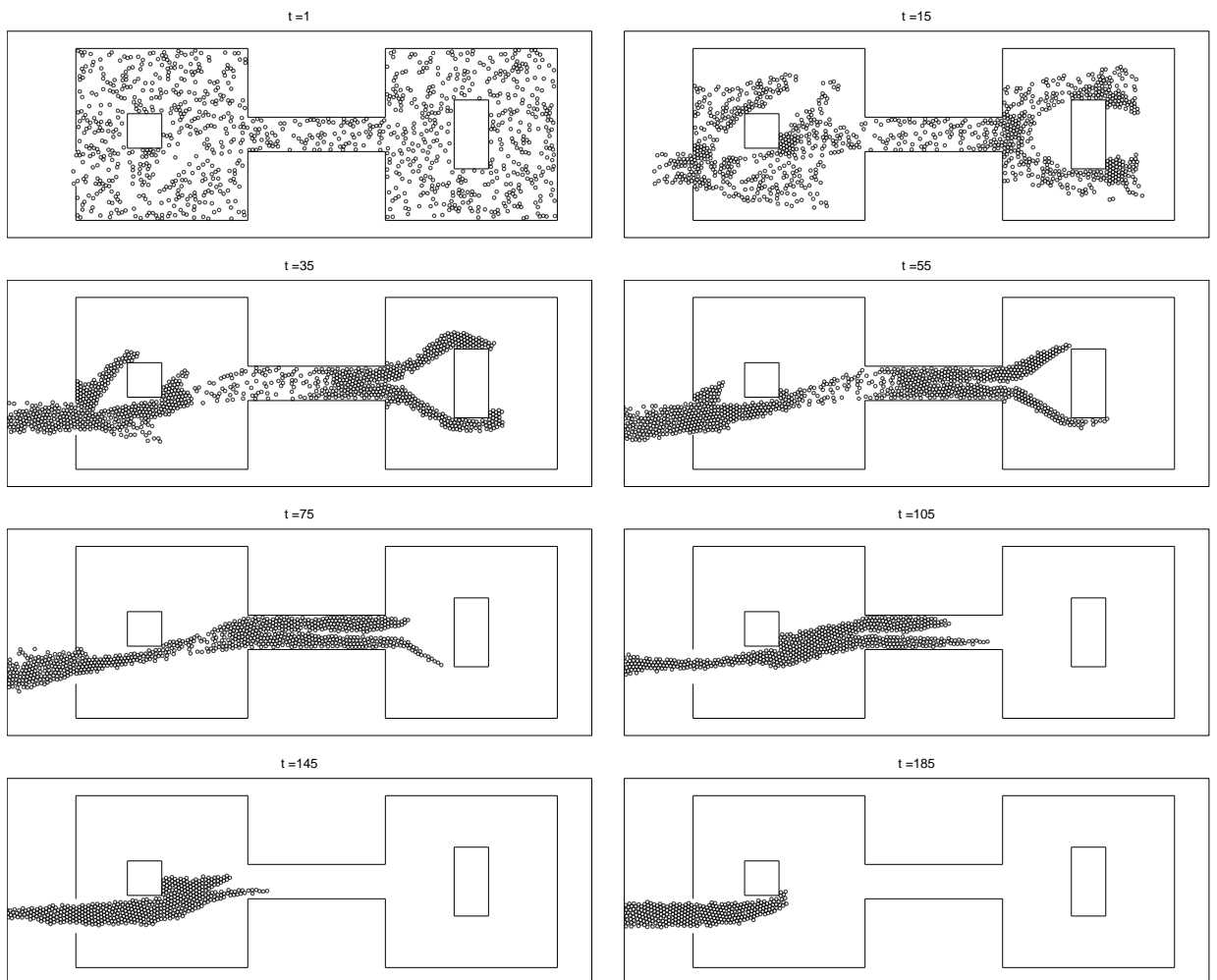
$$\begin{aligned}
 \mathbf{q}^{n+1} &= P_{K(\mathbf{q}^n)}(\mathbf{q}^n + h\mathbf{U}(\mathbf{q}^n)) \\
 \text{où } K(\mathbf{q}^n) &= \{\mathbf{q} \in \mathbb{R}^{2N}, \forall i < j, D_{ij}(\mathbf{q}^n) + \mathbf{G}_{ij}(\mathbf{q}^n) \cdot (\mathbf{q} - \mathbf{q}^n) \geq 0\}
 \end{aligned}$$

On projette en fait sur $K(\mathbf{q}^n)$ qui est une "approximation convexe" de Q_0 . Sur la figure ci-dessous, ses frontières sont en pointillé. Les points \mathbf{q}^{n+1} et $\tilde{\mathbf{q}}^{n+1}$ sont obtenus respectivement après projection sur $K(\mathbf{q}^n)$ et sur Q_0 de $\mathbf{q}^n + h\mathbf{U}(\mathbf{q}^n)$ (pour les deux exemples de $\mathbf{U}(\mathbf{q}^n)$).



4. Résultats Numériques

Il s'agit ici de l'évacuation d'environ 1000 personnes d'un bâtiment composé de deux salles reliées par un couloir. Le champ des vitesses souhaitées a été représenté dans la première section. Le pas de temps h est fixé de telle sorte que les individus tentent en un pas de temps de parcourir une distance égale à une fois et demi leur rayon. La variable t compte le nombre de pas de temps.



Références

- [1] H. Brezis, *Opérateurs Maximaux Monotones et Semi-groupes de contractions dans les espaces de Hilbert*, 1973.
- [2] J.J. Moreau *Evolution Problem associated with a moving convex set in a Hilbert space*, J. Differential Equations 26, no. 3, 347-374, 1977.
- [3] G. Colombo, M.D.P. Monteiro Marques, *Sweeping by a continuous prox-regular set*, J. Differential Equations 187, no. 1, 46-62, 2003.
- [4] L. Thibault, *Sweeping Process with regular and nonregular sets*, J. Differential Equations 193, no. 1, 1-26, 2003.
- [5] J.F. Edmond, L. Thibault, *Relaxation of an optimal control problem involving a perturbed sweeping process*, Math. Program 104, no.2-3, Ser. B, 347-373, 2005.

Juliette Venel, Bertrand Maury

Laboratoire de Mathématiques, Université Paris XI, Orsay.

E-mail : prenom.nom@math.u-psud.fr