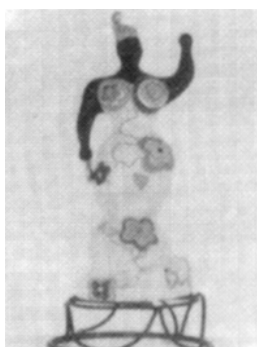


# *femmes & math*

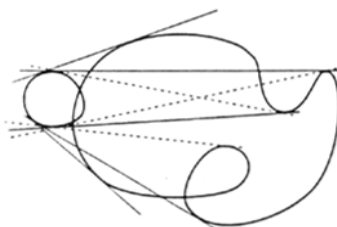
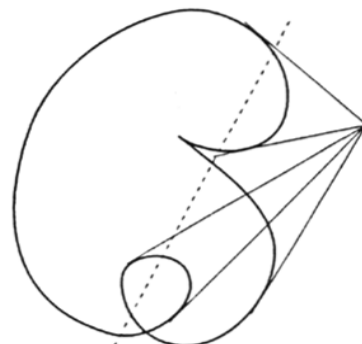


N°9

Septembre 2010

## *Sommaire*

Editorial  
Vie de l'association  
A propos de *mathématiques*  
A propos de *femmes*



Revue de l'Association  
*femmes et mathématiques*

Institut Henri Poincaré  
11 rue Pierre et Marie Curie  
75231 Paris Cedex 05

*Niki de St Phalle*  
Nana with Golden turt  
1986

Women's art magazine  
Sept/oct 1993

*Eileen Cooper*  
Woman with birds  
1989

L'ouvert  
juin 1994

Women's art magazine  
jan/feb 1992

*Claude Cahun*  
Autoportrait  
1929

L'ouvert

juin 1994

Women's art  
magazine  
sept/oct 1995

## SOMMAIRE

VÉRONIQUE LIZAN-ESQUERRETOU — <i>Editorial</i> .....	1
<b>Vie de l'association</b>	
VÉRONIQUE SLOVACEK-CHAUVEAU — <i>Les activités de l'association femmes et mathématiques</i> .....	5
VÉRONIQUE SLOVACEK-CHAUVEAU — <i>Journées « Filles et Maths : une équation lumineuse »</i> .....	11
<b>À propos de mathématiques</b>	
PIERRETTE CHAGNEAU — <i>Statistiques spatiales appliquées en foresterie</i> .....	17
ANNE CRUMIÈRE — <i>Modélisation de réseaux de régulation génétique intercellulaires</i>	23
AGNÈS DAVID — <i>Homothéties dans l'image de Galois</i> .....	29
JULIE DELON & AGNÈS DESOLNEUX — <i>Modélisation mathématique pour un problème de restauration de vieux films</i> .....	35
MIOARA JOLDES — <i>When a Logarithm is a Misspelled Algorithm</i> .....	43
FANNY KASSEL — <i>Quotients compacts des groupes semi-simples de rang un</i> .....	49
PAULINE KLEIN — <i>Conditions aux limites artificielles pour l'équation de Schrödinger</i>	55
MARION LEBELLEGO — <i>Ondes périodiques progressives dans le modèle de Burridge-Knopoff</i> .....	61
KIMIYA MINOUKADEH — <i>Une méthode adaptative pour le calcul d'énergie libre</i> ....	67
SOPHIE MORIER-GENOUD — <i>“ Well, Papa, can you multiply triplets? ”</i> .....	73

KHADRA NACHI — <i>Points fixes et points de coïncidence pour les multiapplications</i> . .	79
MATHILDE NOUAL — <i>Combinatoire des attracteurs de circuits d'automates booléens</i>	85
MARTINE QUEFFÉLEC — <i>Quelques résultats récents en approximation diophantienne.</i>	91
LAURE SAINT-RAYMOND — <i>Quelques problèmes de perturbation singulière</i> . . . . .	97
ZAYNAB SALLOUM — <i>Regular flows of viscoelastic fluids and the incompressible limit</i>	107
CHRISTINE VESPA — <i>Homologie stable des groupes</i> . . . . .	111
<b>À propos de femmes</b>	
AGNÈS NETTER — <i>La Politique du CNRS en matière de parité, Mission pour la place des femmes au CNRS</i> . . . . .	119
SUZANNE DE CHEVEIGNÉ — <i>Parcours de femmes (et d'hommes) au CNRS</i> . . . . .	129

## EDITORIAL

*Véronique Lizan-Esquerretou*

Merci à Agnès, Ainhoa, Anne, Fanny, Khadra, Kimiya, Marion, Mathilde, Mioara, Pauline, Pierrette, Sophie et Zaynab, jeunes mathématiciennes qui ont répondu à l'appel du forum 2009. Une pensée également pour celles qui se sont signalées mais qui n'ont pas exposé, parce qu'elles débutaient leur thèse ou bien la bouclaient en vue d'une soutenance proche. Une autre fois.

Dans ce numéro de sa revue, l'association *femmes et mathématiques* est heureuse de proposer à ses lectrices et lecteurs les actes du neuvième forum des jeunes mathématiciennes qui s'est tenu à l'Institut Henri Poincaré les 6 et 7 novembre 2009.

L'association remercie encore les mathématiciennes senior qui ont proposé à l'auditoire de beaux exposés sur des mathématiques à la pointe de l'actualité : Laure Saint-Raymond qui a donné la conférence inaugurale, Christine Vespa, Martine Quéffelec et Agnès Desolneux.

Les jeunes mathématiciennes françaises et étrangères qui ont participé nous ont également régalingées de beaux exposés plein d'enthousiasme, de fougue parfois, de passion toujours pour les mathématiques, dans des domaines très variés, en particulier en interaction avec la biologie. Nous avons été ravies d'apprendre que plusieurs d'entre elles ont été classées sur un poste de maîtresse de conférences ou de chargée de recherches au CNRS, et nous leur souhaitons une vie mathématique épanouie au sein de la communauté mathématique française. Les jeunes mathématiciennes ont regretté l'absence de jeunes mathématiciens lors de ces deux journées pourtant ouvertes à tou-te-s.

Pour tenter de comprendre ce qui se joue entre les sexes au niveau des carrières puisque les chiffres montrent que filles et garçons n'y entrent pas de la même façon, puis qu'hommes et femmes ne les déroulent pas de la même façon (Cf. l'article *Les mathématiques françaises attendent plus de femmes* dans Matapli 89), à côté du programme mathématique, des spécialistes d'autres disciplines ont présenté au public

du forum des éclairages issus de leur disciplines, Joëlle Wiels pour la biologie, Suzanne de Cheveigné pour la sociologie <sup>1</sup>. Qu'elles soient ici remerciées d'avoir accepté de « vulgariser » leur discipline pour *femmes et mathématiques*.

Et, pour passer à l'action en quelque sorte, Agnès Netter, responsable de la « Mission pour la place des femmes au CNRS » a présenté l'objet de la mission ainsi que les actions mises en place <sup>1</sup>. Une table ronde a permis de donner aux jeunes mathématiciennes quelques indications pratiques pour présenter leurs dossiers de qualification au CNU, les attendus n'étant pas les mêmes selon les sections, 25, 26, 27 ou 61. L'idée de cette table ronde a germé en remarquant au CNU des dossiers féminins qui ne mettent pas en valeur leur qualité, en particulier ceux où les mathématiques interagissent avec d'autres sciences.

En soirée le premier jour du forum, la compagnie « Les Passeurs d'Ondes » a joué à l'ENS une de ses créations, « Le crâne et la mécanique », pièce de théâtre autour de la vie d'Ada Lovelace. Véronique Slovacek-Chauveau, vice-présidente, et Isabelle Collet, membre de l'association, ont apporté le soutien de *femmes et mathématiques* à l'aventure que fut la création de cette œuvre écrite par Lo Glasman. Lors de cette soirée, il fut très agréable de rencontrer un public très divers, de parents par exemple venus avec leurs filles et qui s'interrogent sur l'orientation scolaire, ou bien de féministes, hommes ou femmes, ou bien encore de spécialistes en informatique.

L'association a également apprécié que ce forum 2009 ait été ouvert sous les auspices de Cédric Villani, directeur de l'IHP, qui absent de Paris, avait laissé un mot d'accueil qui a été lu en ouverture <sup>2</sup>.

Une fois tournées les pages du forum 2009, l'association se prépare à ouvrir celles du forum 2010 dans le cadre d'un programme prévu sur quatre années et piloté scientifiquement par Aline Bonami. Le 10<sup>ème</sup> forum se tiendra au CIRM à Luminy du 22 au 24 novembre 2010. Toujours organisé par l'association *femmes et mathématiques*, en partenariat avec la « Mission pour la place des femmes au CNRS » et avec le soutien de l'INSMI et de l'INS2I. Plus d'informations sur le site oueb de l'association à l'adresse <http://www.femmes-et-maths.fr>

---

<sup>1</sup>Nous remercions S. de Cheveigné et A. Netter de nous avoir donné la possibilité de reproduire ici les diaporamas présentés lors du forum. Nous regrettons que la qualité des images présentées soit mal passée lors de la reproduction sur papier et demandons aux lectrices et lecteurs de ces actes de nous en excuser.

<sup>2</sup>J'ai longtemps considéré avec perplexité le principe des réunions de jeunes mathématiciennes... jusqu'à ce que je participe moi-même, en tant qu'orateur, à l'édition 2009 du programme « Femmes en mathématiques » organisé tous les ans à l'Institute for Advanced Study à Princeton. L'ambiance dynamique et enthousiaste dans laquelle baignait cette manifestation m'a laissé un souvenir impérissable. Je vous souhaite de mener les débats et discussions du neuvième forum des jeunes mathématiciennes à l'Institut Henri Poincaré dans un climat aussi détendu et studieux. Bienvenue dans la « Maison des Mathématiciennes » !

Dans les bonnes nouvelles de cet été 2010, à noter que les Miss Mathématiques Côte d'Ivoire 2007 qui ont choisi de suivre des études supérieures en France et que l'association suit depuis leur arrivée en France ont toutes les trois été admises dans de Grandes écoles : Supélec Metz, Sup Telecom Paris, Sup Telecom Bretagne ou les Mines de Nancy. En particulier, un grand merci aux deux tutrices, Christine Charretton et Isabelle Van Den Boom qui ont suivi deux d'entre elles pendant leur scolarité à Lyon et Orléans. L'édition 2010 du concours a pu avoir lieu ; les prix ont été remis le 11 août (l'association participe à la dotation). À suivre.

Dans les nouvelles plus sombres, à l'heure où l'association boucle ce numéro de sa revue, la communauté mathématique vient d'apprendre le décès de Michelle Schatzman. Membre de l'association depuis sa création en 1987, elle a participé à plusieurs journées organisées par *femmes et mathématiques*. En particulier, la première journée en région organisée en 1991 à Lyon où, un samedi après-midi, elle a exposé des travaux qui mélangeaient merveilleusement théories mathématiques et applications. C'était une débattrice exigeante, tout à fait « non conforme » quel que soit le sujet abordé, en particulier celui de l'égalité femme/homme à l'Université. Nous avons ici une pensée émue pour elle qui a soutenu, à sa manière, les jeunes mathématiciennes. L'autoportrait en forme d'abécédaire qu'elle avait offert à la revue *femmes & math* dans le numéro 6 de mars 2002 est une façon pour nous de ne pas oublier la grande mathématicienne qu'elle fut.

Pas de mathématicienne dans le palmarès de ICM 2010 (International Congress of Mathematicians) qui se tient en Inde à Hyderabad : les prestigieux prix qui ont été remis par Smt Pratibha Patil, la présidente indienne, récompensent d'éminents mathématiciens dont trois français, mais aucune femme. Les mathématiques au sommet restent pour 2010 (encore) une histoire d'hommes au niveau mondial. C'est d'ailleurs ressenti comme tel au quotidien également. Consulter par exemple l'article « Mathématicienne. » de Barbara Schapira publié le 28 juin 2010 sur le site de « Images des mathématiques » ([images.math.cnrs.fr/Mathematicienne.html](http://images.math.cnrs.fr/Mathematicienne.html)).

Ailleurs, la question de l'égalité filles/garçons relève, au mieux, du « politiquement correct » poliment effleuré.

Signalons pour terminer la Revue de l'OFCE, 114, « Les discriminations entre les hommes et les femmes » (sous la direction de Françoise Milewski et Hélène Périvier) parue en juillet 2010. Cette revue contient en particulier un article de Marie Duru-Bellat, professeure de sociologie à l'IEP de Paris, intitulé « Ce que la mixité fait aux élèves ». Citons Marie Duru-Bellat qui peut éclairer les professeur-e-s ou parents que nous sommes : « S'interroger sur le bien-fondé de la mixité à l'école peut paraître incongru : alors que la discrimination passe le plus souvent par une mise à l'écart, la mixité intégrale réalisée à l'école serait de toute évidence l'expression la plus achevée du rejet de toute discrimination et à ce titre il n'y aurait pas lieu d'en débattre », remarque Marie Duru-Bellat, qui poursuit « ce postulat, qui recouvre aussi un tabou,

est particulièrement prégnant en France ». « Pourtant, au-delà du principe même de mixité, si l'on s'attache à observer le fonctionnement concret de l'univers mixte des classes et la manière dont il affecte les attitudes et les performances des élèves garçons et filles, alors, la mixité apparaît bien plus ambivalente et pose même des questions fondamentales sur la nature de cette égalité entre hommes et femmes dont elle est censée être un vecteur ».

Des cours sur les questions de genre seront obligatoires pour les étudiant-e-s de l'IEP de Paris, à partir de 2011 – ceci a fait, par exemple, la Une de Libération le 26 mai 2010, et les p.22-23 –. À quand une prise de conscience par l'ensemble de la communauté mathématique, « de la maternelle à l'Université », pour que filles et garçons puissent profiter au mieux des joies que peuvent procurer les joyaux mathématiques ?

*Véronique Lizan-Esquerretou*

*Présidente de femmes et mathématiques.*

*E-mail : veronique.lizan@toulouse.iufm.fr*



## LES ACTIVITÉS DE L'ASSOCIATION *FEMMES ET MATHÉMATIQUES*

*Véronique Slovacek-Chauveau*

Le Forum des jeunes mathématiciennes est un temps fort des activités de *femmes et mathématiques* et il marque même notre spécificité par rapport aux autres associations de femmes scientifiques. Mais nous travaillons aussi, bien en amont, aux niveaux collège et lycée. La mixité scolaire est obligatoire dans l'enseignement primaire et secondaire depuis la loi Haby en juillet 1975, mais elle n'a pas permis d'équilibrer les choix d'orientation des filles et des garçons. A chaque palier d'orientation, les filles et les garçons font des choix différents.

En 2008 par exemple, en Terminale S, 3% des filles choisissent la spécialité « Sciences de l'Ingénieur », 18% la spécialité « Mathématiques », 35% la spécialité « Physique-Chimie » et 44% la spécialité « Sciences et vie de la Terre » alors que 16% des garçons choisissent SI, 23% « Mathématiques », 27% SVT et 34% PC [1].

Après le baccalauréat, les filles vont davantage en filières générales à l'université, les garçons en filières sélectives, en CPGE et en IUT. Les filles sont sur-représentées dans les filières littéraires du supérieur, dans les filières professionnelles des services, dans les IUFM et dans les écoles paramédicales et sociales. Les garçons le sont dans les filières scientifiques et industrielles et, notamment, dans les IUT et les écoles d'ingénieurs.

Or dans les années à venir, un tiers de la population active de formation scientifique aura atteint l'âge de la retraite et dans le même temps, une relative désaffectation des jeunes pour les études scientifiques universitaires longues et une stagnation pour les études courtes et pour les écoles d'ingénieurs se manifestent.

L'Europe aura besoin de plus de chercheurs et d'ingénieurs pour atteindre son objectif d'excellence scientifique et technologique et l'objectif de Lisbonne de devenir l'économie de la connaissance la plus compétitive au monde.

Les professions scientifiques et techniques seront porteuses d'emploi, que ce soit pour les femmes ou les hommes. Et pour que les équipes de chercheurs et d'ingénieurs soient efficaces, elles ont besoin de techniciens et de techniciens supérieurs de qualité et experts dans leurs domaines.

Ce ne sont pas nécessairement des valeurs morales qui animent les partisans du recrutement des femmes mais des raisons économiques, des préoccupations en termes de bénéfices, d'équipes mixtes qui fonctionnent mieux, etc..

Si les garçons boudent les études scientifiques, allons donc chercher les filles!!! C'est ce que nous faisons !

Nos adhérent-e-s sont convaincu-e-s que des jeunes femmes qui choisiraient d'exercer des métiers scientifiques ou techniques seraient passionnées, enthousiasmées par leur travail. Depuis plusieurs années, des membres de nos associations Femmes Ingénieurs, *femmes et mathématiques* et Femmes et Sciences interviennent dans les lycées et collèges qui le demandent pour présenter les métiers scientifiques et techniques, et témoigner de leur passion pour leur métier de femmes scientifiques, devant des jeunes, filles et garçons, leurs enseignant-e-s et leurs parents.

La Mairie de Paris nous soutient dans une opération intitulée « 1000 ambassadrices pour les Sciences à Paris ». Le but de cette opération est aussi d'inciter les jeunes, et plus particulièrement les jeunes filles, à s'orienter vers des métiers scientifiques et techniques en leur donnant l'occasion de rencontrer des très jeunes femmes scientifiques.

Pour cela, nos associations recrutent dans les universités, les écoles d'ingénieurs et les IUT des étudiantes en cours d'études, prêtes à aller témoigner devant des classes de leur intérêt pour les sciences. Elles permettent de démultiplier nos interventions et aussi d'apporter des témoignages sur les études actuelles menant à ces métiers. Ces jeunes femmes pourront ainsi servir de « modèles » aux lycéennes.

Le cadrage pour les interventions est le suivant : deux étudiantes venant, si possible d'une université et d'une Grande Ecole, et une ambassadrice confirmée, c'est-à-dire une femme ayant une expérience professionnelle conséquente, interviennent devant une classe complète, filles et garçons. Chacune présente son parcours, sans support, de la manière la plus simple possible, en essayant d'expliquer en quoi consiste son travail. Notre espoir est que la faible différence d'âge entre les jeunes ambassadrices et les lycéen-ne-s fasse tomber les barrières et permette un vrai dialogue. Le trinôme ne s'adresse qu'à une seule classe à la fois pour que les élèves ne soient pas trop intimidés et osent prendre la parole devant les autres.

Les élèves repartent avec de nombreux documents : Zoom sur les métiers des mathématiques [2], Les métiers de la physique, de l'informatique, les filières universitaires, etc.

Pour toutes nos interventions dans les établissements scolaires mais aussi sur les stands dans des salons (de l'Education, de la culture et des jeux mathématiques,

etc.), nous avons besoin de disposer d'outils différents, moins académiques que nos brochures.

Nous nous sommes donc lancées dans la grande aventure du théâtre...

À l'issue d'une représentation de la pièce « Le cas de Sophie K » de Jean-François Peyret au théâtre de Chaillot, nous avons rencontré la troupe « Les Passeurs d'Ondes » et décidé de travailler ensemble.

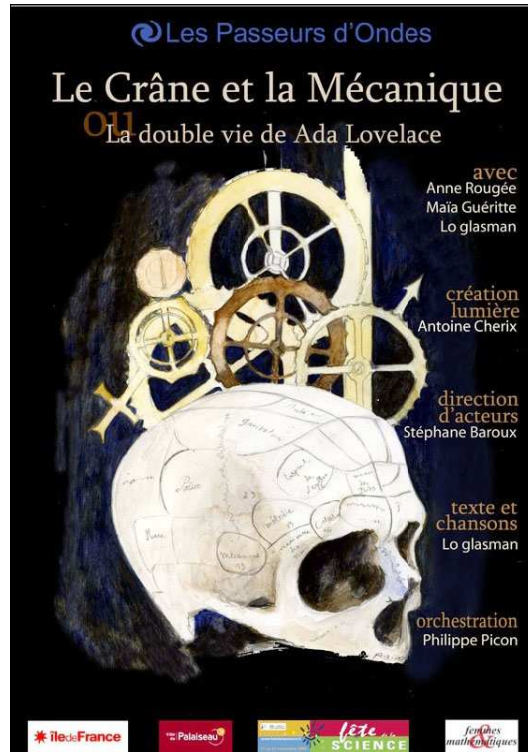
Le premier travail a consisté à choisir une mathématicienne à laquelle s'intéresser. Leur choix s'est porté sur Ada Lovelace, mathématicienne de la première moitié du XIX<sup>ème</sup> siècle qui inventa le premier programme informatique bien avant la conception de l'ordinateur tel que nous le connaissons aujourd'hui. Cette pièce est un spectacle musical sur le thème des femmes en science et de l'évolution des connaissances sur le fonctionnement du cerveau.

Quatre cents ans après Galilée, cent ans après Freud, quarante ans après Neil Armstrong, certains continuent à penser que les hommes viennent de Mars et les femmes de Vénus. Périodiquement, de nouvelles théories se réclamant toujours plus ou moins de la science font la une des magazines « féminins » et prétendent mettre au grand jour des raisons « objectives » et neurologiques des différences de comportements entre femmes et hommes.

La compagnie « Les Passeurs d'Ondes » propose la création d'un spectacle musical tout public avec trois comédiens, sur le thème des femmes en science et de l'évolution des connaissances sur le fonctionnement du cerveau. « Le Crâne et la Mécanique », dont l'action se situe au dix-neuvième siècle, met aux prises un personnage historique de femme scientifique, la mathématicienne Ada Lovelace, et un personnage masculin, le docteur Deville, ardent défenseur d'un courant de la « science » neurologique de cette époque : la phrénologie. À travers la personnalité troublée d'Ada Lovelace, qui fut à l'origine de l'invention du concept de la programmation informatique, le spectacle pose la question du genre en science et celle de la matérialité de la pensée.

Pour mieux faire comprendre au public le cheminement personnel de Ada, celle-ci est incarnée à deux époques différentes de sa vie. Tantôt à l'âge adulte, alors qu'elle éprouve de grandes difficultés à achever son travail pour le mathématicien Charles Babbage, inventeur d'une machine à calculer qu'elle s'est mise en tête d'être capable de commander. Tantôt à l'adolescence, alors qu'elle étouffe sous le joug d'une éducation particulièrement étriquée et se met à inventer une machine à voler afin d'aller rejoindre sa mère dont l'absence prolongée la fait souffrir.

Persuadée que l'intervention de la science phrénologique l'aidera à se libérer de ses tourments, Ada fait appel au docteur Deville. La rencontre entre Ada et le phrénologue est l'occasion d'introduire une réflexion, notamment auprès du jeune public, visant à bousculer les idées reçues sur les rôles sociaux prédestinés aux hommes et aux femmes et sur le fonctionnement de notre cerveau.



Affiche de la pièce de théâtre « le Crâne et la Mécanique »

La phrénologie est ce courant de la science, éminemment contestable et contesté, et aujourd'hui complètement abandonné, qui avait pour projet de décrire et d'expliquer les caractéristiques mentales des individus par la forme de leur crâne. C'est à lui que nous devons l'expression « la bosse des maths » qui fait toujours des ravages.

En 2009, nous nous sommes intéressées au **théâtre forum** pour déconstruire les stéréotypes sur les filles et les mathématiques. Le spectacle forum se déroule en trois phases :

- les comédiens jouent une pièce présentant des situations problématiques non manichéennes,
- les spectateurs et le meneur de jeu débattent des situations présentées par la pièce, émettent des hypothèses d'intervention sur cette problématique,
- les spectateurs qui le désirent viennent sur l'espace de jeu, remplacent un comédien, testent les hypothèses dont ils sont porteurs pour les personnages. Les

comédiens leur donnent la réplique et improvisent avec eux les conséquences possibles de leur hypothèse.

La pièce qui a été créée s'appelle « Dérivée ».



« Lundi matin : contrôle : les complexes. Quand une équation n'a pas de solution... Pas de solution. Pas d'espace dans ma tête pour les nombres imaginaires. Quant à mon imaginaire... »

### L'histoire

Alice, Bob et Ève sont en terminale S. Alors qu'ils planchent sur un contrôle de maths, les pensées d'Alice se mettent à danser dans sa tête et l'empêchent de se concentrer. Ces derniers jours, sa confiance en elle a été mise à mal. Autour d'elle, sa famille, ses amis, le monde entier - jusque dans ses pires cauchemars - se sont ligüés pour lui montrer que les mathématiques ne sont pas faites pour les femmes... et réciproquement! Or, jusqu'à ce lundi matin, les maths ont toujours été le pays d'Alice...

### Les questions

*Pensez-vous que le cerveau des femmes est plus petit et pèse moins lourd que celui des hommes? Pourquoi y a-t-il moins de femmes que d'hommes parmi les ingénieurs? Peut-on jouer à Age of Empire en jupe? « Ambition » : nom féminin?*

Dans la partie improvisée, quelques thèmes (parmi d'autres) pouvant être abordés :

- les stéréotypes sur les femmes et les sciences : les identifier, les « démonter » par l'argumentation, analyser leur action (intégration, dévalorisation...),
- la réussite scolaire, le rapport aux notes, la pression, la motivation,
- le dialogue parents-enfants,

- l'image de soi, l'affirmation de sa personnalité et de ses ambitions,
- l'orientation, la projection dans la vie professionnelle, la connaissance des métiers,
- filles-garçons : les relations amicales, amoureuses, scolaires...

### **L'équipe**

Écriture : Émilie Lambert et Cyril Vernet. Mise en scène : Émilie Lambert. Les comédiens : Cindy Girard, Élise Pradinas, Cyril Vernet et Émilie Lambert. Une co-réalisation : Les Sincères, LAPS/équipe du matin.

### **Durée**

La pièce dure environ 40 minutes. Elle est suivie d'environ 45 minutes d'improvisations avec le public.

### **Références**

- [1] Filles et garçons à l'école sur le chemin de l'égalité, MEN/MESR (2009).
- [2] Les métiers des mathématiques, collection Zoom sur les métiers, ONISEP (2007), ouvrage collectif réalisé avec les sociétés savantes de mathématiques et l'association *femmes et mathématiques*, coordonné par Brigitte Lucquin.

*Véronique Slovacek-Chauveau*

Lycée Camille Sée, 11 rue Léon Lhermitte, 75015 Paris.

*E-mail* : vslovacekchauveau@free.fr

# JOURNÉES « FILLES ET MATHS : UNE ÉQUATION LUMINEUSE »

*Véronique Slovacek-Chauveau*

Pour moi, la mixité est un tel acquis que j'ai toujours refusé d'organiser des journées réservées aux filles. Pourtant trois années de suite, j'ai accompagné des filles de Terminale S aux journées ScienTech girls à Deauville, juste avant le Women's forum, et j'ai pris conscience du plaisir qu'elles éprouvent à se retrouver entre filles pour un temps donné, la liberté retrouvée... Et aussi le plaisir qu'on s'occupe d'elles, tout spécialement. J'ai fini par accepter d'organiser des « journées filles » avec Animath. Le 8 décembre 2009, à l'Institut Henri Poincaré, nous avons organisé une première journée « Filles et maths : une équation lumineuse » pour 75 élèves de Troisième et de Seconde. Ce fut une belle réussite mais l'organisation présentait un défaut majeur : le manque de temps pour les échanges avec les femmes scientifiques présentes. Le 7 avril 2010, deuxième journée, toujours à l'Institut Henri Poincaré. Nous avons réuni 52 lycéennes de Première et Terminale S venant de toute l'Île de France.

« Filles et maths : une équation lumineuse » est une initiative nouvelle destinée à encourager les filles à s'orienter vers des études de mathématiques et plus généralement des études scientifiques et techniques. Il s'agit leur faire rencontrer de manière informelle des femmes qui les ont précédées, doctorantes, mathématiciennes jeunes et moins jeunes, ingénieures, de leur montrer les débouchés très divers des études de mathématiques et les métiers scientifiques. Ce sont des moments d'échange, de rencontre entre mathématicien-ne-s, professeur-e-s de mathématiques et élèves/étudiantes. Les temps forts sont : la Promenade mathématique, les rencontres avec des jeunes femmes scientifiques et le théâtre forum.

## **1. Journée du mardi 8 décembre 2009**

La journée a démarré autour de boissons chaudes et de croissants. La Promenade mathématique (conférence de vulgarisation) était proposée à un groupe de jeunes filles par Sylvie Boldo (chercheuse à l'Institut National de Recherche en Informatique

et en Automatique - INRIA). Parallèlement, un autre groupe participait à un atelier-débat que je menais avec Martin Andler (Professeur à l'Université de Versailles Saint Quentin) pour mettre en évidence certains stéréotypes sur les mathématiques et sur les filles et les maths.



Pierre Duchet (chercheur CNRS) encadrait ensuite un atelier de type « Maths en Jeans ». Secondé par les professeurs accompagnateurs, il proposait aux jeunes filles de réfléchir sur un problème ouvert de mathématiques. Celles-ci se sont prêtées au jeu avec enthousiasme et amusement (photos ci-dessus).



L'après-midi, direction l'amphithéâtre Jean Perrin, dans le bâtiment de Chimie-Physique (face à l'Institut Henri Poincaré), pour participer au théâtre forum. La Compagnie « Les sincères » jouait une courte pièce montrant les stéréotypes garçons-filles à l'oeuvre. Après un temps de réflexion sur la pièce, la troupe a proposé aux jeunes filles de modifier le texte, de rejouer des scènes (photo de gauche). Rires. Amusements. Efficacité.

*« Les élèves ont été ravies de participer aux diverses activités les motivant à poursuivre des études dans les filières scientifiques, et plus précisément en mathématiques. Cet événement a permis de « re-motiver » les élèves et de modifier leur approche des mathématiques », nous confia un professeur le lendemain.*



Du côté des organisateurs/trices, nous avons réalisé après coup que nous n'avions pas laissé de temps suffisant pour les échanges avec les jeunes femmes scientifiques présentes.

## 2. Journée du mercredi 7 avril 2010, à l'Institut Henri Poincaré

Nous étions bien décidé-e-s à privilégier les échanges avec les jeunes femmes présentes.

Barbara Schapira, maîtresse de conférences à l'Université de Picardie Jules Verne, a commencé la journée en nous proposant une promenade mathématique « Au pays des fractales ». Puis Martin Andler et moi avons présenté quelques chiffres mettant en évidence la faible représentation des femmes dans les métiers scientifiques, en général, et tout particulièrement en mathématiques. Nous avons évoqué les différentes explications proposées : historique, sociologique, psychologique, etc. et en balayant aussi les raisons biologiques encore avancées par certain-e-s à grand renfort d'imagerie médicale. Les stéréotypes concernant les femmes et les hommes et leur rôle sont largement véhiculés par notre Société et se manifestent partout : dans tous les médias, à l'École, dans les manuels scolaires, la publicité, etc. Les stéréotypes constituent des images qui bloquent, qui figent à un instant donné, qui empêchent d'avancer et qui finissent par porter atteinte à l'estime de soi. Ils fonctionnent, à longueur de temps, comme des messages subliminaux qui confortent les rôles sociaux traditionnels et les pérennisent. Apprendre à les décrypter est important pour mieux se diriger.

Un exemple : *Pour la majorité des femmes, le symbole et le nom rappellent de douloureuses prises de tête. La plupart des hommes le reconnaissent infailliblement et frétilent de l'intelligence dès que son nom magique est prononcé. « C'est  $\pi$  ! Le 3.14 ! » pouvait-on lire dans un journal « féminin » (publicité pour la sortie du parfum  $\pi$  de Givenchy).*

Les jeunes filles nous ont écoutés avec beaucoup d'attention. Elles n'étaient pas toujours conscientes de tous les préjugés rencontrés dans une journée. Le repas était un moment important : les chercheuses et les étudiantes des Mines et de l'ENSTA se sont prêtées au jeu du « speed-meeting ». Les jeunes filles étaient assises autour d'une table par 6 ou 7 et les jeunes femmes chercheuses ou étudiantes changeaient de table au bout de 10 ou 15 minutes après des discussions passionnantes menées tambour battant. L'après-midi, direction l'amphithéâtre Darboux, pour assister au théâtre forum. Toujours autant de succès. Beaucoup d'éclats de rire, mais aussi beaucoup de sérieux et de finesse dans la compréhension des mécanismes en jeu. Un vrai régal pour toutes et tous et une réflexion salutaire.

Quelques commentaires le lendemain.

*Une enseignante : « Je tiens à vous dire qu'elles étaient ravies, et très reconnaissantes d'avoir eu cette opportunité. Elles n'avaient jamais mis les pieds dans le quartier latin. Paris un jour de grève fut probablement une expédition pour elles. »*

*Une autre : « Elles sont revenues très motivées, et la plus jeune m'a dit : « C'est décidé, je vais faire des maths ! » (Elles n'avaient, avant cette journée, aucune idée pour leur orientation post bac, et ce sont des élèves très compétentes et très travailleuses) »*

*Une élève : « Je dois dire que la journée fut très enrichissante. . . Nous avons débuté par une petite conférence sur les fractales présentée par une chercheuse de l'université de Picardie... Celle-ci nous a montré quelques outils mathématiques pour comprendre de quelle manière on réalisait des fractales. S'en est suivie une seconde conférence un peu moins axée sur les techniques mathématiques. On a pu débattre alors plutôt de la place des femmes dans les mathématiques et les filières scientifiques à l'échelle nationale. On a pu comprendre que les femmes ont tendance, elles-mêmes, à se mettre des barrières dès que les hommes les estiment incapables de réaliser quelque chose (résultats de diverses études). . . Ce débat psychologique m'a particulièrement plu puisqu'il nous a permis de comprendre pourquoi il y a « si peu » de femmes dans les filières scientifiques. Ensuite, nous avons déjeuné autour de quelques tables. . . Durant le repas, des personnes ayant fait ou faisant des études scientifiques sont passées de table en table pour répondre à nos interrogations. . . Echanges également très enrichissants qui m'ont permis de combler mes manques d'informations, même s'ils ne m'ont pas aidée à déterminer ma direction future. . . A la suite de cela, on nous a donc joué une pièce de théâtre sur les mathématiques et bien sûr sur les filles où il était possible d'intervenir pour donner notre point de vue sur les comportements des personnages ou encore les modifier. . . Ce fut également un exercice très agréable pour la réflexion personnelle. . . »*

Et en 2010-2011 ?

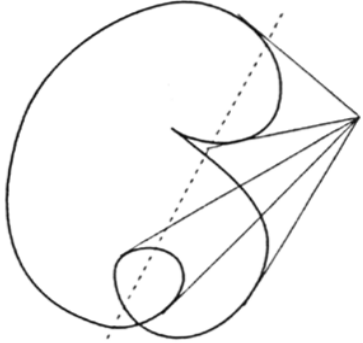
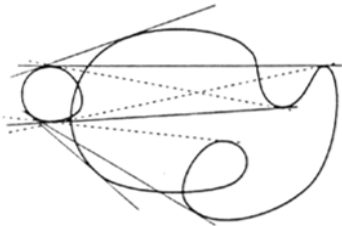
Vu le succès de ces deux journées, nous allons les organiser à nouveau pour l'année scolaire 2010-2011. Le mois d'avril n'est pas le plus favorable pour le genre de réflexion que nous proposons. Pour les Terminales S surtout, il vaudrait mieux choisir une journée en décembre ou janvier au plus tard. Si ces journées vous intéressent, n'hésitez surtout pas à nous contacter. Votre aide sera précieuse. Certaines jeunes mathématiciennes qui ont participé au Forum 2009 nous ont fait le plaisir de venir rencontrer nos lycéennes et elles étaient ravies.

*Véronique Slovacek-Chauveau*

Lycée Camille Sée, 11 rue Léon Lhermitte, 75015 Paris.

E-mail : [vslovacekchauveau@free.fr](mailto:vslovacekchauveau@free.fr)

# *à propos de mathématiques*



# STATISTIQUES SPATIALES APPLIQUÉES EN FORESTERIE : PRÉDICTION DE VARIABLES ENVIRONNEMENTALES NON GAUSSIENNES PAR APPROCHE HIÉRARCHIQUE BAYÉSIENNE ET MODÉLISATION DE LA RÉGÉNÉRATION À L'AIDE DE PROCESSUS PONCTUELS HÉTÉROGÈNES MARQUÉS

*Pierrette Chagneau*

*Résumé.* — Un des points faibles des modèles de dynamique forestière spatialement explicites est la modélisation de la régénération. Un inventaire détaillé du peuplement et des conditions environnementales a permis de mettre en évidence les effets de ces deux facteurs sur la densité locale de juvéniles. Mais en pratique, la collecte de telles données est coûteuse et ne peut être réalisée à grande échelle : seule une partie des juvéniles est échantillonnée et l'environnement n'est connu que partiellement. L'objectif est ici de proposer une approche pour prédire la répartition spatiale et le génotype des juvéniles sur la base d'un échantillonnage raisonnable des juvéniles, des adultes et de l'environnement. La position des juvéniles est considérée comme la réalisation d'un processus ponctuel marqué, les marques étant constituées par les génotypes. L'intensité du processus traduit les mécanismes de dispersion à l'origine de l'organisation spatiale et de la diversité génétique des juvéniles. L'intensité dépend de la survie des juvéniles, qui dépend elle-même des conditions environnementales. Il est donc nécessaire de prédire l'environnement sur toute la zone d'étude. L'environnement, représenté par un champ aléatoire multivarié, est prédit grâce à un modèle hiérarchique spatial capable de traiter simultanément des variables de nature différente. Contrairement aux modèles existants où les variables environnementales sont considérées comme connues, le modèle de régénération proposé doit prendre en compte les erreurs liées à la prédiction de l'environnement. La méthode est appliquée à la prédiction de la régénération des juvéniles en forêt tropicale humide.

## 1. Introduction

Les modèles de dynamique forestière reposent sur trois grands processus biologiques : la croissance, la mortalité et la régénération. Les processus de régénération des essences forestières étant souvent mal connus, la modélisation de la régénération reste l'un des points faibles de ces modèles. Des études visant à connaître l'influence des facteurs biotiques et abiotiques sur le processus de régénération en forêt

tropicale ont montré que l'installation des juvéniles dépend des conditions du milieu, de la localisation des adultes reproducteurs et des phénomènes de compétition. Ces études ont été rendues possible grâce à un inventaire détaillé du peuplement et d'une description fine de l'environnement. En pratique, la collecte de telles données est coûteuse et ne peut pas être réalisée à grande échelle. En général, seule une partie des juvéniles a été échantillonnée et l'environnement n'est connu que partiellement. L'environnement doit donc être prédit sur les zones non échantillonnées. Toutes les variables environnementales n'étant pas de même nature, les méthodes classiques de prédiction ne s'appliquent pas. De plus, les variables environnementales obtenues par prédiction sont entachées d'erreur alors qu'elles sont considérées comme connues dans les modèles de régénération existants. Ces modèles de régénération ne s'intéressent, en général, qu'à l'organisation spatiale des juvéniles et n'intègre aucune information génétique, ce qui pourrait contribuer à une meilleure compréhension du processus de régénération.

Notre étude consiste à prédire la répartition spatiale et la diversité génétique des juvéniles connaissant la localisation des adultes reproducteurs et l'environnement de manière partielle. D'un point de vue biologique, ce travail a pour but d'améliorer la compréhension des mécanismes de dispersion et de savoir quelles sont les conditions du milieu favorables à l'installation des juvéniles. D'un point de vue mathématique, un des objectifs est de proposer un modèle de régénération qui tienne compte des variables environnementales et intègre de l'information génétique. L'environnement est extrapolé sur tout le domaine d'étude grâce à un modèle hiérarchique spatial multivarié.

## 2. Modélisation de la régénération

Le modèle de régénération proposé est capable de prendre en compte simultanément l'hétérogénéité du milieu et l'information apportée par le génotypage des individus, ce que ne permettent pas les modèles existants. Il s'agit d'une extension d'un modèle développé par Shimatani [4] basé sur les processus ponctuels. Ce modèle permet de déterminer la densité locale de juvéniles. Il offre l'avantage de mieux décrire les mécanismes biologiques à l'origine de la régénération en modélisant la survie des juvéniles [5]. Contrairement à Shimatani, nous intégrons les variables environnementales comme variables explicatives de la survie des juvéniles.

**2.1. Processus de Cox marqué avec prise en compte de variables environnementales.** — Soit  $B$  la zone sur laquelle les arbres adultes ont été géoréférencés et géotypés. On note  $\bar{B}$  son complémentaire. Soit  $A$  la zone d'échantillonnage exhaustif des juvéniles,  $A \subseteq B$ . Soit  $x$  un point de  $\mathbb{R}^2$ . Soit  $G$  le génotype d'un juvénile potentiel situé au point  $x$ . Soit  $x_j$  la position de l'adulte  $j$ . On note  $d_{x,y}$  la distance entre les points  $x$  et  $y$ .

La répartition spatiale des juvéniles est considérée comme la réalisation d'un processus ponctuel de Poisson hétérogène marqué, les marques étant constituées par les génotypes. Ce processus peut être considéré comme un processus de Poisson hétérogène multivarié. La fonction d'intensité  $\mu(x, G)$  de chacun des processus de Poisson indépendants qui le composent s'écrit sous la forme :  $\mu(x, G) = \lambda(x, G)\mathcal{S}(x)$ . La fonction  $\lambda(x, G)$  permet de modéliser la position et le génotype des juvéniles potentiels et  $\mathcal{S}(x)$  leur survie. Soit  $g$  le noyau de dispersion des graines et  $U_j$  le succès reproducteur de l'adulte  $j$ .  $\lambda(x, G)$  se décompose sous la forme d'une somme :

$$\lambda(x, G) = \sum_{j: x_j \in B} U_j g(d_{x; x_j}) \mathbb{P}(G|j) + \sum_{j: x_j \in \bar{B}} U_j g(d_{x; x_j}) \mathbb{P}(G|\text{ext}).$$

$\mathbb{P}(G|j)$  est la probabilité qu'un juvénile ayant pour mère  $j$  présente le génotype  $G$  et  $\mathbb{P}(G|\text{ext})$  celle qu'un juvénile issu d'un croisement aléatoire soit de génotype  $G$ . Le premier terme de la somme correspond aux juvéniles potentiels dont la mère est située dans la zone  $B$  et le second à ceux dont la mère est en dehors de  $B$ . Le second terme ne peut pas être calculé puisque les positions des adultes de  $\bar{B}$  ne sont pas connues. Ce terme peut être approché en faisant l'hypothèse que la répartition spatiale des adultes reproducteurs est homogène.  $\lambda(x, G)$  s'écrit alors :

$$\lambda(x, G) = \sum_{j: x_j \in B} U_j g(d_{x; x_j}) \mathbb{P}(G|j) + \bar{U} \bar{d} \beta_x \mathbb{P}(G|\text{ext}) \text{ avec } \beta_x = 1 - \int_B g(d_{x; x_j}) dx_j.$$

Le paramètre  $\bar{U}$  désigne le succès reproducteur des arbres situés hors de  $B$  et  $\bar{d}$  la densité d'adultes reproducteurs.

Le calcul de  $\mathbb{P}(G|j)$  et  $\mathbb{P}(G|\text{ext})$  s'effectue sous l'hypothèse que la population considérée se trouve en équilibre d'Hardy-Weinberg. Soit  $f$  le noyau de dispersion du pollen. En suivant un raisonnement analogue au calcul de  $\lambda(x, G)$ , c'est-à-dire en distinguant les pères issus de  $B$  des pères issus de  $\bar{B}$ , on obtient l'expression de  $\mathbb{P}(G|j)$  :

$$\mathbb{P}(G|j) = \frac{\sum_{i: x_i \in A} f(d_{x_j; x_i}) \mathbb{P}(G|j, i) + \eta_j \bar{d} \mathbb{P}(G|j, \text{ext})}{\sum_{i: x_i \in A} f(d_{x_j; x_i}) + \eta_j \bar{d}}.$$

$\mathbb{P}(G|j, i)$  est la probabilité qu'un juvénile présente le génotype  $G$  sachant qu'il a pour mère  $j$  et pour père  $i$  et  $\mathbb{P}(G|j, \text{ext})$  la probabilité qu'il présente le génotype  $G$  sachant qu'il a pour mère  $j$  et un père situé en dehors de la zone  $B$ .

La survie  $\mathcal{S}(x)$  des juvéniles dépend de l'environnement. Soit  $Y(x)$  un vecteur à  $k$  composantes représentant l'environnement au point  $x$ . La survie en  $x$  est modélisée par :  $\mathcal{S}(x) = \frac{e^{\delta + \gamma' Y(x)}}{1 + e^{\delta + \gamma' Y(x)}}$ ,  $\gamma \in \mathbb{R}^k$ ,  $\delta \in \mathbb{R}$ .

Si l'environnement est considéré comme connu, le processus ponctuel est un processus de Poisson hétérogène. Si  $Y(x)$  est la réalisation d'un champ aléatoire, ce qui est le cas lorsque l'environnement est prédit, le processus est un processus de Cox.

**2.2. Prédiction de l'environnement.** — Les variables environnementales n'ont été échantillonnées que partiellement, alors que la modélisation de la régénération nécessite de les connaître sur toute la zone  $A$ . L'environnement doit donc être prédit. Ce dernier est modélisé par un champ aléatoire multivarié, mais les variables qui le composent ne sont pas forcément de même nature (variables gaussiennes, de Poisson, ordinales, etc). Les méthodes classiques de prédiction multivariée ne s'appliquent pas. Un modèle hiérarchique spatial permettant de prédire simultanément des variables de nature différente est proposé [3]. Ce modèle est une généralisation des modèles linéaires généralisés (MLG) spatiaux [1] au cas multivarié. Le principe de ce modèle est d'associer à chaque variable environnementale, quelle que soit sa nature, une variable latente gaussienne. Autrement dit, la distribution de chaque variable d'environnement  $Y_k(s)$  dépend d'une variable latente  $S_k(s)$ . Cette variable  $S_k$  correspond à la composante spatiale apparaissant dans l'expression du MLG spatial associé à la variable  $Y_k$ . Conditionnellement à  $S_k(s)$  et  $S_m(s)$ , les variables  $Y_k(s)$  et  $Y_m(s)$  sont spatialement indépendantes. Les variables latentes  $\beta_k(s)$  sont construites suivant une approche dite moyenne mobile [2] :  $S_k(s) = \int_{\mathbb{R}^2} f_k(x-s)V_k dx$ , où  $V_k$  est un mélange de bruits blancs gaussiens et  $f_k$  une fonction moyenne mobile. Les variables  $S_k(s)$  sont définies à partir d'un processus latent commun ; elles sont donc dépendantes. La structure de dépendance entre ces variables a l'avantage d'être flexible. Les paramètres du modèle sont estimés grâce à un algorithme de MCMC.

### 3. Application à la prédiction de la régénération de l'angélique

Les deux modèles proposés sont appliqués à la prédiction de la régénération de l'angélique (*Dicorynia guianensis*) à partir de données collectées sur le dispositif de Paracou en Guyane française. Le domaine d'étude, situé au sud du dispositif, couvre environ 40 ha. Différentes mesures ont été réalisées pour caractériser son environnement. L'ensemble des adultes reproducteurs y ont été géoréférencés et génotypés. Une petite zone au centre du domaine d'étude a fait l'objet d'un échantillonnage exhaustif des juvéniles ; ces derniers ont également été génotypés. Le modèle hiérarchique spatial multivarié a été utilisé pour prédire simultanément la pente, l'altitude et le drainage du sol (Figure 1). Les cartes de prédiction obtenues sont cohérentes avec les connaissances que nous avons sur le dispositif. La corrélation entre les variables latentes associées à l'altitude et au drainage est négative : les zones de faible altitude coïncident avec les bas-fonds. Travailler dans un cadre multivarié a permis d'améliorer la qualité des prédictions des variables ordinales. Le modèle de régénération a été testé avec différentes variables environnementales comme variables explicatives de la survie (Tableau 1). Le succès reproducteur est considéré ici comme une fonction du diamètre  $D$  :  $U_j = e^{bD_j}$  et  $\bar{U} = e^{b\bar{D}}$  où  $\bar{D}$  désigne le diamètre moyen des adultes reproducteurs. Les noyaux de dispersion du pollen et des graines sont



choisis gaussiens de matrice de variance-covariance respective  $\tau_1^2 \mathbf{I}_2$  et  $\tau_2^2 \mathbf{I}_2$ . La mise

Environnement	b (cm <sup>-1</sup> )	$\tau_1$ (m)	$\tau_2$ (m)	$\bar{d}$ (ind.m <sup>-2</sup> )	$\delta$	$\gamma$
Pente	0,069	638,99	152,72	fixée	-4,366	0,740
Altitude	0,063	643,21	147,31	fixée	-4,493	0,988
Drainage	0,080	625,40	164,82	fixée	fixée	$\gamma_1 = -1,772$ $\gamma_2 = 0,432$ $\gamma_3 = -0,861$ $\gamma_4 = -16,202$

TABLE 1. Estimation des paramètres du processus ponctuel modélisant la répartition spatiale des juvéniles. La variable environnementale utilisée dans le terme de survie est indiquée à gauche.

en œuvre du modèle de régénération ne s'est pas révélée entièrement satisfaisante dans le cas de l'angélique. La distance moyenne de dispersion estimée du pollen est comprise entre 783 et 806 m et celle des graines entre 184 et 206 m. Le nombre de juvéniles installés issus d'un adulte de 42 cm varie entre 14 et 28. Les distances de dispersion des graines et du pollen sont surestimées. Les juvéniles s'installent de préférence sur les sols présentant une pente supérieure à 7°. Leur survie sur les sols hydromorphes est quasi nulle.

### Références

- [1] P. Diggle, J. Tawn, R. Moyeed, Model-based geostatistics, *J. Roy. Statist. Soc. Ser. C*, 47(3), 299-350, 1998.
- [2] J. Ver Hoef, R. Barry, Constructing and fitting models for cokriging and multivariable spatial prediction, *J. Statist. Plann. Inference*, 69(2), 275-294 1998.
- [3] P. Chagneau, F. Mortier, N. Picard, J.-N. Bacro, Hierarchical Bayesian model for spatial prediction of multivariate non-Gaussian random fields, *A paraître dans Biometrics*.
- [4] K. Shimatani, Spatial molecular ecological model for genotyped adults and offspring, *Ecological modelling* 174, 401-410, 2004.
- [5] K. Shimatani, K. Kitamura, T. Kanazashi, H. Sugita Genetic inhomogeneous Poisson process describing the roles of an isolated mature tree in forest regeneration, *Population Ecology* 48, 203-214, 2006.

Pierrette Chagneau

AgroParisTech, Dépt MMIP, 16 rue Claude Bernard, 75231 Paris Cedex 05.

E-mail : pierrette.chagneau@agroparistech.fr

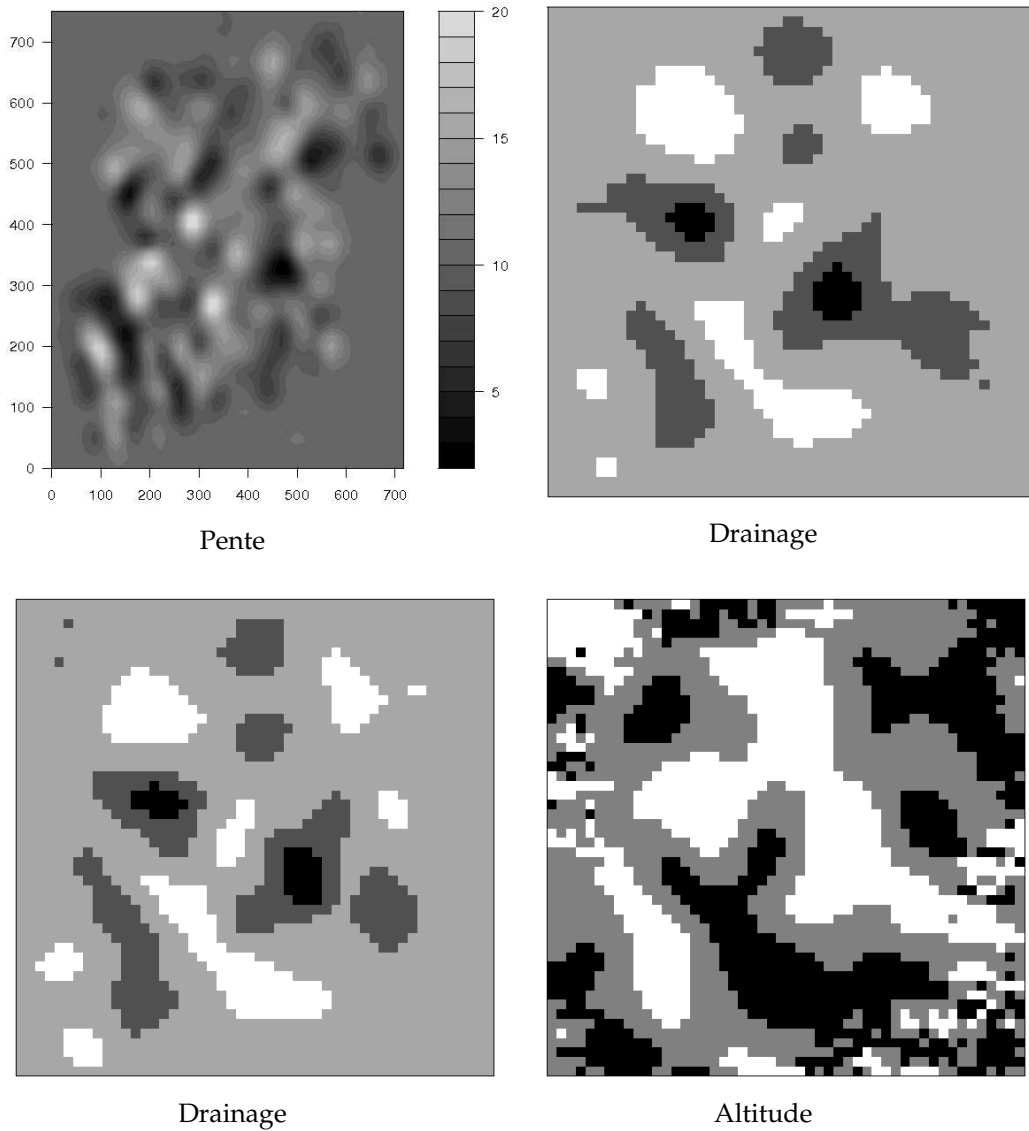


FIGURE 1. Cartes de prédiction obtenues à partir du jeu de données composé de la pente et du drainage (en haut) et du jeu de données composé du drainage et de l'altitude (en bas). La zone d'étude est un rectangle de 717 mètres sur 750. La pente est mesurée en degrés. Les modalités du drainage sont représentées suivant une échelle de gris allant du noir correspondant aux sols bien drainés au blanc correspondant aux sols hydromorphes. Les modalités de l'altitude sont représentées suivant une échelle de gris allant du noir correspondant aux altitudes faibles au blanc correspondant aux altitudes élevées.

# MODÉLISATION DE RÉSEAUX DE RÉGULATION GÉNÉTIQUE INTERCELLULAIRES

*Anne Crumière*

*Résumé.* — Les biologistes représentent souvent les interactions génétiques par des graphes orientés, appelés graphes de régulation génétique. Les sommets désignent les gènes du système et les arêtes, les effets de régulation d'un gène sur un autre. Elles sont munies d'un signe positif dans le cas d'une activation et négatif pour une inhibition. Ce papier traite des relations entre la structure de ces graphes et leurs propriétés dynamiques.

## 1. Introduction

Les biologistes représentent souvent les réseaux de régulation génétique par des graphes. Ces graphes, appelés graphes d'interaction, sont des graphes orientés et signés, notés  $G = (V, E)$ , où l'ensemble des nœuds,  $V = \{1, \dots, n\}$ , représente les  $n$  gènes du système et l'ensemble des arêtes  $E$  représente les régulations :  $(i, j) \in E$  si le gène  $i$  est un régulateur du gène  $j$ . Les arêtes sont signées, positivement ( $+1$ ) dans le cas d'une activation, c'est à dire quand la protéine codée par le gène  $i$  favorise l'expression du gène  $j$ , et négativement dans le cas d'une inhibition ( $-1$ ), c'est à dire quand la protéine codée par le gène  $i$  ralentit ou stoppe l'expression du gène  $j$ .

Un tel graphe d'interaction est une représentation d'un réseau permettant d'expliquer au niveau de la régulation génétique, un processus biologique donné. Les niveaux d'expression des  $n$  gènes à un instant donné représentent un *état* du système.

Dans ce papier, on s'intéresse aux propriétés de stabilité de ce système ; dans le cadre des systèmes dynamiques, cela se traduit par les notions d'attracteurs, d'états stationnaires, de cycles attractifs... L'étude de ces propriétés demande soit dans un cadre continu la résolution d'un système d'équations différentielles assez grand, soit dans le cadre discret, l'étude d'un graphe de grande taille représentant la dynamique. Dans les deux cas, on est confronté à des problèmes de très grande complexité.

D’où l’idée de revenir aux graphes d’interaction qui correspondent à ces dynamiques, et qui ont l’avantage d’être de taille plus petite et donc plus facile à analyser. De tels liens entre la dynamique et les graphes d’interaction existent : les *règles de Thomas* en sont un bel exemple. En effet, dans les années 80, le biologiste René Thomas énonça la règle suivante [5] : *une condition nécessaire pour l’existence de plusieurs états stationnaires dans la dynamique est la présence d’un circuit positif dans le graphe d’interaction (le signe d’un circuit étant le produit des signes des arêtes).*

Durant cette décennie, de nombreux chercheurs ont formalisé et démontré cette règle dans des cadres différents [2, 3, 4], mais toujours dans le cas où les gènes sont répartis dans une même cellule. Ce travail étend dans un cadre discret ces règles à un réseau génétique intercellulaire.

## 2. Formalisme

**2.1. Dynamique du réseau de régulation.** — On s’intéresse à l’évolution d’un système composé de cellules, chaque cellule contient la même collection de gènes choisis dans un ensemble fini  $I$ . Pour un gène  $i \in I$ , l’intervalle  $\mathcal{A}_i = [0, k_i]$  désigne les niveaux d’expression possibles du gène  $i$ . Un *état* d’une cellule est un élément du produit cartésien  $\mathcal{A} = \prod_{i \in I} \mathcal{A}_i$ .

Généralement, un système biologique est constitué de plusieurs cellules. On peut supposer que les cellules sont réparties régulièrement et disposées suivant un réseau  $\mathbb{M}$ , i.e. un sous-groupe discret de  $\mathbb{R}^d$  muni de l’opération  $+$ . Chaque cellule est dans un état  $a \in \mathcal{A}$ . Un *état du système* est ainsi une suite d’éléments de  $\mathcal{A}$  indexée par  $\mathbb{M}$ , i.e. un élément de  $\mathcal{A}^{\mathbb{M}}$ . Pour tous  $s \in \mathcal{A}^{\mathbb{M}}$  et  $\mathbb{U} \subset \mathbb{M}$ , on note  $s_{\mathbb{U}}$  la *restriction* de  $s$  à  $\mathbb{U}$ . Lorsque l’état du système est donné par  $s \in \mathcal{A}^{\mathbb{M}}$ , l’état de la cellule  $x \in \mathbb{M}$  est noté  $s(x)$  et pour un gène  $i \in I$ , le niveau d’expression du gène  $i$  dans la cellule  $x$  est noté  $s(x, i)$ .

Le niveau d’expression d’un gène dans une cellule varie au cours du temps en fonction des niveaux d’expression des gènes dans cette cellule et dans les cellules voisines. Chaque cellule communique avec ses voisines de manière uniforme dans l’espace. Pour modéliser ce phénomène, on considère l’ensemble fini  $\mathbb{V} \subset \mathbb{M}$  appelé *voisinage* et une *fonction locale*  $f : \mathcal{A}^{\mathbb{V}} \rightarrow \mathcal{A}$ . On suppose que l’élément nul de  $\mathbb{M}$  appartient à  $\mathbb{V}$ .

La *dynamique globale* du système peut alors être donnée par l’*automate cellulaire*  $F : \mathcal{A}^{\mathbb{M}} \rightarrow \mathcal{A}^{\mathbb{M}}$  défini par  $F(s)(x) = f((s(x + v))_{v \in \mathbb{V}})$  pour tous  $s \in \mathcal{A}^{\mathbb{M}}$  et  $x \in \mathbb{M}$ . On désigne par  $F(s)(x, i)$  la valeur vers laquelle le niveau d’expression du gène  $i$  dans la cellule  $x$  tend quand le système est à l’état  $s$ . Tout naturellement, un *état stationnaire* de  $F$  est un état  $s \in \mathcal{A}^{\mathbb{M}}$  tel que  $F(s) = s$ , i.e. un état dans lequel le niveau d’expression de chaque gène n’évolue pas.

**2.2. Graphe d'interaction.** — Généralement, on observe les variations du niveau d'expression d'un gène lorsque les autres gènes interagissent avec celui-ci. Ces variations sont mises en évidence par le calcul de la Jacobienne discrète et visualisées sous la forme d'un graphe d'interactions.

**Notation 2.1.** — • Soit  $t \in \mathbb{Z}$ , on définit  $\text{sg}(t) = 0$  si  $t = 0$ ,  $\text{sg}(t) = +1$  si  $t > 0$  et  $\text{sg}(t) = -1$  si  $t < 0$ .

• Soient  $(s, s') \in (\mathcal{A}^{\mathbb{M}})^2$  et  $(x, i) \in \mathbb{M} \times I$ , on définit  $s^{(x,i) \triangleleft s'}$  par : pour tout  $(y, j) \in \mathbb{M} \times I$ ,

$$s^{(x,i) \triangleleft s'}(y, j) = \begin{cases} s(y, j) & \text{si } (x, i) \neq (y, j), \\ s(y, j) + \text{sg}(s'(y, j) - s(y, j)) & \text{sinon.} \end{cases}$$

**Définition 2.2.** — Soient  $s, s' \in \mathcal{A}^{\mathbb{M}}$  et  $((x, i), (y, j)) \in (\mathbb{M} \times I)^2$ , on définit la **Jacobienne discrète** de  $F$  en  $s \in \mathcal{A}^{\mathbb{M}}$  suivant la direction  $s' \in \mathcal{A}^{\mathbb{M}}$  comme étant la matrice dont les coefficients sont :

$$\partial_{(x,i),(y,j)} F(s, s') = \text{sg}(s'(x, i) - s(x, i)) \text{sg}(F(s^{(x,i) \triangleleft s'})(y, j) - F(s)(y, j)).$$

Pour visualiser ou plutôt représenter les différentes actions d'un gène sur un autre dans une même cellule ou dans une cellule voisine dans une région  $\mathbb{U} \subset \mathbb{M}$ , on définit le **graphe d'interaction** de  $\partial F(s_{\mathbb{U}}, s'_{\mathbb{U}})$ , noté  $G(\partial F(s_{\mathbb{U}}, s'_{\mathbb{U}}))$ . Le graphe d'interaction est un graphe orienté signé, *i.e.*, avec un signe  $+1$  ou  $-1$ , attaché à chaque arête et défini par :

- les sommets sont les gènes de chaque cellule contenue dans  $\mathbb{U}$ , c'est à dire  $\mathbb{U} \times I$ ,
- il y a une arête allant du gène  $i$  dans la cellule  $x$  vers le gène  $j$  dans la cellule  $y$  si  $\partial_{(x,i),(y,j)} F(s_{\mathbb{U}}, s'_{\mathbb{U}}) \neq 0$  et  $\text{sg}(F(s)(y, j) - s(y, j)) \neq \text{sg}(F(s^{(x,i) \triangleleft s'})(y, j) - s(y, j))$ . Le signe de l'arête est alors celui de  $\partial_{(x,i),(y,j)} F(s_{\mathbb{U}}, s'_{\mathbb{U}})$ , il est positif (resp. négatif) si le niveau d'expression du gène  $i$  est en "augmentation" (resp. "diminution").

### 3. Conditions nécessaires de multistabilité

**Définition 3.1.** — On rappelle que  $\mathbb{V}$  est le voisinage de la fonction globale  $F$ . Soient  $\mathbb{U}', \mathbb{U}''$  deux sous-ensembles de  $\mathbb{M}$ , on définit le sous-ensemble  $\mathbb{U}' + \mathbb{U}'' = \{u' + u'' : u' \in \mathbb{U}' \text{ et } u'' \in \mathbb{U}''\}$ . Pour  $\mathbb{U} \subset \mathbb{M}$  fini, on note  $\partial\mathbb{U} = (\mathbb{U} + \mathbb{V}) \setminus \mathbb{U}$  le **bord** de  $\mathbb{U}$ .

Notre formalisme pour décrire les interactions génétiques dans un cadre intercellulaire est maintenant mis en place. Nous pouvons énoncer l'adaptation de la règle de Thomas au système intercellulaire avec la même collection de gènes dans chaque cellule :

**Théorème 3.2.** — [1] Soient  $F : \mathcal{A}^{\mathbb{M}} \rightarrow \mathcal{A}^{\mathbb{M}}$  une fonction globale et  $\mathbb{U} \subset \mathbb{M}$ . Si  $r, t \in \mathcal{A}^{\mathbb{M}}$  sont deux états stationnaires qui vérifient  $(r)_{\partial\mathbb{U}} = (t)_{\partial\mathbb{U}}$  et  $(r)_{\mathbb{U}} \neq (t)_{\mathbb{U}}$ , alors il existe  $s \in \mathcal{A}^{\mathbb{M}}$  tel que  $G(\partial F(s, t))$  a un circuit positif élémentaire.

**Remarque 3.3.** — Comme  $G(\partial F(s, t))$  contient un circuit élémentaire positif mais comme  $s_{\partial U} = t_{\partial U}$ , le circuit positif est localisé sur  $U$ .

#### 4. Perspectives

Dans le Théorème 3.2, la localisation du circuit est induite par les états stationnaires, donc dépendante de la dynamique du système. Mais dans la plupart des modèles étudiés par les biologistes, les circuits sont localisés sur au plus deux cellules. Il serait intéressant d'étudier le nombre maximum de cellules sur lesquelles le circuit positif s'étend.

De plus, ce modèle positionne les cellules sur un réseau, donc régulièrement dans l'espace. Une perspective serait de les répartir sur une structure moins ordonnée mais suffisamment régulière pour définir une dynamique locale, par exemple le pavage de Penrose.

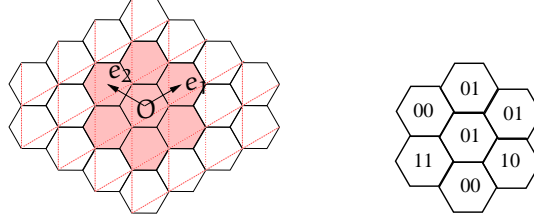
#### Références

- [1] A. Crumière, *Circuits de rétroaction dans les réseaux génétiques de régulation intercellulaires*, PhD Thesis, 2008.
- [2] C. Soulé, *Graphic requirements for multistationarity*, *ComplexUs*, 1 :123–133, 2003.
- [3] É. Remy, P. Ruet, and D. Thieffry, *Graphic requirements for multistability and attractive cycles in a Boolean dynamical framework*. *Advances in Applied Mathematics*, 41(3) : 335-350, 2008.
- [4] A. Richard, *Modèle formel pour les réseaux de régulation génétique et influence des circuits de rétroaction*, PhD Thesis, 2006.
- [5] R. Thomas, *On the relation between the logical structure of systems and their ability to generate multiple steady states and sustained oscillations*, *Series in Synergetics*, 9 :180-193. Springer, 1981.

#### ANNEXE : Un exemple de réseau hexagonal

On étudie un système constitué de deux gènes par cellule, *i.e.*,  $I = \{a, b\}$ , qui ont deux niveaux d'expression, ainsi  $\mathcal{A} = \{0, 1\} \times \{0, 1\}$ . Les cellules sont localisées sur un plan. Pour des raisons biologiques, les cellules sont représentées par des hexagones qui pavent le plan. Ce *pavage hexagonal*  $\mathbb{M}$  est généré par les vecteurs  $\mathbf{e}_1$  et  $\mathbf{e}_2$ , plus précisément  $\mathbb{M} = \mathbb{Z}\mathbf{e}_1 + \mathbb{Z}\mathbf{e}_2$ . Soit  $(x_1, x_2) \in \mathbb{Z}^2$ ,  $(x_1, x_2)$  sont les coordonnées de la cellule  $x \in \mathbb{M}$  dans le pavage selon une origine arbitraire  $O$  et la base  $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$  (voire Figure 1).

Le voisinage d'une cellule quelconque  $x$  de coordonnées  $(x_1, x_2)$  est donc :  $x + \mathbb{V} = \{(x_1, x_2), (x_1, x_2 + 1), (x_1 + 1, x_2 + 1), (x_1 - 1, x_2), (x_1 + 1, x_2), (x_1 - 1, x_2 - 1), (x_1, x_2 - 1)\}$ . L'état local  $s_{\mathbb{V}}$ , représenté en Figure 1, est composé de 7 cellules hexagonales où les deux nombres dans chaque cellule sont les niveaux d'expression des deux gènes contenus dans chaque cellule. Cet état est mathématiquement représenté par


 FIGURE 1. (Gauche) Localisation (Droite)  $x_V$ 

la matrice suivante :  $\begin{pmatrix} (0,0) & (0,1) \\ (1,1) & (0,1) & (0,1) \\ (0,0) & (1,0) \end{pmatrix}$ . Plus généralement pour tout état  $s \in$

$\mathcal{A}^M$ , l'état  $s(x + \nabla)$  est une matrice  $3 \times 3$  avec deux trous :

$$s(x + \nabla) = \begin{pmatrix} & s(x_1, x_2 + 1) & s(x_1 + 1, x_2 + 1) \\ s(x_1 - 1, x_2) & s(x_1, x_2) & s(x_1 + 1, x_2) \\ s(x_1 - 1, x_2 - 1) & s(x_1, x_2 - 1) & \end{pmatrix}$$

Par la suite, pour des raisons d'espace, nous supposons qu'il y a un seul gène dans chaque cellule, *i.e.*  $I = \{a\}$  avec toujours deux niveaux d'expression, *i.e.*  $\mathcal{A}_a = \{0, 1\}$ . Une partie de la dynamique locale de ce système est donnée dans le tableau ci-dessous :

$f \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0$	$f \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0$	$f \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 1$	$f \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = 0$
$f \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 1$	$f \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = 0$	$f \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = 0$	$f \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = 0$
$f \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 1$	$f \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 1$	$f \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 0$	$f \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 1$
$f \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 0$	$f \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 1$	$f \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 1$	$f \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 1$
$f \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 1$	$f \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 1$	$f \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 1$	$f \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 1$
$f \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 1$	$f \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 0$	$f \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0$	$f \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 1$
$f \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 1$	$f \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0$	$f \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 1$	$f \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 1$

Le graphe d'interaction suivant est construit par calcul des dérivées :

$$G\left(\partial F\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right)\right) = \text{Diagram}$$

F a deux états stationnaires  $r$  et  $t$  répondant aux conditions du Théorème 3.2 (une partie uniquement de chaque état stationnaire est représentée). L'ensemble  $\mathbb{U}$  est constitué des deux cellules non colorées entourées par les cellules colorées et  $\partial\mathbb{U}$  est constitué des huit cellules colorées. Donc il existe un état  $s$  tel que  $G(\partial F(s, t))$  a un circuit positif élémentaire.

$$r = \text{Diagram} \quad t = \text{Diagram} \quad G\left(\partial F\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right)\right) = \text{Diagram}$$

FIGURE 2. (Gauche) Etats stationnaires (Droite) Circuit positif entre les gènes des deux cellules centrales

Anne Crumière

Institut de Mathématiques de Luminy (UMR 6206),  
Campus de Luminy, Case 907 13288 MARSEILLE Cedex 9.

E-mail : [crumiere@iml.univ-mrs.fr](mailto:crumiere@iml.univ-mrs.fr)



# HOMOTHÉTIES DANS L'IMAGE DE GALOIS

*Agnès David*

*Résumé.* — On présente dans cet exposé des résultats uniformes sur le sous-groupe des homothéties contenu dans l'image de la représentation galoisienne associée aux points de torsion d'une courbe elliptique.

Dans le cas où l'image de la représentation est triangulaire supérieure, on obtient des résultats supplémentaires décrivant les deux seules formes possibles pour sa diagonale.

## 1. Acteurs

**1.1. Groupe de Galois.** — On fixe  $K$  un sous-corps de  $\mathbb{C}$  qui est de dimension finie comme espace vectoriel sur  $\mathbb{Q}$  (un tel corps est appelé un corps de nombres). On s'intéresse au groupe, noté  $G_K$ , des automorphismes de corps de la clôture algébrique  $\overline{\mathbb{Q}}$  de  $\mathbb{Q}$  qui valent l'identité sur  $K$ . La théorie de Galois relie en effet l'étude de ce groupe à la compréhension des équations polynomiales à coefficients dans  $K$ .

**1.2. Courbe elliptique.** — On fixe également une courbe elliptique  $E$  définie sur le corps  $K$ ; une telle courbe est donnée par une équation polynomiale à coefficients dans  $K$ , à deux variables et de degré 3, à laquelle on adjoint un point à l'infini.

L'ensemble  $E(\overline{\mathbb{Q}})$  des solutions de cette équation dans  $\overline{\mathbb{Q}}$  (point à l'infini compris) est muni d'une structure de groupe abélien. Pour tout entier  $n$  plus grand que 1, l'ensemble des points de  $n$ -torsion de ce groupe est isomorphe à  $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^2$ ; si  $n$  est un nombre premier, cet ensemble forme en particulier un espace vectoriel de dimension 2 sur le corps à  $n$  éléments.

**1.3. Une représentation galoisienne.** — On fixe enfin  $p$  un nombre premier. Le groupe  $G_K$  agit sur  $E(\overline{\mathbb{Q}})$ , en respectant sa structure de groupe; il agit donc également sur ses points de  $p$ -torsion. On en déduit une représentation  $\varphi_p$  de  $G_K$ , à valeurs (après choix d'une base pour les points de  $p$ -torsion) dans  $GL_2(\mathbb{F}_p)$ .

## 2. Un problème de Serre uniforme

**2.1. Image de Galois.** — On s'intéresse ici au sous-groupe de  $GL_2(\mathbb{F}_p)$  qui est l'image de  $G_K$  par le morphisme de groupes  $\varphi_p$ . Cette image permet en effet de comprendre l'extension de  $K$  engendrée dans  $\overline{\mathbb{Q}}$  par les coordonnées des points de  $p$ -torsion de  $E$ .

**2.2. Un théorème de Serre.** — Cette image est asymptotiquement grosse, au sens par exemple du théorème suivant.

*Théorème 2.1 (Serre [8]).* — *Si la courbe elliptique  $E$  n'a pas de multiplication complexe, alors il existe une borne  $C(K, E)$ , ne dépendant que du corps  $K$  et de  $E$ , vérifiant : si  $p$  est plus grand que  $C(K, E)$ , alors la représentation  $\varphi_p$  est surjective.*

L'interprétation de ce résultat est que l'extension de  $K$  engendrée par les coordonnées des points de  $p$ -torsion de  $E$  est aussi grosse que possible.

L'hypothèse initiale de l'énoncé porte sur l'anneau des endomorphismes de la courbe  $E$  : on sait qu'il est soit réduit à  $\mathbb{Z}$ , soit un sous-anneau d'indice fini de l'anneau des entiers d'un corps quadratique (extension de dimension 2 de  $\mathbb{Q}$ ) imaginaire (n'admettant pas de plongement dans  $\mathbb{R}$ ) ; selon le cas, on dit que  $E$  n'a pas ou a des multiplications complexes.

Dans le cas où la courbe possède des multiplications complexes, la représentation  $\varphi_p$  est précisément décrite ; son image contient un sous-groupe commutatif d'indice au plus 2 et ne peut donc pas être tout  $GL_2(\mathbb{F}_p)$  ; en revanche, il existe des résultats selon lesquels elle est aussi asymptotiquement grosse, en un sens à adapter.

**2.3. Une version uniforme ?** — Dans [8], Serre suggère également qu'on peut s'affranchir de la dépendance en la courbe elliptique  $E$  dans la borne  $C(K, E)$ , pour obtenir une version uniforme du théorème 2.1. Un tel résultat n'est même pas encore connu lorsque le corps de base est  $\mathbb{Q}$ , malgré des résultats partiels importants de Mazur [3], Merel [4] et Parent [6].

## 3. Homothéties contenues dans l'image de Galois

Les matrices des homothéties constituent le centre de  $GL_2(\mathbb{F}_p)$ . Pour montrer que l'image de la représentation  $\varphi_p$  est uniformément grosse, il est donc naturel de chercher à montrer qu'elle contient uniformément un gros sous-groupe des homothéties.

Nous avons obtenu le résultat uniforme suivant :

*Théorème 3.1 (David [1], Eckstein[2]).* — *Il existe une borne  $C(K)$ , explicite et ne dépendant que du corps de nombres  $K$ , telle que si  $p$  est plus grand que  $C(K)$ , alors l'image de  $\varphi_p$  contient toutes les puissances douzièmes des homothéties.*

Notre démonstration donne une forme explicite pour la borne  $C(K)$ , qui la fait dépendre de nombreux invariants arithmétiques du corps de nombres  $K$  (degré, discriminant, nombre de classes, régulateur, etc.).

*Remarque 3.2.* — Le théorème 3.1 ne fournit pas toutes les homothéties comme sous-groupe de l'image de la représentation  $\varphi_p$ , mais seulement leurs puissances douzièmes. Cette puissance douzième apparaît naturellement dans le cours de la démonstration pour trivialisier les images de certains sous-groupes qui dépendent de la courbe elliptique, mais dont l'ordre est borné. D'autre part, Eckstein présente dans sa thèse [2] un exemple pour lequel l'image de  $\varphi_p$  ne contient pas toutes les homothéties ; il s'agit d'un exemple où la courbe elliptique possède des multiplications complexes. On peut donc se demander si, en ajoutant l'hypothèse que la courbe  $E$  n'a pas de multiplication complexe, il est possible de montrer que l'image de  $\varphi_p$  contient toutes les homothéties.

#### 4. Éléments de démonstration

**4.1. Image de l'inertie et sous-groupes maximaux.** — La démonstration du théorème 3.1 repose sur le dialogue entre deux idées.

La première est que les homothéties recherchées se trouvent dans l'image de certains sous-groupes de  $G_K$ , appelés les sous-groupes d'inertie associés à  $p$ . La restriction de la représentation  $\varphi_p$  à ces sous-groupes est bien connue, grâce à des travaux de Serre [8] et Raynaud [7].

La seconde est la connaissance des sous-groupes maximaux de  $GL_2(\mathbb{F}_p)$  qui peuvent contenir l'image de  $\varphi_p$  si celle-ci n'est pas tout  $GL_2(\mathbb{F}_p)$ . On peut déjà choisir, uniformément,  $p$  assez grand pour que ces sous-groupes maximaux soient de deux types : normalisateur d'un sous-groupe de Cartan (cas traité par Eckstein) ou sous-groupe de Borel (conjugué aux matrices triangulaires supérieures).

**4.2. Cas d'une représentation triangulaire supérieure.** — On suppose désormais que l'image de la représentation  $\varphi_p$  est incluse dans un sous-groupe de Borel (c'est-à-dire, dans une base qui lui est adaptée, triangulaire supérieure). La recherche des homothéties qu'elle contient passe alors par des résultats précis sur la forme que peut prendre la représentation.

*4.2.1. Caractères.* — La représentation  $\varphi_p$  étant triangulaire supérieure, sa diagonale est donnée par deux morphismes de groupes de  $G_K$  dans  $\mathbb{F}_p^\times$ , appelés des caractères de  $G_K$ . Chacun de ces deux caractères diagonaux est plus facile à étudier que la représentation entière, notamment car son image est commutative (et même cyclique). La théorie du corps de classes fournit en effet des outils puissants pour l'étude de l'extension de  $K$ , finie et de groupe de Galois abélien, qui lui est associée.

4.2.2. *Deux formes pour la diagonale.* — En utilisant et explicitant des travaux de Momose [5], on montre qu'il n'y a que deux possibilités pour la puissance douzième de la diagonale de  $\varphi_p$ , lorsque  $p$  est plus grand que la borne  $C(K)$  :

- soit elle est formée de deux caractères égaux ;
- soit elle présente de grandes similarités avec celle associée à une courbe elliptique ayant des multiplications complexes.

Dans les deux cas, on peut en déduire que les puissances douzièmes des homothéties sont contenues dans l'image de la représentation.

4.2.3. *Lien avec le problème de Serre uniforme.* — Lorsque le corps de base est  $\mathbb{Q}$ , Mazur [3] a montré que l'ensemble des nombres premiers  $p$  pour lesquels l'image de  $\varphi_p$  peut être contenue dans un sous-groupe de Borel est fini (et borné par 163). Au vu de la liste des sous-groupes maximaux de  $GL_2(\mathbb{F}_p)$  donnée en 4.1, ce résultat constitue une partie importante du théorème de Serre uniforme sur  $\mathbb{Q}$ . Sa généralisation à un corps de nombres  $K$  quelconque consisterait à montrer que, pour chacun des deux types de diagonale précédemment obtenus, soit  $p$  est plus petit qu'une borne ne dépendant que de  $K$ , soit la courbe  $E$  possède effectivement des multiplications complexes.

4.2.4. *Méthode de démonstration.* — La démonstration du résultat sur la diagonale de  $\varphi_p$  débute par une étude fine de la situation locale aux places hors de  $p$  et de l'action des sous-groupes d'inertie au-dessus de  $p$ .

On applique ensuite à une place hors de  $p$  la loi de réciprocité donnée par la théorie du corps de classes globale ; on obtient ainsi des relations entre toutes les informations locales, sous forme de congruences modulo  $p$ . Pour  $p$  assez grand, ces congruences deviennent des égalités, liant fortement les situations locales hors et au-dessus de  $p$ .

Une version effective du théorème de Chebotarev permet enfin de se ramener à un nombre fini de places hors de  $p$  pour obtenir une borne ne dépendant que de  $K$  et reconstruire les caractères diagonaux.

On obtient en réalité trois types possibles pour la puissance douzième de la diagonale de  $\varphi_p$  ; l'un d'eux, pour lequel l'un des deux termes diagonaux est trivial, est éliminé en utilisant les bornes uniformes sur l'ordre des points de torsion ([4], [6]).

## Références

- [1] A. David, *Caractère d'isogénie et borne uniforme pour les homothéties*, Thèse de doctorat, Université Louis Pasteur (Strasbourg), 2008.
- [2] C. Eckstein, *Homothéties, à chercher dans l'action de Galois sur des points de torsion*, Thèse de doctorat, Université Louis Pasteur (Strasbourg), 2005.
- [3] B. Mazur, Rational isogenies of prime degree (with an appendix by D. Goldfeld), *Invent. Math.*, t. 44(2), 1978, p. 129-162.

- [4] L. Merel, Bornes pour la torsion des courbes elliptiques sur les corps de nombres, *Invent. Math.*, t. 124(1-3), 1996, p. 437-449.
- [5] F. Momose, Isogenies of prime degree over number fields, *Compositio Math.*, t. 97(3), 1995, p. 329-348.
- [6] P. Parent, Bornes effectives pour la torsion des courbes elliptiques sur les corps de nombres, *J. Reine Angew. Math.*, t. 506, 1999, p. 85-116.
- [7] M. Raynaud, Schémas en groupes de type  $(p, \dots, p)$ , *Bull. Soc. Math. France*, t. 102, 1974, p. 241-280.
- [8] J.-P. Serre, Propriétés galoisiennes des points d'ordre fini des courbes elliptiques, *Invent. Math.*, t. 15(4), 1972, p. 259-331.

*Agnès David*

UMPA - ÉNS Lyon, 46 allée d'Italie, 69364 Lyon Cedex 07.

*E-mail* : Agnes.David@ens-lyon.org



# MODÉLISATION MATHÉMATIQUE POUR UN PROBLÈME DE RESTAURATION DE VIEUX FILMS

*Julie Delon & Agnès Desolneux*

**Résumé.** — Nous proposons ici de nous intéresser au problème de la restauration de certains défauts de luminosité qui apparaissent dans les vieux films. Nous montrons comment ce problème peut être modélisé mathématiquement, et comment, par l'introduction d'un opérateur de stabilisation locale du contraste, on peut restaurer ces films. Ceci est illustré par des exemples.

## 1. Introduction

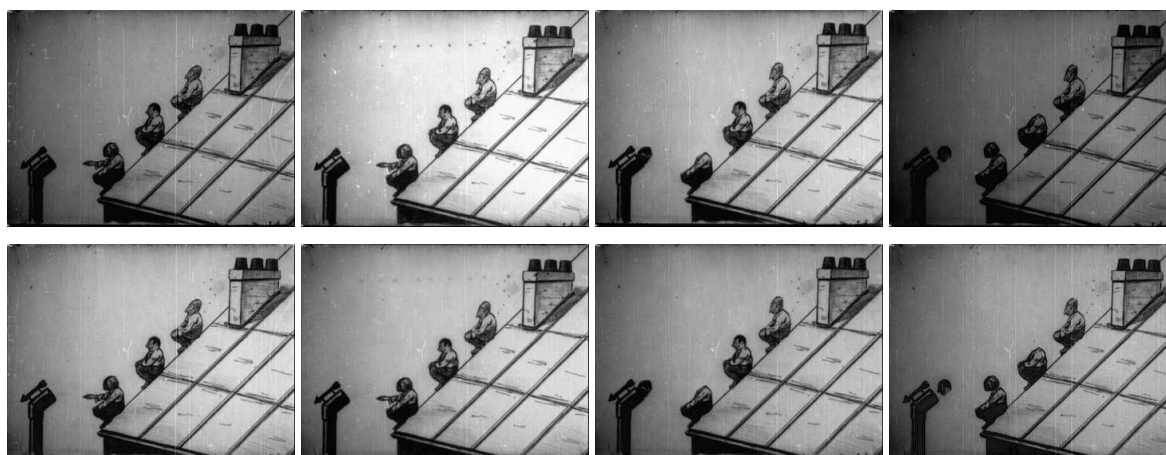


FIGURE 1. Images extraites du film *Les Aventures des Pieds Nickelés*, Emile Cohl/Eclair, 1917-1918 (copyright : Marc Sandberg), avant (1ère ligne) et après restauration (2ème ligne) par l'opérateur LStab.

Le *papillonnage* ou *flicker* est un artefact présent dans les vieux films, mais aussi dans de nombreuses vidéos. Il se caractérise par des variations brutales de contraste et/ou de luminosité d'une image à l'autre. Les causes principales du *flicker* présent

---

Ce travail a été financé par un projet jeunes chercheurs du GDR ISIS. Il a également été soutenu par l'Agence Nationale de la Recherche (ANR) dans le cadre du projet FREEDOM (ANR07-JCJC-0048-01), "Films, REstauration Et DONnées Manquantes".

dans les vieux films sont la dégradation chimique du support et le fait que lorsque la pellicule du film était entraînée manuellement, le temps d'exposition n'était pas toujours le même d'une image à l'autre. Contrairement à d'autres artefacts observés dans les vieux films (rayures, poussières, etc.), le *flicker* ne fait pas apparaître de nouvelles structures saillantes dans les images. Sa particularité est donc d'être transparent, voire quasiment "invisible" sur une seule image. Seul le visionnage des images successives du film permet de se rendre compte de sa présence. Ceci est illustré par la 1ère ligne de la figure 1, sur quelques images tirées d'un vieux film. Les méthodes de correction du *flicker* doivent par conséquent impérativement utiliser la comparaison avec les images suivantes et précédentes du film. Toutes les séquences montrées dans ce papier, ainsi que d'autres exemples sont disponibles sur le site [http://www.tsi.enst.fr/~delon/Demos/Flicker\\_stabilization/](http://www.tsi.enst.fr/~delon/Demos/Flicker_stabilization/), ainsi que dans la publication [4]. Le *flicker* peut affecter de façon globale toute une image, mais il peut aussi être localisé seulement sur une partie de l'image. Au centre de la Figure 4, on peut observer une image de la séquence *taxi*, altérée par un voile sombre qui traverse l'image en diagonale. Ce voile est difficilement perceptible sur une image isolée, mais devient extrêmement gênant lorsqu'on visualise le film en mouvement. On parle alors de *flicker local*. Ainsi, les méthodes de correction du *flicker* peuvent se ranger en deux catégories : celles qui cherchent à résoudre le problème de façon globale et celles qui cherchent à le résoudre de façon locale. Les méthodes globales [1, 7, 11] ont généralement l'avantage d'être robustes aux différents mouvements, tremblements ou bruits éventuels. Les méthodes locales [6, 8, 9, 10, 12] quant à elles peuvent prendre en compte des changements de contraste locaux, mais elles sont alors *a priori* dépendantes de l'estimation du mouvement. Le mouvement est en effet une des principales difficultés dans le problème de correction du *flicker* : en première approximation, la variation de niveau de gris d'un pixel au cours du temps peut-être soit due au *flicker* (et il faut alors la corriger), soit due au mouvement (voir la Figure 2) et c'est alors une variation "normale" qu'il faut conserver. Observons que d'autres défauts, comme par exemple les poussières, rayures ou tremblements, inhérents aux films anciens, peuvent entraver la correction du *flicker*.



FIGURE 2. Exemple "jouet" d'un film affecté d'un *flicker* global. Un pixel de l'image peut voir son niveau de gris fluctuer dans le temps. Certaines variations de niveau de gris sont dues au *flicker*, mais d'autres peuvent être dues au mouvement (ce qui est par exemple le cas d'un pixel au centre de l'image, et sur lequel le personnage va passer).



## 2. Egalisation de contraste et moyenne d'histogrammes

Dans toute la suite, on adoptera les notations suivantes :  $t$  et  $s$  seront des variables de temps et  $x, y$  des variables spatiales. Le film dégradé sera noté  $u = \{(u_t(x))\}$  où  $u_t$  est l'image à l'instant  $t$ . On notera  $\Omega$  le domaine de définition des images, en général un domaine rectangulaire du plan  $\mathbb{R}^2$  ou de  $\mathbb{Z}^2$  (dans le cas des images discrètes). Nous considérerons uniquement ici le cas de films en noir et blanc, ce qui veut dire que chaque image  $u_t$  est vue comme une fonction définie sur  $\Omega$  et à valeurs dans  $\mathbb{R}_+$ . Le film original, qui lui est non observé, est noté  $u^0$ . Dire qu'une image  $u_t$  subit un *changement de contraste* veut dire qu'elle est changée en  $g(u_t)$  où  $g$  est une fonction croissante de  $\mathbb{R}_+$  dans lui-même. Un pixel  $x$  de l'image  $u_t$  voit son niveau de gris  $u_t(x)$  être transformé en  $g(u_t(x))$ . La principale propriété d'un changement de contraste est qu'il ne change pas le contenu "géométrique" d'une image, c'est à dire que la *carte topographique* de l'image n'est pas modifiée. Cette dernière est définie comme la réunion des frontières des ensembles de niveau inférieurs ou supérieurs de l'image  $u_t$ , respectivement donnés par :

$$\chi_\lambda(t) = \{x \in \Omega \text{ tel que } u_t(x) \geq \lambda\} \text{ et } \chi^\lambda(t) = \{x \in \Omega \text{ tel que } u_t(x) \leq \lambda\}.$$

Lors d'un changement de contraste, les ensembles de niveau sont préservés dans leur ensemble (un ensemble de niveau  $\lambda$  pour  $u_t$  devient un ensemble de niveau  $g(\lambda)$  pour  $g(u_t)$ ).

On dira que  $g$  est un *changement de contraste affine* s'il est de la forme  $g(\lambda) = a\lambda + b$  avec  $a, b$  réels et  $a > 0$ . Etant donnée  $u_t$  une image du film, on notera  $h_t$  son histogramme, c'est à dire la distribution de ses valeurs de niveau de gris, et  $H_t$  son histogramme cumulé. Dans le cas d'une image discrète, définie sur une grille  $\Omega$  de  $N^2$  pixels et à valeurs dans  $\{0, \dots, L\}$ , l'histogramme cumulé  $H_t : \{0, \dots, L\} \rightarrow \{0, \dots, N^2\}$  est donné par :

$$H_t(\lambda) = |\{x \in \Omega | u_t(x) \leq \lambda\}|,$$

où  $|\cdot|$  désigne le cardinal d'un ensemble. Cette définition conduit aux interprétations suivantes :

- Soit  $x \in \Omega$ , alors  $H_t(u_t(x))$  est le *rang* de  $x$ , lorsque les niveaux de gris de  $u_t$  sont ordonnés de façon croissante.
- Soit  $k$  entier, alors  $H_t^{-1}(k) = \min\{\lambda ; H_t(\lambda) \geq k\}$  est le niveau de gris du pixel de rang  $k$ .
- Soit  $G$  une fonction discrète strictement croissante sur  $\{0, \dots, L\}$ . Alors l'image  $v_t = G^{-1} \circ H_t(u_t)$  est une image dont l'histogramme cumulé est donné par la fonction  $G$ .

Avant de moyenner le contraste de toute une séquence d'images, commençons par regarder le cas de deux images. Soient donc  $u_1$  et  $u_2$  deux images discrètes définies sur une grille  $\Omega$  de  $N^2$  pixels, et à valeurs dans  $\{0, \dots, L\}$ . Afin de moyenner le

contraste de  $u_1$  et  $u_2$ , on pourrait simplement appliquer à chaque image un changement de contraste qui amènerait son histogramme de niveaux de gris sur l’histogramme moyen  $(h_1 + h_2)/2$ . Mais ceci n’est pas satisfaisant. Prenons l’exemple d’un histogramme unimodal (par exemple gaussien) pour  $u_1$ , centré en une certaine valeur  $m_1$ , et d’un histogramme unimodal pour  $u_2$ , centré en  $m_2 \neq m_1$ . L’histogramme moyen serait alors une distribution contenant deux modes, l’un en  $m_1$  et l’autre en  $m_2$ , alors qu’il serait beaucoup plus naturel d’obtenir un histogramme unimodal centré en  $(m_1 + m_2)/2$ . Comme l’a montré J. Delon dans [3], la “bonne” méthode pour faire correctement l’égalisation est la suivante : on note  $H_i$  les histogrammes cumulés discrets respectifs, et on appelle *distribution mi-chemin* ou *midway* entre  $H_1$  et  $H_2$  la fonction

$$H_{1/2} = \left( \frac{H_1^{-1} + H_2^{-1}}{2} \right)^{-1}.$$

### 3. Correction du flicker global

Passons maintenant à l’égalisation de contraste pour une séquence d’images, c’est à dire par exemple au cas d’un film dégradé par un *flicker* global. J. Delon a montré dans [2] la proposition suivante, qui donne la forme canonique de la méthode de réduction du *flicker* lorsqu’on suppose certains axiomes élémentaires.

**Proposition 3.1.** — [2] Soit  $u_t$  un film et  $H_t$  les histogrammes discrets des images du film. Soit  $T$  un opérateur de correction du flicker qui suit les axiomes suivants :

- $T$  agit par changement de contraste sur chaque image,
- Pour tout réel  $\lambda$ , l’action de  $T$  sur les ensembles de niveaux inférieurs  $\chi_\lambda(t)$  des images du film est indépendante de son action sur les ensembles de niveau supérieurs  $\chi^\lambda(t)$ ,
- $T$  agit sur les films constitués d’images spatialement constantes comme un *scale space* linéaire (c’est-à-dire comme un opérateur de convolution temporelle avec une fonction gaussienne, voir [5]). Alors il existe un paramètre d’échelle  $\sigma$ , tel que l’opérateur  $T$  s’écrive :

$$(1) \quad T[u_t](x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int e^{-(t-s)^2/2\sigma^2} \underbrace{H_s^{-1} \circ H_t(u_t(x))}_{\substack{\text{rang de } x \text{ dans } u_t \\ \text{niveau de gris du pixel de même rang que } x \text{ dans } u_s}} ds.$$

Cette méthode de réduction du *flicker* est très simple à mettre en oeuvre et donne de bons résultats dès lors que le *flicker* que l’on souhaite corriger agit bien globalement sur le film (voir par exemple la Figure 3). Cependant, il est bien évident qu’une méthode agissant comme un changement de contraste global sur chaque image du film ne peut pas éliminer un *flicker* local comme celui présent dans les exemples des Figures 1 et 4.


 (a) Images extraites du film *The Cure*, Charlie Chaplin, 1917

 (b) Images après correction globale du *flicker* par l'équation (1)

 FIGURE 3. Un exemple de correction globale du *flicker*.

#### 4. Correction du flicker local

L'idée de la méthode de réduction du *flicker* local sera de corriger localement le contraste de chaque image du film à l'aide de moyennes pondérées d'histogrammes locaux cumulés inverse - comme dans la Proposition 3.1. Soit  $u$  un film dégradé par du *flicker local*. Pour  $u_t$  image du film et pour  $x \in \Omega$ , on regarde une imagerie de la forme  $u_t(x+V)$  centrée en  $x$ . On note  $H_{t,x+V}$  son histogramme cumulé. Pour estimer le correspondant du pixel  $x$  dans l'image en un temps  $s \neq t$ , il faut tenir compte du mouvement mais aussi du flicker éventuel, c'est pour cela qu'on estime ce point noté  $\varphi_{t,s}(x)$  par :

$$\varphi_{t,s}(x) = \operatorname{Argmin}_{y \in x+W} D(u_t(x+V), u_s(y+V)),$$

où  $D$  est une mesure de similarité entre imageries, robuste aux changements de contraste affines et qui est donnée par

$$\begin{aligned} D(I, J) &= \max \left( \min_{a>0, b} \| I - aJ - b \|, \min_{a>0, b} \| J - aI - b \| \right) \\ &= \sqrt{\max(\operatorname{Var}(I), \operatorname{Var}(J)) \cdot \min(1, 1 - \operatorname{Corr}(I, J)) |\operatorname{Corr}(I, J)|} \end{aligned}$$

où  $\operatorname{Var}(I)$ ,  $\operatorname{Var}(J)$  et  $\operatorname{Corr}(I, J)$  sont respectivement les variances et corrélation empiriques de  $I$  et  $J$ .

On peut alors définir un nouvel opérateur de correction du *flicker local* par :

$$(2) \quad \operatorname{LStab}[u_t](x) = \frac{1}{Z_{t,x}} \int_s w_{t,x}(s, \varphi_{t,s}(x)) H_{s, \varphi_{t,s}(x)+V}^{-1} (H_{t,x+V}(u_t(x))) ds,$$

où  $w_{t,x}(s, y)$  est une fonction de pondération donnée par

$$w_{t,x}(s, y) = e^{-D^2(u_t(x+V), u_s(y+V))/h^2}$$

avec  $h$  paramètre à régler par l'utilisateur et  $Z_{t,x}$  constante de renormalisation qui assure que la somme totale de tous les poids vaut 1. Des exemples de résultats obtenus par l'opérateur LStab sont montrés sur les figures 1 et 4. Ils montrent que le contraste est localement bien stabilisé. En particulier le voile sombre sur la séquence 4 a complètement disparu.



(a) Séquence comportant un flicker local (voile sombre traversant l'image)



(b) Après restauration par l'opérateur LStab

FIGURE 4. Exemple de restauration d'une séquence affectée par un *flicker local*.

### Références

- [1] E. Decencière, *Restauration automatique de films anciens*, PhD thesis, Ecole Nationale Supérieure des Mines de Paris, December 1997.
- [2] J. Delon, Movie and Video Scale-Time Equalization ; application to flicker reduction, *IEEE Transactions on Image Processing*, vol. 15, no. 1, pp.241-248, 2006.
- [3] J. Delon, Midway Image Equalization, *Journal of Mathematical Imaging and Vision*, vol. 21, no. 2, pp.119-134, 2004.
- [4] J. Delon and A. Desolneux, Flicker stabilization in image sequences, preprint HAL-00407796, 2009.
- [5] T. Lindeberg, On the axiomatic foundations of linear scale-space : combining semi-group structure with causality vs. scale invariance. In *Gaussian Scale-Space Theory : Proc. PhD School on Scale-Space Theory* (1997).
- [6] G. Forbin and T. Vlachos, Nonlinear Flicker Compensation for Archived Film Sequences Using Motion-Compensated Graylevel Tracing, *IEEE Transactions on Circuits and Systems for Video Technology*, vol. 18, no. 6, pp. 803-816, 2008.
- [7] V. Naranjo and A. Albiol, Flicker reduction in old films, In *Proceedings of the International Conference on Image Processing (ICIP 2000)*, pp.657-659, 2000.

- [8] F. Pitié, R. Dahyot, F. Kelly and A. C. Kokaram, A New Robust Technique for Stabilizing Brightness Fluctuations, In *2nd Workshop on Statistical Methods in Video Processing*, Prague, 2004.
- [9] F. Pitié, B. Kent, B. Collis and A. Kokaram, Localised deflicker of Moving Images, In *European Conference on Visual Media Production (CVMP'06)*, 2006.
- [10] P.M.B. van Roosmalen, R.L. Lagendijk and J. Biemond, Correction of intensity flicker in old film sequences, *IEEE Transactions on Circuits and Systems for Video Technology*, vol. 9, no. 7, pp.1013-1019, 1999.
- [11] T. Vlachos, Flicker correction for archived film sequences using a nonlinear model, *IEEE Transactions on Circuits and Systems for Video Technology*, vol. 14, no. 4, pp. 508-516, 2004.
- [12] K.K. Wong, A. Das and M.N. Chong, Improved Flicker Removal through Motion Vectors, In *Proceedings of the Third International Conference on Image and Graphics*, pp.552 - 555, 2004.

*Julie Delon*

LTCI, Télécom Paris (CNRS UMR 5141), 46 rue Barrault, 75634 Paris cedex 13..

*E-mail* : julie.delon@enst.fr

*Agnès Desolneux*

MAP5 (CNRS UMR 8145), Université Paris Descartes, 45 rue des Saints-Pères,  
75270 Paris cedex 06..

*E-mail* : agnes.desolneux@parisdescartes.fr



# WHEN A LOGARITHM IS A MISPELLED ALGORITHM

*Mioara Joldes*

*Résumé.* — The high-quality floating-point implementation of elementary functions is a complex process. A variety of techniques ranging from numerical polynomial approximation algorithms to rigorous computation for bounding the approximation error are used. Firstly, we present a brief overview of this process. Then we show how rigorous computation methods based on multiprecision interval arithmetic and Taylor models are used for certified computation of tight bounds for supremum norms of approximation errors.

## 1. General research context

In many floating-point software systems there is a need for computing approximated values of mathematical functions such as  $\exp$ ,  $\log$ ,  $\sin$ ,  $\arccos$ , or some compositions of them. These elementary functions are usually implemented in mathematical libraries called `libm`. Such libraries are available on most systems and many numerical programs depend on them. The word game, "A logarithm is just a misspelled algorithm", finds a proper signification in the general context of this work : the implementation and evaluation of an elementary function (like  $\log$ ) on a computer. Usually, this is reduced to a simple finite sequence of floating-point additions and multiplications. These operations are preferred because they are highly optimized in current hardware. A brief overview of the process of implementing elementary functions on a computer (in a floating-point environment) and of additional tools required for this process is presented in what follows. Starting early in the history of computing architectures, the floating-point format is used for approximate computation with real numbers. Before 1985, floating-point computations were very heterogeneous depending on the computer platform on which they were performed, which led to many numerical errors. The IEEE-754 standard adopted in 1985, defines binary floating-point formats :  $\mathcal{F}_t = \{2^E \cdot m \mid E \in \mathbb{Z}, m \in \mathbb{Z}, 2^{t-1} \leq |m| \leq 2^t - 1\} \cup \{0\}$

of precision  $t$ . For example, with the required bounds on  $E$ ,  $\mathcal{F}_{24}$  is the single precision format. It also defines exact semantics for the basic operations ( $+$ ,  $\hat{\text{L}}\check{\text{S}}$ ,  $\times$ ,  $\div$  and  $\sqrt{\phantom{x}}$ ). All these operations have to produce correctly rounded results, as if the operations were carried out in infinite precision and these intermediate results were then rounded. This contributed to a certain level of portability and provability of floating-point algorithms across standard-compliant platforms. However, most of real applications use also elementary functions. But until recently, there was no such requirement for these functions. The main impediment for this was the table maker's dilemma (TMD) [2], named in reference to the early builders of logarithm tables. This problem can be stated as follows : consider an elementary function  $f$  and a floating-point number  $x$ . Since floating-point numbers are rational numbers, in many cases, the image  $y = f(x)$  is not a rational number, and therefore, cannot be represented exactly as a floating-point number. The correctly rounded result will be the floating-point number that is closest to this mathematical value. Using a finite precision environment (on a computer), only an approximation  $\hat{y}$  to the real number  $y$  can be computed. If the accuracy used for computation is not enough, it is impossible to decide the correct rounding of  $\hat{y}$ . A technique published by Ziv [1] is to improve the accuracy of the approximation until the correctly rounded value can be decided. A first practical improvement over Ziv's approach derives from the availability of tight bounds on the worst-case accuracy required to compute many elementary functions, computed by Lefevre and Muller [2]. This improvement allowed for the possibility of writing a libm where the functions are correctly rounded and this is obtained at known and modest additional costs. This is one of the main purposes of the *Arenaire* team that develops the *CRLibm* project [3]. In the new standard IEEE754-2008, correct rounding for elementary functions is recommended. The participation of leading microprocessor manufacturers like Intel or AMD for this standard revision proves that the purpose of *CRLibm* was achieved : the requirement of correct rounding for elementary functions is compatible with industrial requirements and can be done for a modest additional cost compared to a classical libm. However, beside the TMD, the development and implementation of correctly rounded elementary functions is a complex process. A general scheme for this would include :

- Use the above mentioned methods of Muller and Lefevre [2] to obtain the necessary precision  $t$  in the worst-cases.
- Argument reduction for the function  $f$  to be considered : this involves the reduction of the problem to evaluating a function  $g$  over a small interval  $[a, b]$ . For this different ad-hoc methods are used on a case by case basis for each function.
- Find a polynomial approximation  $p_1$  for  $g$  such that the maximum relative error between  $p_1$  and  $g$  is small enough to allow for correct rounding in the general case. Find a polynomial approximation  $p_2$  for  $g$  such that the maximum relative error between  $p_2$  and  $g$  is small enough (less than  $2^{-t}$ ) to allow for correct rounding in the



worst-case. Obtaining good polynomial approximations and the certification of the approximation errors is detailed below.

– Write the code for evaluating  $p_1$  and  $p_2$  with the required accuracy. In this step round-off errors have to be taken into account for each multiplication and addition such that the total error stays below the required threshold.

## 2. Rigorous and tight bounding of approximation errors

As mentioned above, one key step in the implementation of elementary functions is polynomial approximation. This is preferred since polynomials can be evaluated completely based only on multiplications and additions. But since in general, polynomial operations are easier to use or implement, there are many other applications where it is useful to have a polynomial approximation to a function. In the same time, the approximation error between the function and the polynomial is very important since one must know that the approximation is sufficiently good for the respective application.

In general, since we want to minimize the number of operations needed for evaluation, we are interested in finding polynomial approximations for which, given a degree  $n$ , the maximum error between the function and the polynomial is minimum. The “minimax approximation” has been broadly developed in the literature and its application to elementary function implementation is discussed in detail in S. Chevillard’s thesis [4]. Usually this approximant is computed numerically, using a version of Remez algorithm [4], so an a posteriori error bound is needed.

Obtaining a tight bound for the approximation error reduces to computing a tight bound for the supremum norm of the error function over the considered interval. This error function is given by  $\varepsilon(x) = p(x)/f(x) - 1$  or  $\varepsilon(x) = p(x) - f(x)$  depending on whether the relative or absolute error is considered. In other words, we are looking for a sufficiently tight interval  $\mathbf{r}$ , such that  $\|\varepsilon\|_\infty \in \mathbf{r}$ . Here,  $\|\varepsilon\|_\infty$  denotes the supremum norm, defined by  $\|\varepsilon\|_\infty = \sup_{x \in [a, b]} \{|\varepsilon(x)|\}$ . The presented problem can be seen as a univariate rigorous global optimization problem, but it seems to present many issues unsuspected at a first sight [5]. In consequence, we present two rigorous computing techniques that we used for solving this problem : interval arithmetic and Taylor models. In what concerns reliability in computation with finite precision numbers and validation of the results obtained, one well established technique is interval arithmetic. In the framework of interval arithmetic, we define an interval  $\mathbf{x}$  as a pair  $\mathbf{x} = [\underline{x}, \bar{x}]$  consisting of two numbers  $\underline{x}$  and  $\bar{x}$  with  $\underline{x} \leq \bar{x}$ . A real number  $x \in \mathbb{R}$  is *contained* in an interval  $\mathbf{x}$ , i.e.,  $x \in \mathbf{x}$ , iff  $\underline{x} \leq x \leq \bar{x}$ . The elementary arithmetic operations, as well as the elementary functions can be straightforwardly extended to handle intervals. If the endpoints of an interval are not representable on a given computer, outward rounding, possibly in multiprecision arithmetic, is performed. The MPFI library [6] provides such a multiprecision interval arithmetic :

when performing an operation, the user chooses the precision used for representing the bounds of the result. The precision may be arbitrarily high.

One fundamental use of interval arithmetic is bounding the image of a function over an interval. However, it is very well known that interval calculations generally overestimate the image of a function and this phenomenon is in general proportional to the width of the interval. We are therefore interested in using thin intervals for obtaining a reasonably tight bounding of the function image.

While this method can be successfully used in general, when trying to solve our problem, one is faced with what is known in the literature of interval based methods under the name of "dependency phenomenon". Roughly speaking, since  $f$  and  $p$  are highly correlated, branch and bound methods based on using intervals of smaller width in order to obtain less overestimation, end up with an unreasonably high number of small intervals. Note that the difference between  $f$  and  $p$  is also highly cancelling, but this can be avoided using multiprecision interval arithmetic.

In order to reduce the dependency, Taylor models are used. They are a basic tool for replacing functions with a polynomial and an interval remainder bound, on which basic arithmetic operations or bounding methods are easier. When speaking about Taylor models, one usually considers a couple  $(p, R)$ , where  $p$  is the Taylor polynomial, and  $R$  is an interval bound for the Taylor remainder.

Thus, we have :  $\forall x \in I, f(x) - p(x) \in R$ . Arithmetic operations can be easily defined on such couples. For example, the sum of two Taylor models is obtained by adding the polynomials and the interval remainders respectively. For all others operations and compositions with elementary we refer to [7]. However, the available software implementations for Taylor models are scarce. The best known is COSY [7]. Although highly optimised and used, COSY has two major drawbacks for our specific problem. First, it does not provide multiple precision arithmetic, and thus fails to solve the cancellation problem mentioned. Second, it does not deal with the problem of functions with false singularities (that appear frequently in our case when considering relative errors), thus failing to provide a finite bound for the remainder for such functions.

### 3. Results and Conclusions

Multiprecision interval arithmetic and Taylor models are used in order to compute rigorous and tight bounds for approximation errors. The techniques presented above were implemented and used for example for one function needed in the code of `CRlibm`.

### Références

- [1] A. Ziv, *Fast evaluation of elementary mathematical functions with correctly rounded last bit*, ACM Transactions on Mathematical Software, 17(3) :410-423, 1991.
- [2] V. Lefevre, J.-M. Muller, *Worst cases for correct rounding of the elementary functions in double precision*, 15th IEEE Symposium on Computer Arithmetic, Colorado, June 2001.
- [3] CRLibm, *a library of correctly rounded elementary functions in double-precision*, <http://lipforge.ens-lyon.fr/www/crlibm/>.
- [4] S. Chevillard, *Évaluation efficace de fonctions numériques. Outils et exemples*, École Normale Supérieure de Lyon, Lyon, France, 2009.
- [5] S. Chevillard, M. Joldes, C. Lauter *Certified and fast computation of supremum norms of approximation errors*, 19th IEEE SYMPOSIUM on Computer Arithmetic, Los Alamitos, CA, Portland, OR, 169–176, 2009
- [6] MPFI, *Multiple Precision Floating-Point Interval Library*, <http://gforge.inria.fr/projects/mpfi/>.
- [7] K. Makino and M. Berz, *Taylor Models and Other Validated Functional Inclusion Methods*, International Journal of Pure and Applied Mathematics, Vol. 4, 379–456, 2003.

*Mioara Joldes*

Laboratoire de l'Informatique du Parallélisme, École Normale Supérieure de Lyon,  
46, Allée d'Italie 69364 Lyon Cedex 07.

*E-mail* : [mioara.joldes@ens-lyon.fr](mailto:mioara.joldes@ens-lyon.fr)



# QUOTIENTS COMPACTS DES GROUPES SEMI-SIMPLES DE RANG UN

*Fanny Kassel*

*Résumé.* — Soit  $\mathbf{k}$  un corps local. Nous décrivons les sous-groupes discrets de  $SL_2(\mathbf{k}) \times SL_2(\mathbf{k})$  qui agissent librement, proprement et cocompactement sur  $SL_2(\mathbf{k})$  par translation à gauche et à droite, et nous étudions leur déformation. Pour  $\mathbf{k} = \mathbb{R}$ , ceci s'applique à la géométrie lorentzienne et plus particulièrement aux variétés anti-de Sitter compactes de dimension trois. Pour  $\mathbf{k} = \mathbb{Q}_p$ , cela permet notamment de décrire les quotients des quadriques  $p$ -adiques de dimension trois.

## 1. Motivations

Soit  $G'/G$  un espace homogène, où  $G'$  est un groupe de Lie linéaire réel et  $G$  un sous-groupe fermé de  $G'$ . Il est naturel de s'intéresser aux variétés compactes localement modelées sur  $G'/G$ , et notamment à la classe importante des quotients compacts  $\Gamma \backslash G'/G$ , où  $\Gamma$  est un sous-groupe discret de  $G'$  dont l'action sur  $G'/G$  est propre et libre (afin que  $\Gamma \backslash G'/G$  soit une variété). La condition de propreté impose de fortes restrictions sur  $\Gamma$  lorsque  $H$  n'est pas compact : il suffit pour s'en convaincre de considérer l'exemple de  $G' = SL_2(\mathbb{R})$  et du sous-groupe  $G$  des matrices unipotentes triangulaires supérieures, pour lequel tout groupe discret agissant proprement sur  $G'/G$  est fini. En revanche, la condition de liberté n'est pas très contraignante, car si le groupe  $\Gamma$  agit proprement et cocompactement sur  $G'/G$ , il admet toujours un sous-groupe d'indice fini sans torsion ; autrement dit,  $\Gamma \backslash G'/G$  admet toujours un revêtement fini par une variété compacte.

La théorie des quotients compacts d'espaces homogènes trouve ses origines dans l'étude des groupes discrets d'isométries d'espaces riemanniens symétriques et dans celle des variétés pseudo-riemanniennes complètes de courbure constante. À la fin des années 1980, T. Kobayashi a initié l'étude générale des quotients compacts d'espaces homogènes réels. Depuis, les questions d'existence, de description et de déformation de quotients compacts ont suscité de nombreux travaux et le développement de méthodes variées, bien que de nombreuses questions restent ouvertes à ce

jour : par exemple celle de l'absence de quotients compacts de  $SL_n(\mathbb{R})/SL_m(\mathbb{R})$  pour  $n > m \geq 2$ .

Dans cet exposé nous considérons les espaces homogènes de la forme  $(G \times G)/\Delta_G$ , où  $G$  est un groupe semi-simple connexe de rang relatif un sur  $\mathbb{R}$ , ou plus généralement sur un corps local  $\mathbf{k}$ , et où  $\Delta_G$  est la diagonale de  $G \times G$ . De manière équivalente, nous nous intéressons aux sous-groupes discrets de  $G \times G$  qui agissent proprement sur  $G$  par translation à gauche et à droite. Dans la suite nous nous concentrons sur l'exemple de  $G = SL_2(\mathbf{k})$ .

## 2. Description des quotients compacts de $(G \times G)/\Delta_G$

Soit  $\mathbf{k}$  un corps local, c'est-à-dire  $\mathbb{R}$ ,  $\mathbb{C}$ , un corps  $p$ -adique ou le corps  $\mathbb{F}_q((t))$  des séries de Laurent formelles à coefficients dans un corps fini  $\mathbb{F}_q$ , et soit  $G = SL_2(\mathbf{k})$  (ce qui suit se généralise à un groupe de Lie linéaire semi-simple réel connexe  $G$  de rang réel un ou à l'ensemble  $G$  des  $\mathbf{k}$ -points d'un  $\mathbf{k}$ -groupe algébrique semi-simple connexe de  $\mathbf{k}$ -rang un).

Rappelons que  $G = SL_2(\mathbf{k})$  admet une *décomposition de Cartan*  $G = KA^+K$ , où  $K$  est un sous-groupe compact maximal de  $G$  et  $A^+$  une chambre de Weyl d'un sous-groupe de Cartan de  $G$  (ou de l'ensemble des  $\mathbf{k}$ -points d'un tore déployé maximal). Par exemple, pour  $\mathbf{k} = \mathbb{R}$  (resp.  $\mathbf{k} = \mathbb{C}$ ) on peut prendre  $K = SO(2)$  (resp.  $K = SU(2)$ ) et  $A^+ = \{\text{diag}(a, a^{-1}), a \geq 1\}$  : la décomposition  $G = KA^+K$  résulte alors de la décomposition polaire et de la réduction des matrices symétriques (resp. hermitiennes). Pour  $\mathbf{k} = \mathbb{Q}_p$  on peut prendre  $K = SL_2(\mathbb{Z}_p)$  et  $A^+ = \{\text{diag}(a, a^{-1}), |a|_p \geq 1\}$  : la décomposition  $G = KA^+K$  résulte alors du théorème de la base adaptée. Ceci permet de définir une application continue et propre  $\mu : G \rightarrow \mathbb{R}^+$ , appelée *projection de Cartan*, comme "le logarithme de la projection sur  $A^+$ ". Par exemple, pour  $\mathbf{k} = \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$  le réel  $\mu(g)$  est le logarithme de la plus grande valeur propre de  ${}^t\bar{g}g$  ; pour  $\mathbf{k} = \mathbb{Q}_p$ , si  $p^n g \in M_2(\mathbb{Z}_p)$  on a  $\mu(g) = |v_p(a_g/a'_g)|$ , où  $a_g$  et  $a'_g$  sont les facteurs invariants de  $p^n g$  et où  $v_p : \mathbb{Q}_p \rightarrow \mathbb{Z}$  est la valuation  $p$ -adique.

Donnons tout d'abord une description des sous-groupes discrets sans torsion de  $G \times G$  qui agissent proprement sur  $G$  par translation à gauche et à droite.

**Théorème 2.1.** — *Soient  $\mathbf{k}$  un corps local et  $G = SL_2(\mathbf{k})$ . À la permutation près des deux facteurs de  $G \times G$ , les sous-groupes discrets sans torsion de  $G \times G$  agissant proprement sur  $G$  par translation à gauche et à droite sont les graphes de la forme*

$$\Gamma_0^{\rho} = \{(\gamma, \rho(\gamma)), \gamma \in \Gamma_0\},$$

où  $\Gamma_0$  est un sous-groupe discret de  $G$  et  $\rho : \Gamma_0 \rightarrow G$  un morphisme de groupes admissible, au sens où pour tout  $R > 0$  on a  $\mu(\rho(\gamma)) \leq \mu(\gamma) - R$  pour presque tout  $\gamma \in \Gamma_0$ .

On dit ici qu'une propriété est vraie *pour presque tout*  $\gamma \in \Gamma_0$  si elle l'est pour tout  $\gamma \in \Gamma_0$  en dehors d'un ensemble fini. La condition d'admissibilité signifie que

l'ensemble  $(\mu \times \mu)(\Gamma_0^p)$  est essentiellement situé sous la diagonale de  $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$  (à un nombre fini de points près) et qu'il "s'éloigne de la diagonale à l'infini".

Y. Benoist [1] a montré, à travers son *critère de propreté*, que de manière générale la propreté d'une action sur un espace homogène se voit sur une projection de Cartan.

Voici une condition nécessaire et suffisante de cocompacité.

**Théorème 2.2.** — Soient  $\mathbf{k}$  un corps local et  $G = \mathrm{SL}_2(\mathbf{k})$ . Soient  $\Gamma_0$  un sous-groupe discret de type fini sans torsion de  $G$  et  $\rho : \Gamma_0 \rightarrow G$  un morphisme admissible. Le quotient  $\Gamma_0^p \backslash (G \times G) / \Delta_G$  est compact si et seulement si le quotient  $\Gamma_0 \backslash G$  l'est.

Pour  $\mathbf{k} = \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ , le théorème 2.2 résulte d'un argument de dimension cohomologique [7]. Pour  $\mathbf{k}$  ultramétrique, il résulte d'un raisonnement géométrique sur l'arbre de Bruhat-Tits de  $G$  [5]. Rappelons que pour  $G = \mathrm{SL}_2(\mathbb{Q}_p)$  par exemple, l'arbre de Bruhat-Tits est un arbre régulier  $X$  de valence  $p + 1$ ; ses sommets s'identifient aux classes d'homothétie (modulo  $\mathbb{Q}_p^*$ ) de sous- $\mathbb{Z}_p$ -modules libres de rang 2 de  $\mathbb{Q}_p^2$ , ce qui permet de définir une action naturelle de  $G$  sur  $X$  par isométries.

Les théorèmes 2.1 et 2.2 permettent en particulier de construire de nombreux exemples de quotients compacts *non standard* de  $(G \times G) / \Delta_G$ , c'est-à-dire de quotients compacts par des sous-groupes qui ne sont *pas* de la forme  $\Gamma_0 \times \{1\}$  ou  $\{1\} \times \Gamma_0$ . Pour  $G = \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$  les premiers exemples ont été construits par Goldman [3].

### 3. Déformation des quotients compacts de $(G \times G) / \Delta_G$

**3.1. Le cas ultramétrique.** — L'une de nos motivations est le fait que pour  $G = \mathrm{SL}_2(\mathbb{Q}_p)$ , l'espace homogène  $(G \times G) / \Delta_G$  s'identifie à la quadrique de  $\mathbb{Q}_p^4$  d'équation  $x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 - x_4^2 = 1$ . Cette dernière est la seule quadrique de  $\mathbb{Q}_p^4$  dont la description des quotients compacts n'était pas connue.

Concernant la déformation de ces quotients, nous obtenons le résultat suivant.

**Théorème 3.1.** — Soient  $\mathbf{k}$  un corps local ultramétrique,  $G = \mathrm{SL}_2(\mathbf{k})$  et  $\Gamma$  un sous-groupe discret de type fini sans torsion de  $G \times G$  agissant proprement et cocompactement sur  $G$  par translation à gauche et à droite. Il existe un voisinage  $\mathcal{U} \subset \mathrm{Hom}(\Gamma, G \times G)$  de l'inclusion naturelle formé de morphismes injectifs et tel que pour tout  $\varphi \in \mathcal{U}$ , le groupe  $\varphi(\Gamma)$  soit discret dans  $G \times G$  et agisse proprement et cocompactement sur  $G$ .

Pour tout arbre réel simplicial  $X$  et toute isométrie  $g \in \mathrm{Isom}(X)$ , notons  $\lambda(g) = \inf_{x \in X} d(x, g \cdot x)$  la longueur de translation de  $g$ . Rappelons que si  $\Gamma_0$  est un sous-groupe discret sans torsion de  $\mathrm{Isom}(X)$ , alors pour tout  $\gamma \in \Gamma_0 \setminus \{1\}$  on a  $\lambda(\gamma) > 0$  et il existe une unique droite géodésique  $\mathcal{A}_\gamma$  de  $X$  (l'axe de translation de  $\gamma$ ) sur laquelle  $\gamma$  agit par translation (de longueur  $\lambda(\gamma)$ ). Via la théorie de Bruhat-Tits, le théorème 3.1 est une conséquence du résultat suivant sur les arbres.

**Proposition 3.2.** — Soient  $X$  et  $X'$  deux arbres réels simpliciaux,  $\Gamma_0$  un sous-groupe discret sans torsion de  $\text{Isom}(X)$  tel que le quotient  $\Gamma_0 \backslash X$  soit un graphe fini et  $\rho : \Gamma_0 \rightarrow \text{Isom}(X')$  un morphisme de groupes.

(1) La borne inférieure  $C_\rho$  des constantes de Lipschitz d'applications  $\rho$ -équivariantes de  $X$  dans  $X'$  est finie et atteinte.

(2) Fixons un point  $x_0 \in X$  et soit  $F$  le sous-ensemble fini de  $\Gamma_0 \setminus \{1\}$  formé des éléments  $\gamma$  tels que  $d(x_0, \gamma \cdot x_0) \leq 4L$ , où  $L$  est la longueur totale des arêtes du graphe fini  $\Gamma_0 \backslash X$ . Pour toute application  $\rho$ -équivariante et  $C_\rho$ -lipschitzienne  $f : X \rightarrow X'$ , il existe  $\gamma \in F$  tel que  $f$  soit affine de constante  $C_\rho$  sur  $\mathcal{A}_\gamma$ . On a

$$\sup_{\gamma \in \Gamma_0 \setminus \{1\}} \frac{\lambda(\rho(\gamma))}{\lambda(\gamma)} = \max_{\gamma \in F} \frac{\lambda(\rho(\gamma))}{\lambda(\gamma)} = C_\rho.$$

(3) Le morphisme  $\rho$  est admissible si et seulement si  $C_\rho < 1$ .

On dit ici que  $f : X \rightarrow X'$  est  $\rho$ -équivariante si  $f(\gamma \cdot x) = \rho(\gamma) \cdot f(x)$  pour tout  $\gamma \in \Gamma_0$  et tout  $x \in X$ ; on dit que  $\rho : \Gamma_0 \rightarrow \text{Isom}(X')$  est admissible si pour tout  $x'_0 \in X'$  et tout  $R > 0$  on a  $d(x'_0, \rho(\gamma) \cdot x'_0) \leq d(x_0, \gamma \cdot x_0) - R$  pour presque tout  $\gamma \in \Gamma_0$ .

Soit  $\Gamma_0$  un sous-groupe de type fini sans torsion de  $G$ . D'après la proposition 3.2 (appliquée à l'arbre de Bruhat-Tits de  $G$ ), l'admissibilité d'un morphisme  $\rho : \Gamma_0 \rightarrow G$  est déterminée par un nombre fini de conditions ouvertes, donc l'ensemble des morphismes admissibles est ouvert dans  $\text{Hom}(\Gamma_0, G)$ . On en déduit le théorème 3.1.

Soit  $n$  le rang du groupe libre  $\Gamma_0$ . La proposition 3.2 implique l'existence d'une "distance asymétrique" sur l'outre-espace de rang  $n$ , et l'équivalence entre deux définitions différentes de cette distance asymétrique. Rappelons que l'outre-espace est un ensemble de classes d'équivalence de graphes métriques finis connexes normalisés et marqués par un groupe libre  $F_n$  à  $n$  générateurs.

**3.2. Variétés anti-de Sitter compactes de dimension trois.** — Les variétés anti-de Sitter compactes de dimension 3, ou variétés lorentziennes compactes de dimension 3 de courbure constante strictement négative, sont complètes [6]. À une isométrie, à la renormalisation de la métrique et à un revêtement fini près, ce sont les quotients compacts de  $(G \times G)/\Delta_G$  pour  $G = \text{SL}_2(\mathbb{R})$ . Nous précisons leur description (cf. [6], [9], [10]) en démontrant le résultat suivant.

**Théorème 3.3.** — Soit  $\Gamma_0$  un réseau cocompact de  $G = \text{SL}_2(\mathbb{R})$  (i.e. un sous-groupe discret tel que  $\Gamma_0 \backslash G$  soit compact). Un morphisme  $\rho : \Gamma_0 \rightarrow G$  est admissible si et seulement s'il existe des constantes  $C < 1$  et  $C' \geq 0$  telles que  $\mu(\rho(\gamma)) \leq C\mu(\gamma) + C'$  pour tout  $\gamma \in \Gamma_0$ .

Le théorème 3.3 est une conséquence du résultat suivant sur les applications lipschitziennes du plan hyperbolique  $\mathbb{H}^2$ .



**Théorème 3.4.** — Soit  $\Gamma_0$  un réseau cocompact sans torsion de  $G = \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ , soit  $\rho : \Gamma_0 \rightarrow G$  un morphisme de groupes et soit  $f : \mathbb{H}^2 \rightarrow \mathbb{H}^2$  une application  $\rho$ -équivariante et lipschitzienne de constante de Lipschitz  $C_\rho$  minimale. Si  $C_\rho \geq 1$ , il existe une droite géodésique de  $\mathbb{H}^2$  sur laquelle  $f$  est affine de constante  $C_\rho$ .

Le théorème 3.4 permet de généraliser un résultat de Thurston [11] sur l'équivalence entre deux définitions d'une distance asymétrique sur l'espace de Teichmüller de la surface  $\Gamma_0 \backslash \mathbb{H}^2$ . On obtient également une nouvelle démonstration du résultat suivant.

**Corollaire 3.5.** — Soit  $G = \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$  et soit  $\Gamma$  un sous-groupe discret sans torsion de  $G \times G$  agissant proprement et cocompactement sur  $G$  par translation à gauche et à droite. Il existe un voisinage  $\mathcal{U} \subset \mathrm{Hom}(\Gamma, G \times G)$  de l'inclusion naturelle formé de morphismes injectifs et tel que pour tout  $\varphi \in \mathcal{U}$ , le groupe  $\varphi(\Gamma)$  soit discret dans  $G \times G$  et agisse proprement et cocompactement sur  $G$ .

### Références

- [1] Y. Benoist, *Actions propres sur les espaces homogènes réductifs*, Ann. Math. 144 (1996).
- [2] É. Ghys, *Déformations des structures complexes sur les espaces homogènes de  $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$* , J. Reine Angew. Math. 468 (1995).
- [3] W. M. Goldman, *Nonstandard Lorentz space forms*, J. Differ. Geom. 21 (1985).
- [4] F. Kassel, *Proper actions on corank-one reductive homogeneous spaces*, J. Lie Theory 18 (2008).
- [5] F. Kassel, *Quotients compacts des groupes ultramétriques de rang un*, arXiv 0904.4657, à paraître aux Annales de l'Institut Fourier.
- [6] B. Klingler, *Complétude des variétés lorentziennes à courbure constante*, Math. Ann. 306 (1996).
- [7] T. Kobayashi, *Proper action on a homogeneous space of reductive type*, Math. Ann. 285 (1989).
- [8] T. Kobayashi, *On discontinuous groups acting on homogeneous spaces with noncompact isotropy subgroups*, J. Geom. Phys. 12 (1993).
- [9] R. S. Kulkarni, F. Raymond, *3-dimensional Lorentz space-forms and Seifert fiber spaces*, J. Differential Geom. 21 (1985).
- [10] F. Salein, *Variétés anti-de Sitter de dimension 3 exotiques*, Ann. Inst. Fourier 50 (2000).
- [11] W. P. Thurston, *Minimal stretch maps between hyperbolic surfaces* (1986), arXiv 9801039.

Fanny Kassel

Département de mathématiques, Bâtiment 425, Faculté des Sciences d'Orsay,  
Université Paris-Sud 11, 91405 Orsay Cedex.

E-mail : fanny.kassel@math.u-psud.fr



# CONSTRUCTION ET SIMULATION DE CONDITIONS AUX LIMITES ARTIFICIELLES POUR L'ÉQUATION DE SCHRÖDINGER AVEC POTENTIEL

*Pauline Klein*

*Résumé.* — Dans ce travail effectué en collaboration avec Xavier Antoine (Nancy) et Christophe Besse (Lille), nous présentons différentes familles de conditions aux limites artificielles permettant de résoudre numériquement l'équation de Schrödinger avec potentiel sur un domaine de calcul borné. Ces conditions aux limites sont construites en utilisant le calcul symbolique pour les opérateurs pseudodifférentiels. Des liens entre ces familles de conditions aux limites, ainsi que des résultats de stabilité sont prouvés. Ces conditions sont ensuite discrétisées en temps de manière cohérente avec une formulation variationnelle par éléments finis, et des résultats numériques sont présentés.

## Introduction

Pour des raisons évidentes de simulation par ordinateur, la résolution numérique d'une équation aux dérivées partielles ne peut s'effectuer que sur un domaine borné, même si cette équation est naturellement posée dans un domaine non borné, par exemple lorsque le domaine spatial est  $\mathbb{R}$ . On choisit alors ce domaine de calcul  $\Omega$  borné, sur lequel on résout l'équation en utilisant un maillage contenant un nombre élevé mais fini de points. Mais ce faisant, on a introduit de manière artificielle une frontière, le bord de  $\Omega$ , dans un système qui n'en avait initialement pas. Il est alors nécessaire de préciser la condition aux limites à utiliser sur cette frontière.

La recherche d'une condition aux limites convenable est cruciale dans la résolution numérique de ce genre d'équations. En effet, c'est elle qui permet de simuler le comportement de la solution à l'extérieur du domaine de calcul. Une condition aux limites trop grossière a pour effet de générer une importante réflexion parasite lorsque l'onde atteint le bord du domaine. Une condition aux limites artificielle sera dite exacte, ou *transparente*, si la solution calculée sur  $\Omega$  avec cette condition coïncide avec la restriction à  $\Omega$  de la solution exacte. A défaut, on parlera de condition aux

limites *approchée*. Notre objectif est de construire des conditions aux limites approchées pour l'équation de Schrödinger en dimension une, avec un potentiel variable  $V(x, t)$  ou une non linéarité  $f(u)$ .

### 1. Construction de conditions aux limites artificielles

On s'intéresse à l'équation de Schrödinger en dimension une

$$(S) \quad \begin{cases} i\partial_t u + \partial_x^2 u + Vu = 0, & (x, t) \in \mathbb{R} \times ]0; T] \\ u(x, 0) = u_0(x), & x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

dont la solution  $u(x, t)$  est à valeurs complexes, et dans laquelle  $V = V(x, t)$  est une fonction régulière appelée *potentiel*. La donnée initiale  $u_0 \in L^2(\mathbb{R})$  est à support compact, supposé dans le domaine de calcul  $\Omega = ]x_\ell; x_r[$ . On note  $\Sigma = \partial\Omega = \{x_\ell, x_r\}$  la frontière artificiellement introduite par la considération du domaine  $\Omega$ .

On cherche à déterminer la condition aux limites sous la forme

$$(1) \quad \partial_n u + i\Lambda^+ u = 0, \quad \text{sur } \Sigma \times [0; T]$$

où  $\mathbf{n}$  désigne la normale unitaire sortante au domaine de calcul  $\Omega$ . L'opérateur pseudodifférentiel  $\Lambda^+(x, t, \partial_t)$  est un opérateur de type Dirichlet-Neumann qui peut être déterminé si on connaît son symbole total  $\lambda^+(x, t, \tau)$ , défini par la relation [7]

$$\Lambda^+(x, t, \partial_t)u(x, t) = \mathcal{F}_t^{-1}(\lambda^+(x, t, \tau)\hat{u}(x, \tau)) = \int_{\mathbb{R}} \lambda^+(x, t, \tau)\hat{u}(x, \tau)e^{it\tau} d\tau$$

où  $\mathcal{F}_t$  désigne la transformée de Fourier en temps,  $\hat{u} = \mathcal{F}_t(u)$  et  $\tau$  est la covariable de  $t$ . Le symbole  $\lambda^+$  admet le développement en symboles homogènes  $\lambda^+ \sim \sum_{j=0}^{+\infty} \lambda_{1/2-j}^+$ . On s'attachera donc à déterminer  $\Lambda^+$  ou une approximation via le calcul des premiers symboles du développement asymptotique de  $\lambda^+$  [5, 6].

Dans le cas bien connu de l'équation sans potentiel ( $V = 0$ ), il est possible d'expliciter la condition aux limites transparente [4]

$$(TBC) \quad \partial_n u + e^{-i\pi/4} \partial_t^{1/2} u = 0, \quad \text{sur } \Sigma \times [0; T]$$

où  $\partial_t^{1/2}$  est l'opérateur de dérivation d'ordre 1/2 défini par

$$\partial_t^{1/2} \psi(t) = \partial_t \int_0^t \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{\psi(s)}{\sqrt{t-s}} ds$$

Pour un potentiel  $V = V(t)$ , un changement de jauge approprié  $v = e^{-i \int_0^t V(s) ds} u$  permet de se ramener à l'équation sans potentiel [2]. Cette démarche est la base de la première des deux stratégies étudiées ci-après dans le cas général  $V = V(x, t)$ . La deuxième stratégie quant à elle est une méthode directe se basant sur l'équation (S).

Ces deux stratégies conduisent à deux familles de conditions aux limites [3].

**Proposition 1.1.** — Dans le cadre de la première stratégie, appelée changement de jauge, la condition aux limites d'ordre 4 est donnée par

$$(ABC_1^4) \quad \partial_n u + e^{-i\pi/4} e^{i\mathcal{V}} \partial_t^{1/2} (e^{-i\mathcal{V}} u) + i \operatorname{sg}(\partial_n V) \frac{\sqrt{|\partial_n V|}}{2} e^{i\mathcal{V}} I_t \left( \frac{\sqrt{|\partial_n V|}}{2} e^{-i\mathcal{V}} u \right) = 0$$

où  $\mathcal{V}(x, t) = \int_0^t V(x, s) ds$  et  $I_t$  désigne l'opérateur d'intégration.

Pour la seconde stratégie, dite méthode directe, la condition aux limites d'ordre 4 est

$$(ABC_2^4) \quad \partial_n u - i\sqrt{i\partial_t + V} u + \operatorname{sg}(\partial_n V) \frac{\sqrt{|\partial_n V|}}{2} (i\partial_t + V)^{-1} \left( \frac{\sqrt{|\partial_n V|}}{2} u \right) = 0$$

Dans chacune des deux stratégies, la condition d'ordre 2 se déduit de celle d'ordre 4 en ne conservant que les deux premiers termes.

Pour les conditions aux limites  $ABC_1^M$ , nous avons le résultat de stabilité suivant.

**Théorème 1.2.** — Le système constitué du problème (S) posé sur  $\Omega$ , et de la condition aux limites d'ordre 2  $ABC_1^2$ , est bien posé. En effet, toute solution  $u$  vérifie l'inégalité d'énergie

$$\forall t > 0, \quad \|u(t)\|_{L^2(\Omega)} \leq \|u_0\|_{L^2(\Omega)}$$

ce qui assure l'unicité de cette solution.

Cela reste vrai également pour la condition d'ordre 4  $ABC_1^4$ , sous l'hypothèse supplémentaire que le signe de  $\partial_n V$  soit constant au cours du temps sur  $\Sigma$ .

**Remarque 1.3.** — Dans le cas d'un potentiel  $V = V(x)$  ne dépendant pas du temps, on montre que les deux familles de conditions aux limites,  $ABC_1^M$  et  $ABC_2^M$ , sont équivalentes.

## 2. Discrétisation et résultats numériques

L'équation intérieure est discrétisée par un schéma de Crank-Nicolson en temps. La discrétisation des conditions aux limites doit préserver la stabilité inconditionnelle de ce schéma. L'évaluation des  $ABC_1^M$  est coûteuse puisqu'elle fait intervenir des opérateurs non locaux en temps : à chaque étape, le calcul de  $\partial_t^{1/2} u$  sur la frontière nécessite les valeurs de  $u$  sur le bord à tous les temps précédents. On discrétise ces opérateurs à l'aide de convolutions discrètes [8, 2]

$$(2) \quad \partial_t^{1/2} f(t_n) \approx \sqrt{\frac{2}{\Delta t}} \sum_{k=0}^n \beta_{n-k} f^k \quad \text{et} \quad I_t f(t_n) \approx \frac{\Delta t}{2} \sum_{k=0}^n \gamma_{n-k} f^k$$

avec les coefficients  $\beta_k = 1, -1, \frac{1}{2}, \frac{-1}{2}, \frac{3}{8}, \frac{-3}{8}, \dots$  et  $\gamma_k = 1, 2, 2, 2, \dots$ . On prouve que cette discrétisation mène à un schéma semi-discret inconditionnellement stable [3].

Pour les conditions de la deuxième stratégie, les opérateurs sont approchés formellement par des approximants de Padé d'ordre  $m$

$$(3) \quad \sqrt{i\partial_t + V} \approx R_m(i\partial_t + V) = \sum_{k=0}^m a_k^m - \sum_{k=1}^m a_k^m d_k^m (i\partial_t + V + d_k^m)^{-1}$$

Les conditions  $ABC_{2,m}^M$  ainsi obtenues sont localisées, et faciles à implémenter.

La donnée initiale pour les tests numériques est la gaussienne  $u_0(x) = e^{10ix-x^2}$ . On considère le potentiel  $V(x, t) = 5xt$ . On utilise une formulation variationnelle du problème semi-discrétisé en temps, à laquelle on applique des éléments finis linéaires. Les simulations numériques montrent que les conditions aux limites artificielles que nous avons construites donnent des résultats précis, ce qui est observable au faible niveau de la réflexion parasite observée à la traversée de la frontière droite (figure 1, l'amplitude de l'onde réfléchie est de  $10^{-4}$  et  $10^{-5}$ ). Elles améliorent indéniablement l'usage de la condition transparente du cas sans potentiel TBC (amplitude  $10^{-2}$ ). On remarque aussi que les conditions d'ordre 4 sont plus précises que celles d'ordre 2.

Ces conditions s'adaptent également avec succès à l'équation de Schrödinger non linéaire, dont un exemple repose sur le potentiel cubique  $V = q|u|^2$ .

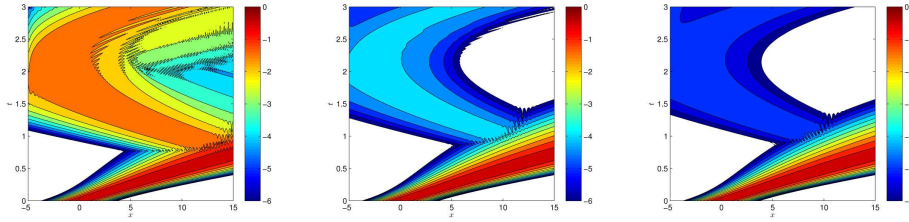


FIGURE 1. Représentation logarithmique dans le plan  $(x, t)$  de l'amplitude  $|u|$  de la solution calculée numériquement avec la condition sans potentiel (TBC, à gauche), la condition d'ordre 2  $ABC_{2,50}^2$  (milieu) et la condition d'ordre 4  $ABC_{2,50}^4$  (à droite), pour le potentiel  $V(x, t) = 5xt$ .

### Références

- [1] X. Antoine, A. Arnold, C. Besse, M. Ehrhardt, et A. Schädle. A review of transparent and artificial boundary conditions techniques for linear and nonlinear Schrödinger equations. *Commun. Comput. Phys.*, 4(4) :729–796, 2008.
- [2] X. Antoine et C. Besse. Unconditionally stable discretization schemes of non-reflecting boundary conditions for the one-dimensional Schrödinger equation. *J. Comput. Phys.*, 188(1) :157–175, 2003.
- [3] X. Antoine, C. Besse, et P. Klein. Absorbing boundary conditions for the one-dimensional Schrödinger equation with an exterior repulsive potential. *J. Comput. Phys.*, 228(2) :312–335, 2009.

- [4] V. A. Baskakov et A. V. Popov. Implementation of transparent boundaries for numerical solution of the Schrödinger equation. *Wave Motion*, 14(2) :123–128, 1991.
- [5] B. Engquist et A. Majda. Absorbing boundary conditions for numerical simulation of waves. *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.*, 74(5) :1765–1766, 1977.
- [6] R. Lascar. Propagation des singularités des solutions d'équations pseudo-différentielles quasi homogènes. *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)*, 27(2) :vii–viii, 79–123, 1977.
- [7] M. Taylor. *Pseudodifferential operators*, volume 34 of *Princeton Mathematical Series*. Princeton University Press, Princeton, N.J., 1981.
- [8] D. Yevick, T. Friese, et F. Schmidt. A comparison of transparent boundary conditions for the fresnel equation. *J. Comput. Phys.*, 168(2) :433–444, 2001.

*Pauline Klein*

Institut Elie Cartan de Nancy (IECN), Nancy-Université, CNRS, Equipe INRIA CORIDA,  
Boulevard des Aiguillettes B.P. 239, F-54506 Vandœuvre-lès-Nancy.

*E-mail* : pauline.klein@iecn.u-nancy.fr





# ONDES PÉRIODIQUES PROGRESSIVES DANS LE MODÈLE DE BURRIDGE-KNOPOFF

*Marion Lebellego*

**Résumé.** — On étudie l'existence d'ondes périodiques progressives dans une version 1D du modèle de faille sismique de Burridge et Knopoff, constitué d'une chaîne de masses linéairement couplées, en contact avec une surface rugueuse en mouvement. Le système initial est un système infini d'EDO couplées avec une non linéarité issue d'une loi de frottement de type Coulomb, présentant une singularité en 0. Le système se réduit à une EDO avec avance et retard lorsque l'on recherche des ondes périodiques progressives. Après avoir prouvé un résultat d'existence à couplage faible pour une non linéarité régularisée, on s'intéresse au problème non régularisé.

## 1. Modèle de Burridge et Knopoff

Un modèle simple de faille sismique introduit par Burridge et Knopoff [2] consiste en une chaîne de blocs de masse  $m$ , reliés entre eux par des ressorts de raideur  $k_c$ , en contact avec frottement avec une surface inférieure se déplaçant à une vitesse constante  $v$ . Les blocs sont également reliés à une surface supérieure par des ressorts de raideur  $k_p$ .

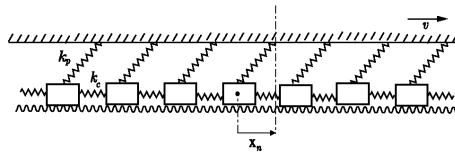


FIGURE 1. Modèle de Burridge et Knopoff (d'après Carlson et Langer, 1989).

En notant  $x_j$  la déviation de la  $j$ ème masse par rapport à sa position d'équilibre, l'équation de la dynamique est donnée par :

$$m\ddot{x}_j = k_c(x_{j+1} - 2x_j + x_{j-1}) - k_p x_j - \Psi(v + \dot{x}_j), \quad x_j \in \mathbb{R}, \quad j \in \mathbb{Z}$$

où  $\Psi$  est une loi de frottement et  $v$  la vitesse (constante) de la plaque inférieure. De nombreuses études ont été menées dans le cadre très particulier de la limite du continu et pour diverses lois de frottement  $\Psi$  (voir par exemple [6, 7]). Ici on s'intéresse uniquement au cadre discret avec une loi de frottement non lisse. On adimensionne l'équation précédente. La nouvelle inconnue adimensionnée  $u_j$  vérifie l'équation suivante :

$$\ddot{u}_j = \ell^2(u_{j+1} - 2u_j + u_{j-1}) - u_j - F(V + \dot{u}_j),$$

où  $\ell, V$  sont des paramètres sans dimension,  $\ell$  étant le rapport des raideurs ( $\ell = 0$  correspond au cas où les masses sont découplées). On considère ici la version due à Carlson et Langer [3] dans laquelle les paramètres sont spatialement homogènes et la loi de frottement, donnée par  $F(v_{rel}) = \frac{\text{Sgn}(v_{rel})}{1 + |v_{rel}|}$ ,  $F(0) = [-F_0, F_0]$ , décroît avec la vitesse et est multivaluée en 0. Il se produit un mouvement de type glissement saccadé, c'est à dire des oscillations entre un état d'équilibre et de glissement. L'équation a été étudiée numériquement par Schmittbuhl et al. [4] avec un nombre fini de blocs et des conditions de bords périodiques. Ils obtiennent dans certains cas de figure des ondes périodiques progressives localisées. Nous souhaitons justifier mathématiquement ce fait. On recherche donc des solutions sous la forme  $u_j(t) = u(j + t/\tau) =: u(\xi)$ ,  $\xi := j + t/\tau$ , qui sont des ondes se propageant à vitesse  $1/\tau > 0$ . L'inconnue  $u$  est une solution de l'équation :

$$(E_\tau) \quad \frac{1}{\tau^2} \ddot{u} + u = \ell^2(u(\xi + 1) - 2u(\xi) + u(\xi - 1)) - F(V + \frac{\dot{u}}{\tau}).$$

**Difficultés du problème :** L'équation à étudier,  $(E_\tau)$ , est une EDO *non linéaire* d'ordre 2 avec un *terme d'avance/retard*. De plus, la non linéarité  $F$  est multivaluée en 0 et régulière en dehors de 0. C'est à dire que l'équation différentielle  $(E_\tau)$  est en réalité une inclusion différentielle, et qu'à la place du signe  $=$  il faut lire  $\in$ . Il existe une théorie des inclusions différentielles (cf.[5]). La notion de solution généralement utilisée est celle de Filippov : une fonction absolument continue  $u$  est solution de l'inclusion si elle vérifie l'inclusion presque partout sur un intervalle de temps  $J$ . On a entre autre, des résultats d'existence sous une hypothèse de semi-continuité supérieure sur le second membre, hypothèse vérifiée dans le cas de la fonction  $\text{Sgn}$ . Nous ne nous attarderons pas sur cette théorie si ce n'est pour utiliser la généralisation du théorème de Poincaré-Bendixson pour les inclusions différentielles planaires. Ici on ne cherche pas à résoudre un problème de Cauchy, on cherche des solutions particulières à l'équation  $E_\tau$  (sous forme d'ondes périodiques progressives).

Nous avons donc une double difficulté : le terme d'avance/retard et le problème de l'inclusion lié au fait que  $F$  soit multivaluée. Pour éviter de s'attaquer directement à cette double difficulté, on étudie le problème en plusieurs étapes :

(1) On introduit dans un premier temps une régularisation  $F_\varepsilon$  de  $F$ , donnée par  $F_\varepsilon(y) = \text{th}(\frac{y}{\varepsilon}) \cdot |F(y)|$ ,  $x \neq 0$ ,  $F_\varepsilon(0) = 0$ , où  $\varepsilon$  est un petit paramètre destiné à tendre

vers 0. On a bien dans ce cas une équation différentielle et non pas une inclusion différentielle. On opère ensuite à une deuxième simplification en posant  $\ell = 0$ , ce qui élimine le terme d'avance/retard. On étudie donc l'équation :

$$(E_\varepsilon) \quad \frac{\ddot{u}}{\tau^2} + u = -F_\varepsilon\left(V + \frac{\dot{u}}{\tau}\right),$$

dont on prouve l'existence d'une solution périodique par le théorème de Poincaré-Bendixson. Puis, par une théorie de perturbation, on montre la persistance d'une telle solution lorsque  $\ell$  est petit (c'est à dire à couplage faible).

(2) Dans un deuxième temps, on revient au problème avec l'inclusion. On répète le même schéma. Pour le problème à couplage faible, l'idée ici étant de découper une période en deux intervalles, dissociant ainsi les temps pour lesquels l'inclusion est véritablement une inclusion et les temps pour lesquels elle reste une EDO.

## 2. Première étape : Etude des solutions périodiques du problème régularisé

On commence donc par étudier le problème à couplage nul ( $E_\varepsilon$ ) puis on démontre la persistance du résultat à couplage faible.

**2.1. Problème régularisé à couplage nul : existence de solution périodique.** — On montre dans un premier temps, qu'il y a naissance d'une orbite périodique autour du seul point d'équilibre du système par bifurcation de Hopf (cf. [1]). Lorsque le paramètre de bifurcation  $\mu := V - V_c > 0$ , où  $V_c$  est la valeur critique de  $V$  pour laquelle  $F_\varepsilon$  est maximale, il existe une orbite périodique stable. Dans le cas général, lorsque  $\mu > 0$  n'est plus dans un voisinage de 0, le système étant planaire, on peut utiliser des outils d'analyse globale tel que le théorème de Poincaré-Bendixson : le seul point d'équilibre étant répulsif, en construisant un domaine positivement invariant on déduit l'existence d'un cycle limite à l'intérieur de ce domaine (non forcément unique). On montre ainsi le théorème suivant :

**Théorème 2.1.** — *Pour tout  $V > 0$ , pour tout  $\tau \in \mathbb{R}^{+*}$ , il existe une solution périodique de l'équation ( $E_\varepsilon$ ).*

**Remarque 2.2 (Stabilité de l'orbite périodique).** — Pour  $V \approx V_c$ , la stabilité de l'orbite est donnée par l'analyse de la bifurcation de Hopf. Mais dans le cas général, le problème reste ouvert.

## 2.2. Persistance de l'orbite périodique à couplage $\ell$ faible.—

**Théorème 2.3.** — *Soit  $u_0$  une solution  $T_0$ -périodique de l'équation ( $E_\varepsilon$ ), se propageant à une vitesse de  $\frac{1}{\tau_0}$ , et donnée par le théorème 2.1. On fait l'hypothèse suivante :*

(H) *L'ensemble des solutions  $T_0$ -périodiques de l'équation linéarisée autour de*

L'orbite périodique  $u_0$ , i.e.  $\frac{\ddot{u}}{\tau_0^2} + u = -F'_\varepsilon(V + \frac{\dot{u}_0}{\tau_0})\frac{\dot{u}}{\tau_0}$  est de dimension 1 engendré par  $\dot{u}_0$ .

En d'autres termes, (H) signifie que l'ensemble des solutions de cette équation s'écrit comme somme d'un sous-espace neutre et d'un sous-espace attractif ou répulsif.

Il existe alors des voisinages  $\mathcal{V}$  de 0 dans  $\mathbb{R}$  et  $\Omega$  de  $(u_0, \tau_0)$  dans  $H^2(\mathbb{R}/T_0, \mathbb{R}) \times \mathbb{R}$  tels que pour tout  $\ell \in \mathcal{V}$ , il existe une solution  $T_0$ -périodique de  $(E_\tau)$  régularisée,  $u_\ell$ , se propageant à une vitesse de  $\frac{1}{\tau(\ell)}$ .

*Preuve.* — La preuve repose sur la méthode de Lyapounov-Schmidt. On recherche  $u$  solution de  $(E_\tau)$  comme une petite perturbation de  $u_0$  :  $u = u_0 + u_1$ , où  $u_1$  est une petite inconnue. L'équation  $(E_\tau)$  en  $u_1$  se met alors sous la forme  $g(u_1, \tau, \ell) = 0$ , avec  $g(0, \tau_0, 0) = 0$  (traduisant le fait que  $\dot{u}_0$  est solution). On ne peut tirer  $u_1$  en fonction de  $\tau$  et  $\ell$  par le théorème des fonctions implicites car  $\mathcal{L}(u_1) := D_{u_1}g(0, \tau_0, 0)$  n'est ni injective, ni surjective.

Pour pallier au défaut de surjectivité, on projette cette équation sur l'image de  $\mathcal{L}$  et sur son orthogonal et pour pallier au défaut d'injectivité, on décompose  $u_1$  sur le noyau de  $\mathcal{L}$  et son orthogonal. On obtient deux équations : de la première, on résout  $u_1$  par le TFI, en fonction de  $\tau$  et  $\ell$ . Et de la deuxième, encore par le TFI, on résout  $\tau$  également en fonction de  $\ell$  moyennant une condition de compatibilité qui est vérifiée sous l'hypothèse (H) faite dans l'énoncé du théorème.  $\square$

### 3. Deuxième étape : étude des solutions périodiques du problème non régularisé

En utilisant la version non lisse du théorème de Poincaré-Bendixson, le théorème 2.1 subsiste pour l'inclusion correspondante. Pour l'étude à faible couplage, le problème est un problème d'analyse non lisse beaucoup plus difficile et nécessite d'adapter les outils de la section 2.2. Un analogue du théorème 2.3 est montré dans un article à venir ([8]).

### Références

- [1] Iooss G., Aldelmeyer M., Topics in bifurcation theory and applications, Advanced Series in Non Linear Dynamics 3 World Scientific (1992).
- [2] Burridge R., Knopoff L., Model and theoretical seismicity, Bulletin of the seismological Society of America, v.57 no.3 (1967) 341-371.
- [3] Carlson J.M., Langer J.S., Mechanical model of an earthquake fault, Phys. Rev. A40 (1989) 6470-6484.
- [4] Vilotte J.P, Roux S., Schmittbuhl J., Propagative macro-dislocation modes in earthquake fault model, Europhys. Lett. (January 1993) 375-380.
- [5] Aubin J.P., Celina A., Differential inclusions, Springer Verlag (1984).

- [6] Muratov C.B., Traveling wave solutions in the Burridge-Knopoff model, *Phys. Rev E*, v. 59, no.4 (1999), 3847-3857.
- [7] Hahner P., Drossinos Y., Nonlinear dynamics of a continuous spring-block model of earthquake faults, *J. Phys. A : Math. Gen.* 31 (1998), L185-L191.
- [8] Lebellego M., Periodic traveling waves in the Burridge-Knopoff model (soumis).

*Marion Lebellego*

en thèse sous la direction d'E. Lombardi et G. James, Institut de Mathématiques de Toulouse, Université Paul Sabatier.

*E-mail* : marion.lebellego@math.univ-toulouse.fr



# UNE MÉTHODE ADAPTATIVE POUR LE CALCUL D'ÉNERGIE LIBRE

*Kimiya Minoukadeh*

**Résumé.** — Nous nous intéressons au calcul par simulation moléculaire de certaines quantités macroscopiques liées à un système d'atomes. L'état du système est décrit par la position des atomes qui interagissent au travers d'une fonction d'énergie potentielle. L'objectif est de calculer des moyennes par rapport à la mesure de Boltzmann-Gibbs liée à ce potentiel, ce qui revient en pratique à échantillonner la mesure en utilisant une dynamique appropriée, par exemple la dynamique de Langevin. Cette approche naïve mène souvent à une convergence lente, due à des métastabilités liées au potentiel, où des zones de forte probabilité sont séparées par des zones de faible probabilité. Étant donné une coordonnée de réaction (une variable lente) décrivant les métastabilités du système, il existe une méthode, celle de la force biaisante adaptative [1, 2], pour remédier à ce problème. Cette méthode fournit un moyen pour échantillonner des mesures de probabilité multimodales, en biaisant la dynamique habituelle par une certaine force 'moyenne' dans la direction de la métastabilité. Il a été proposé récemment [4, 6] d'utiliser un système de répliques en interaction pour accélérer l'algorithme et surmonter les problèmes liés à d'autres métastabilités dans la direction orthogonale à la coordonnée de réaction. Cette approche, facilement parallélisable, permet de mettre en œuvre un processus de sélection pour accélérer davantage l'échantillonnage. Nous présentons une comparaison numérique de ces méthodes sur un système biologique prototypique.

## 1. Introduction

La simulation moléculaire est un outil indispensable pour comprendre le comportement des systèmes physiques (par exemple les matériaux) ou biologiques (par exemple les protéines) lorsque les expérimentations sont difficiles ou coûteuses. La simulation moléculaire donne un moyen pour calculer les propriétés moyennes des matériaux par les lois de la physique statistique.

On considère un système de  $N$  atomes, décrit par les configurations  $q = (q_1, \dots, q_N)$ , où  $q_i \in \mathbb{R}^3$  désigne la configuration du  $i$ -ème atome. Les particules interagissent selon la fonction d'énergie potentielle  $V : \mathbb{R}^{3N} \rightarrow \mathbb{R}$ . La mesure canonique, qui donne l'information microscopique relative au système, est définie par

$$(1) \quad \mu(dq) = \phi(q) dq = Z^{-1} \exp(-\beta V(q)) dq,$$

où  $\phi(q)$  est la densité de la mesure  $\mu$  au point  $q \in \mathbb{R}^{3N}$  et  $Z = \int \exp(-\beta V(q)) dq$  est un facteur de normalisation, également appelé la fonction de partition. On voudrait calculer des moyennes par rapport à cette mesure, mais en grande dimension (typiquement  $N \sim 10^5$ ), cela devient infaisable. On est donc davantage intéressé par le comportement macroscopique du système auquel est associée une variable lente  $\xi$ , qui représente souvent un angle structural ou bien la distance bout-à-bout d'une protéine. Dans la suite, cette quantité sera appelée *coordonnée de réaction* (RC), définie par une fonction dérivable  $\xi : \mathbb{R}^{3N} \rightarrow \mathbb{R}$ . L'image de la mesure canonique par  $\xi$  est donnée par

$$(2) \quad \mu^\xi(dz) = \phi^\xi(z) dz = \tilde{Z}^{-1} \exp(-\beta A(z)) dz,$$

où  $\tilde{Z}$  est la constante de normalisation,  $\phi^\xi(z)$  est la densité de la mesure  $\mu^\xi$  au point  $z$  et  $A$  est appelée l'énergie libre et est définie par

$$A = -\beta^{-1} \ln \left( \tilde{Z} \int_{\Sigma_z} \phi |\nabla \xi|^{-1} d\sigma_z \right)$$

où  $d\sigma_{\Sigma_z}$  est la mesure de Lebesgue sur  $\Sigma_z = \{x, \xi(x) = z\}$ . L'objectif de ce travail est de calculer efficacement l'énergie libre  $A$ .

## 2. Calcul d'énergie libre

Il est important de noter qu'en pratique on souhaite calculer la différence d'énergie libre et non l'énergie libre absolue. La différence d'énergie libre entre deux points  $z_1$  et  $z_0$  dans la RC est définie par  $\Delta A = A(z_1) - A(z_0) = \int_{z_1}^{z_0} A'(z) dz$ . On sait que l'énergie libre est définie, à une constante additive près, par  $A = -\beta^{-1} \ln(\phi^\xi)$ . Après dérivation de cette quantité, il s'avère que  $A'$  s'exprime sous la forme d'une espérance conditionnelle

$$(3) \quad A'(z) = \mathbb{E}_\mu[F^V(q) \mid \xi(q) = z] = \frac{\int_{\Sigma_z} F^V \exp(-\beta V) |\nabla \xi|^{-1} d\sigma_{\Sigma_z}}{\int_{\Sigma_z} \exp(-\beta V) |\nabla \xi|^{-1} d\sigma_{\Sigma_z}},$$

où  $F^V = \frac{\nabla V \cdot \nabla \xi}{|\nabla \xi|^2} - \beta^{-1} \operatorname{div} \left( \frac{\nabla \xi}{|\nabla \xi|^2} \right)$ . Pour déduire cette dernière, voir les références [7, 8]. Dans la suite  $A'$  est appelée *force moyenne*. Une manière de calculer  $A'$  est d'utiliser une dynamique qui échantillonne efficacement la mesure  $\mu$  pour toute valeur de la RC.



Une manière naïve de procéder est d'utiliser une dynamique de Langevin sur-amortie, pour laquelle on sait qu'en temps long les positions de la trajectoire sont distribuées selon la mesure canonique. Cette dynamique s'écrit sous la forme d'une équation différentielle stochastique :

$$(4) \quad dX_t = -\nabla V(X_t)dt + \sqrt{2\beta^{-1}}dW_t,$$

où  $X_t$  est un vecteur de longueur  $3N$ , représentant la trajectoire du système et  $W_t$  est un mouvement brownien standard de dimension  $3N$ . Cette dynamique, cependant, se heurte au phénomène de métastabilité : des zones de  $\mathbb{R}^{3N}$  de forte probabilité sont séparés par des zones de faible probabilité. Puisque  $\xi$  décrit les degrés de liberté lents du système, ces barrières à franchir sont liées à celles de l'énergie libre  $A$ . La méthode de la force biaisante adaptative, détaillée dans la section suivante, propose une façon de remédier à ce problème.

### 3. Force biaisante adaptative

L'idée de la méthode force biaisante adaptative (ABF) [1, 2] est de biaiser la dynamique habituelle (4) par adjonction d'une force  $A'_t$  variant avec le temps. La dynamique biaisée est ainsi

$$(5) \quad \begin{cases} dX_t = -\nabla(V - A_t \circ \xi)(X_t)dt + \sqrt{2\beta^{-1}}dW_t, \\ A'_t(z) = \mathbb{E}[F^V(X_t) | \xi(X_t) = z] \end{cases}$$

où  $'$  signifie une dérivée par rapport à  $z$ . La force biaisante  $A'_t$  est ainsi une approximation de la force moyenne  $A'$ , calculée en utilisant l'information obtenue par la trajectoire du processus  $X_t$ . Dans la suite  $\psi$  représente la densité de la loi du processus  $X_t$  et  $\psi^\xi$  celle de la marginale en  $\xi$ . Il a été montré que  $A'_t \rightarrow A'$  exponentiellement vite, au sens  $L^2(\psi^\xi dx)$  [5].

A l'origine de la méthode ABF [1], une unique réalisation de la dynamique (5) était considérée. La force moyenne était donc calculée par une moyenne trajectoirelle. Une nouvelle formulation d'ABF [4] propose d'utiliser plusieurs répliques indépendantes qui suivent toutes la dynamique (5). Le processus  $X_t$  dans (5) est ainsi remplacé par  $X_t^i$  et  $W_t$  par  $W_t^i$ , où l'indice  $i \in \{0, \dots, R-1\}$  indexe la  $i$ -ème réplique. L'espérance conditionnelle est alors calculée comme une moyenne sur les trajectoires et sur toutes les répliques

$$A'_t(z) \approx \frac{\sum_{i=0}^{R-1} \int_0^t F^V(X_s^i) \delta_{\xi(X_s^i)}(dz) ds}{\sum_{i=0}^{R-1} \int_0^t \delta_{\xi(X_s^i)}(dz) ds}.$$

L'intérêt de cette formulation est d'une part, d'accélérer la convergence de la méthode, surtout dans le cas où la coordonnée de réaction ne décrit pas toutes les métastabilités du système. D'autre part, elle permet d'effectuer une sélection des répliques selon une fonction d'utilité  $S(t, z) = c \frac{\partial_{zz} \psi^\xi}{\psi^\xi}$ , de sorte que  $S(t, z) < 0$  (respectivement  $S(t, z) > 0$ ) si l'état  $z$  dans la RC est sous-échantillonné (respectivement sur-échantillonné) par rapport à sa moyenne locale. La constante  $c > 0$  représente ainsi l'intensité de cette fonction d'utilité. À chaque réplique est assigné un poids  $w_t^i$ , défini par

$$w_t^i = W_t^{-1} \exp \left( \int_{t_0}^t S(s, \xi(X_s^i)) ds \right),$$

où est le facteur de normalisation et  $t_0 < t$  désigne le dernier temps du rééchantillonnage. Au moment du rééchantillonnage, la  $i$ -ème réplique est dupliquée en moyenne  $Rw_{t^-}^i$  fois, où l'indice  $t^-$  signifie le temps juste avant le rééchantillonnage. Les poids sont ensuite distribués uniformément, c'est à dire  $w_t^i = 1/R, \forall i \in \{0, \dots, R-1\}$ , et évoluent jusqu'au prochain rééchantillonnage, selon  $\dot{w}_t^i = S(t, \xi(X_t^i))w_t^i$ . Pour plus de détails sur la mise en œuvre, voir la référence [6].

#### 4. Résultats numériques

Cette section présente des tests numériques effectués sur un système prototypique, la déca-alanine, de  $N = 104$  atomes. La RC est choisie comme la distance bout-à-bout de la protéine.

**4.1. Les structures dépliées.** — On étudie d'abord les états dépliés de la protéine, pour lesquels la RC choisie décrit bien les phases de transition du répliage. En imposant des conditions de réflexion aux bords, la distance bout-à-bout du système est restreinte entre 12 et 32 Å. La figure 1(a) montre les estimations de  $A'$ , obtenues par des simulations d'une réplique et de 16 répliques, après 0,25 ns. Les courbes représentent la moyenne de 20 simulations et des intervalles de confiance à 95%. Les simulations avec une réplique n'ont pas réussi à échantillonner au-delà d'une élongation de 22 Å, alors que les simulations avec 16 répliques ont pu obtenir une meilleure estimation de  $A'$ , nous permettant de mieux biaiser la dynamique et atteindre les états dépliés. La figure 1(b) illustre l'influence du mécanisme de sélection. On obtient un meilleur échantillonnage des états dépliés pour les simulations avec sélection, ce qui se reflète dans le profil d'énergie libre dans l'encart de la figure 1(b).

**4.2. Les structures repliées.** — Dans les états repliés, la distance bout-à-bout de la protéine ne décrit plus toutes les métastabilités du système. Dans de tels cas, l'usage de plusieurs répliques s'avère indispensable pour avoir une convergence à une échelle de temps raisonnable. La RC est restreinte entre 4 et 16 Å.

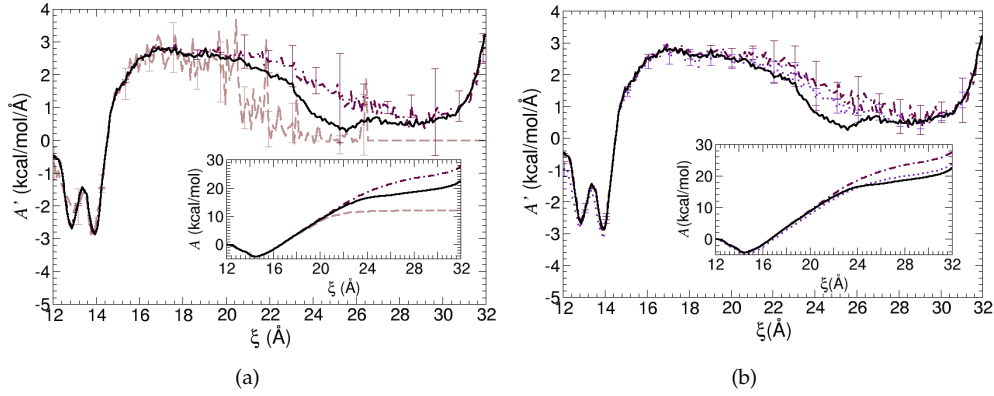


FIGURE 1. **Estimations de la force moyenne après 0,25 ns, pour les états dépliés** : Les lignes solides représentent les courbes de référence. (a) Simulations avec 1 réplique (lignes de tirets) et 16 répliques sans sélection (lignes de tirets/pointillés). (b) Simulations avec 16 répliques sans sélection (lignes de tirets/pointillés) et avec sélection (lignes de pointillés).

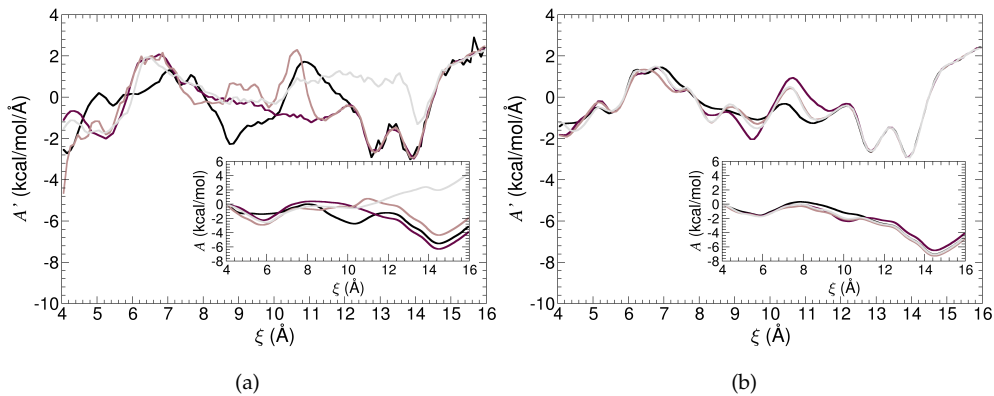


FIGURE 2. **Estimations de la force moyenne après 100 ns, pour les états repliés** : Les courbes représentent les résultats de quatre réalisations indépendantes. (a) Simulations avec une réplique. (b) Simulations avec 32 répliques : les estimations sont plus précises et les courbes sont qualitativement proches l'une de l'autre.

Les figures 2(a) et 2(b) montrent les estimations de  $A'$ , obtenues après 100 ns, par quatre réalisations indépendantes d'ABF, en utilisant 1 réplique et 32 répliques respectivement. On observe sur la figure 2(a), des incohérences entre les estimations obtenues par chaque simulation. Une explication possible est la suivante : dans les états compacts il existe, pour une valeur fixe de  $\xi$ , une multitude de conformations

de basse énergie séparées par des barrières à haute énergie. La méthode ABF habituelle n'est plus capable de calculer la force moyenne d'une manière efficace. Ce problème, cependant, peut être surmonté lorsqu'on utilise plusieurs (et éventuellement un grand nombre de) répliques. On observe sur la figure 2(b) que les estimations obtenues par les simulations de 32 répliques sont cohérentes l'une avec l'autre. Ceci est en accord avec la spéculation que la surface de l'énergie libre contient de nombreuses vallées de basse énergie dans la direction orthogonale à l'isosurface  $\xi(q) = z$ . En utilisant plusieurs répliques, elles ont une chance de parcourir chacune une vallée différente. Il est, par conséquent, souhaitable d'utiliser un nombre important de répliques lorsque la RC est sous optimale.

### Références

- [1] E. Darve and A. Pohorille *Calculating free energies using average forces*, J. Chem. Phys. 2001.
- [2] J. Héning and C. Chipot, *Overcoming free energy barriers using unconstrained molecular dynamics simulations*, J. Chem. Phys., 2004.
- [3] C. Chipot and J. Héning, *Exploring the free-energy landscape of a short peptide using an average force*, J. Chem. Phys., 2005.
- [4] T. Lelièvre, M. Rousset and G. Stoltz, *Computation of free energy profiles with parallel adaptive dynamics*, J. Chem. Phys., 2007.
- [5] T. Lelièvre, M. Rousset and G. Stoltz, *Long-time convergence of an Adaptive Biasing Force method*, Nonlinearity., 2008.
- [6] K. Minoukadeh, C. Chipot and T. Lelièvre, *Potential of mean force calculations : a multiple-walker adaptive biasing force approach*, Journal of Chemical Theory and Computation, 6(4), 1008-1017, (2010).
- [7] W. K. den Otter and W. J. Briels, *The calculation of free energy differences by constrained molecular dynamics simulations*, J. Chem. Phys., 1998.
- [8] M. Sprik and G. Cicotti, *Free energy from constrained molecular dynamics*, J. Chem. Phys., 1998.

*Kimiya Minoukadeh*

CERMICS, École des Ponts ParisTech, 6-8 avenue Blaise-Pascal, 77455 Champs-sur-Marne, Marne-la-Vallée cedex 2, France.

*E-mail* : kimiya.minoukadeh@cermics.enpc.fr

# “ WELL, PAPA, CAN YOU MULTIPLY TRIPLETS ? ”

*Sophie Morier-Genoud*

*Résumé.* — L'exposé porte sur l'algèbre des quaternions et sa propriété de commutativité récemment observée, [2]. Après un rappel historique de la naissance des quaternions, on définit la propriété de commutativité au sens gradué et on présente toutes les algèbres associatives simples ayant cette propriété.

## 1. Ce qu'on peut lire sur Brougham Bridge à Dublin

A l'automne 1843, le pont *Brougham* situé dans une paisible banlieue de Dublin, va subir un acte de vandalisme mathématique, aussi rare qu'important. L'auteur ? William Rowan Hamilton. Le mobile ? Une réponse positive, enfin, à des années de tourmente....

Comment multiplier des triplets de nombres réels ? La question est simple et naturelle. En effet, depuis le XVIème siècle on sait déjà comment multiplier les couples. La formule

$$(a, b) \cdot (a', b') = (aa' - bb', ab' + a'b)$$

définit sur  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$  la structure algébrique dite *complexe* et notée  $\mathbb{C}$ . On note usuellement 1 l'élément  $(1, 0)$  de  $\mathbb{C}$  et  $i$  l'élément  $(0, 1)$ , on a alors  $i^2 = -1$ . Plus généralement, on note  $a + ib$  les couples  $(a, b)$  dans  $\mathbb{C}$ , qu'on appelle nombres complexes.

Comment multiplier des triplets de nombres réels ? Cette question occupe l'esprit de Hamilton pendant plusieurs années au milieu du XIXème siècle, et le tourmente jour et nuit. Quand, les cheveux en pagaille et les yeux cernés, témoignant de longues heures d'insomnie, Hamilton arrivait au petit-déjeuner, son fils inlassablement lui demandait : *Well, Papa, can you multiply triplets ?* Ceci n'égayait en rien Hamilton, et renvoyé à son échec, dans un soupir il répondait tristement : *No, son, I can only add and subtract them*<sup>1</sup>.

<sup>1</sup>Anecdote rapportée par Hamilton lui-même dans une correspondance avec son fils.

Les tentatives de Hamilton de définir une multiplication sur les triplets qui en un sens généraliserait la structure complexe, échouent. En revanche, ce que découvre Hamilton le 16 octobre 1843, lors de sa promenade le long de *Royal Canal*, c'est la formule de multiplication des quadruplets. La formule originale, gravée par Hamilton sur une pierre du pont, n'est plus visible aujourd'hui. Une plaque rend hommage.

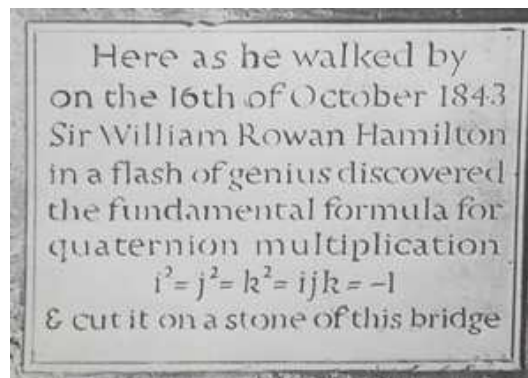


FIGURE 1. Multiplication des quaternions gravée sur Brougham Bridge

## 2. Ce qu'on ne pourra pas lire sur Brougham Bridge à Dublin

Les quaternions sont des nombres représentés par des quadruplets de réels  $(a, b, c, d)$ , que l'on note  $a + i b + j c + k d$ . La loi de multiplication est donnée par la formule gravée sur Brougham Bridge (cf Figure 1)

$$i^2 = j^2 = k^2 = i \cdot j \cdot k = -1,$$

combinée avec les règles d'associativité et de distributivité usuelles. L'ensemble des quaternions est noté  $\mathbb{H}$ .

L'ensemble  $\mathbb{H}$  est une algèbre réelle, associative, de dimension 4, et dite à *division*. Cette dernière propriété signifie que le produit de deux éléments  $h \cdot h'$  est nul, si et seulement si,  $h$  ou  $h'$  est nul.

Le projet de Hamilton était donc de construire une telle algèbre (réelle, associative, à division) en dimension 3. Pourquoi a-t-il échoué? Peut-on envisager de telles algèbres en dimensions supérieures? La réponse est apportée en 1877 par un théorème de Frobenius :

**Théorème 2.1 (Frobenius).** — *Les seules algèbres associatives, à division, de dimension finie sur  $\mathbb{R}$ , sont :  $\mathbb{R}$ ,  $\mathbb{C}$  et  $\mathbb{H}$ .*

Ce théorème désormais classique est enseigné et démontré dans les premiers cycles universitaires (voir par exemple [1]).

En corollaire immédiat on déduit que les seules algèbres associatives et commutatives, à division, et de dimension réelle finie sont  $\mathbb{R}$  et  $\mathbb{C}$ .

### 3. La question de la commutativité

La propriété qu’il a fallu abandonner lors du passage aux quaternions, est la propriété de commutativité. En effet, dans les algèbres  $\mathbb{R}$  et  $\mathbb{C}$ , le produit satisfait

$$x \cdot y = y \cdot x,$$

pour tous éléments  $x, y$  réels ou complexes. Ceci n’est plus vrai dans  $\mathbb{H}$  et rend l’algèbre des quaternions plus difficile à manier. Plusieurs procédés algébriques ou géométriques nécessitent des algèbres commutatives.

Dans un travail récent, en collaboration avec V. Ovsienko, nous avons observé que l’algèbre  $\mathbb{H}$  est en fait commutative au sens gradué.

**Définition 3.1.** — Considérons  $(\Gamma, +)$  un groupe abélien. Une algèbre  $\mathcal{A}$  est dite  $\Gamma$ -graduée, si  $\mathcal{A} = \bigoplus_{\gamma \in \Gamma} \mathcal{A}_\gamma$  et

$$\mathcal{A}_\gamma \cdot \mathcal{A}_{\gamma'} \subset \mathcal{A}_{\gamma+\gamma'}.$$

L’algèbre est *graduée commutative*, s’il existe une application bilinéaire  $\langle , \rangle : \Gamma \times \Gamma \rightarrow \mathbb{Z}_2$  telle que

$$(1) \quad x \cdot y = (-1)^{\langle \bar{x}, \bar{y} \rangle} y \cdot x,$$

pour tous éléments homogènes  $x, y$  de  $\mathcal{A}$  de degré respectif  $\bar{x}$  et  $\bar{y}$  dans  $\Gamma$ .

**Théorème 3.2.** — [2] *L’algèbre des quaternions est  $(\mathbb{Z}_2)^3$ -commutative.*

En effet, si on associe les “degrés triples” suivants aux éléments de la base standard de  $\mathbb{H}$  :

$$\begin{aligned} \bar{1} &= (0, 0, 0), \\ \bar{i} &= (0, 1, 1), \\ \bar{j} &= (1, 0, 1), \\ \bar{k} &= (1, 1, 0), \end{aligned}$$

alors le produit dans  $\mathbb{H}$  satisfait (1) pour le produit scalaire usuel sur  $(\mathbb{Z}_2)^3$ .

Une remarque amusante est que si l’on identifie les éléments  $1, i, j, k$  à leur degré,  $\mathbb{H}$  peut-être vue comme une algèbre de triplets. En effet,  $\mathbb{H}$  est isomorphe à l’algèbre du groupe  $\mathbb{R} \langle \mathbb{Z}_2^3 \rangle$  munie de la loi de multiplication :

$$(a, b, c) \cdot (a', b', c') = (-1)^{a'(b+c)+b'c} (a + a', b + b', c + c'),$$

pour tous triplets  $(a, b, c)$  et  $(a', b', c')$  d'éléments de  $\mathbb{Z}_2$ .

Par exemple, la formule donne  $(0, 1, 1) \cdot (1, 0, 1) = (1, 1, 0)$ , correspondant à  $ij = k$ , et  $(1, 0, 1) \cdot (0, 1, 1) = -(1, 1, 0)$ , correspondant à  $ji = -k$ .

Finalement, ne pourrait-on pas dire que Hamilton savait multiplier des triplets...

#### 4. Généralisations et perspectives

Peut-on étendre la liste  $\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$  ?

Si on abandonne la condition d'associativité, la liste peut se rallonger avec exactement une algèbre supplémentaire  $\mathbb{O}$ , l'algèbre des octonions.

Si on garde la condition d'associativité, on peut alors essayer d'assouplir la condition de commutativité. Motivés par l'observation que l'algèbre  $\mathbb{H}$  est graduée commutative ( $\mathbb{R}$  et  $\mathbb{C}$  l'étant trivialement) nous avons entrepris, en collaboration avec V. Ovsienko, une étude plus complète de telles algèbres. Nous obtenons :

**Théorème 4.1.** — [3] *Toute algèbre associative, graduée commutative, simple, de dimension finie sur  $\mathbb{R}$ , est isomorphe à une algèbre de Clifford.*

Compte-tenu de la classification bien connue des algèbres de Clifford (voir par exemple [4]), on obtient alors la liste complète :

$\mathbb{R}$		
$\mathbb{R}(2)$	$\mathbb{C}$	
$\mathbb{R}(4)$	$\mathbb{C}(2)$	$\mathbb{H}$
$\mathbb{R}(8)$	$\mathbb{C}(4)$	$\mathbb{H}(2)$
$\mathbb{R}(16)$	$\mathbb{C}(8)$	$\mathbb{H}(4)$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

où la notation  $\mathbb{K}(n)$  désigne les matrices carrées d'ordre  $n$  à coefficients dans  $\mathbb{K}$ .

La classe des algèbres réelles commutatives admet un procédé de *complexification*. En effet, si  $\mathcal{A}$  est une algèbre réelle commutative alors  $\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \mathcal{A}$  est une algèbre complexe commutative. La "quaternionisation" ne peut être envisagée sans perte de la commutativité. En revanche, elle peut être envisagée dans la classe des algèbres graduées commutatives.

On espère que des procédés et constructions propres aux algèbres commutatives, notamment en géométrie algébrique, pourront être étendus aux algèbres graduées commutatives.



### Références

- [1] T. Y. Lam, *Hamilton's quaternions*, Handbook of algebra, Vol. 3, 429–454, North-Holland, Amsterdam, 2003.
- [2] S. Morier-Genoud, V. Ovsienko, *Well, Papa, can you multiply triplets?*, Math. Intelligencer, Vol 31, no 4, 1-2, 2009.
- [3] S. Morier-Genoud, V. Ovsienko, *Simple graded commutative algebras*, J. Algebra, à paraître.
- [4] I. R. Porteous, *Clifford Algebras and the Classical Groups*, Cambridge Univ. Press, 1995.

*Sophie Morier-Genoud*

Université Pierre et Marie Curie- Paris 6, Institut Mathématiques de Jussieu,  
175 rue du Chevaleret, 75013 Paris.

*E-mail* : `sophieng@math.jussieu.fr`



# POINTS FIXES ET POINTS DE COÏNCIDENCE POUR LES MULTIAPPLICATIONS

*Khadra Nachi*

*Résumé.* — Nous donnons un résultat de point fixe pour une correspondance non dilatante et asymptotiquement contractante. Nous présentons aussi un théorème de coïncidence qui généralise un résultat classique de Nadler.

## 1. Multiapplications asymptotiquement contractantes et leurs points fixes

La définition suivante généralise la notion d'application asymptotiquement contractante au cas des correspondances. Elle utilise la définition de l'*excès de Hausdorff* entre deux parties  $A, B$  d'un espace vectoriel normé  $X$  :

$$e(A, B) := \sup_{a \in A} d(a, B)$$

où  $d(a, B) := \inf\{\|a - b\| : b \in B\}$ . On utilise la convention  $e(\emptyset, B) = 0$  pour toute partie  $B$  de  $X$  et  $e(A, \emptyset) = +\infty$  pour toute partie non vide  $A$  de  $X$ . Nous nous servirons aussi de la *distance de Pompeiu-Hausdorff* entre  $A$  et  $B$  définie par

$$d(A, B) := \max(e(A, B), e(B, A)).$$

Notons que dans la définition qui suit, le mot "asymptotiquement" n'est pas lié aux itérations de la multiapplication comme dans [2] et de nombreux articles, mais porte sur le comportement de la multiapplication quand la norme de la variable tend vers l'infini. Ce comportement peut être étudié à l'aide de concepts de cônes asymptotes et de compacité asymptotique comme dans [1], [3], [4], [5], [10].

**Définition 1.1.** — Soit  $C$  un sous-ensemble non vide d'un espace de Banach  $X$  et soit  $F : C \rightarrow 2^X$  une multiapplication à valeurs non vides. On dit que  $F$  est asymptotiquement contractante sur  $C$  s'il existe un point  $x_0 \in C$  tel que

$$(1) \quad \limsup_{x \in C, \|x\| \rightarrow \infty} \frac{e(F(x), F(x_0))}{\|x - x_0\|} < 1.$$

Lorsque  $F$  est univoque i.e.  $F(x) := \{f(x)\}$  où  $f : C \rightarrow X$  est une application, on retrouve la définition d'une application asymptotiquement contractante sur  $C$  donnée dans [8] comme une variante de la notion introduite dans [4].

Si  $e(F(x), F(x')) < \infty$  pour tous  $x, x' \in C$  (en particulier, si  $F$  est à valeurs bornées) alors la condition (1) est indépendante du choix de  $x_0 \in C$  : en effet, soit  $x_1 \in C$  ( $x_1 \neq x_0$ ). Comme  $e(F(x), F(x_1)) \leq e(F(x), F(x_0)) + e(F(x_0), F(x_1))$  on a

$$\frac{e(F(x), F(x_1))}{\|x - x_1\|} \leq \left( \frac{e(F(x), F(x_0))}{\|x - x_0\|} + \frac{e(F(x_0), F(x_1))}{\|x - x_0\|} \right) \frac{\|x - x_0\|}{\|x - x_1\|},$$

et

$$\limsup_{x \in C, \|x\| \rightarrow \infty} \frac{e(F(x), F(x_1))}{\|x - x_1\|} \leq \limsup_{x \in C, \|x\| \rightarrow \infty} \frac{e(F(x), F(x_0))}{\|x - x_0\|} < 1.$$

Rappelons qu'une multiapplication  $F : C \rightarrow 2^X$  est *non-dilatante* si pour tous  $x, x' \in C$ , on a

$$(2) \quad F(x) \subset F(x') + \|x - x'\| B_X,$$

où  $B_X$  est la boule unité fermée dans  $X$  tandis que  $F$  est *demi-fermée* si son graphe  $\text{Gr}(F) := \{(x, y) \in C \times X : y \in F(x)\}$  est séquentiellement fermé dans l'espace produit  $C \times X$  muni de la topologie faible dans  $C$  et de la topologie de la norme dans  $X$ , i.e.

$$((x_n, y_n))_n \subset \text{Gr}(F), (x_n) \rightarrow x \in C \text{ et } (y_n) \rightarrow y \implies y \in F(x).$$

**Proposition 1.2.** — Soit  $X$  un espace de Banach réflexif et soit  $C$  un sous-ensemble convexe fermé de  $X$ . Soit  $F : C \rightarrow 2^X$  une multiapplication à valeurs fermées, non vides, non-dilatante et satisfaisant la condition (1) en un point  $x_0 \in C$  tel que  $F(x_0)$  soit borné. Si  $F(C) \subset C$  et si  $I - F$  est demi-fermée alors  $F$  admet un point fixe.

*Démonstration :* Soit  $x_0 \in C$  tel que  $F(x_0)$  soit borné. Considérons une suite  $(\theta_n)$  dans  $(0, 1)$  telle que  $(\theta_n) \rightarrow 1$ . Définissons, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , la multiapplication  $F_n : C \rightarrow 2^X$  par

$$(3) \quad F_n(x) := \theta_n F(x) + (1 - \theta_n)x_0.$$

Comme  $F(C) \subset C$  et comme  $C$  est convexe on a  $F_n(C) \subset C$ . D'autre part, pour  $x, x' \in C$  et  $v_n \in F_n(x)$ , il existe, d'après (3),  $u_n \in F(x)$  tel que  $v_n = \theta_n u_n + (1 - \theta_n)x_0$  et il existe, d'après (2),  $u'_n \in F(x')$  tel que  $\|u_n - u'_n\| \leq \|x - x'\|$ . Donc pour  $v'_n = \theta_n u'_n + (1 - \theta_n)x_0 \in F_n(x')$ , on a

$$\|v_n - v'_n\| \leq \theta_n \|x - x'\|,$$

ce qui montre que  $F_n$  est  $\theta_n$ -contractante dans  $C$ , i.e.

$$\forall x, x' \in C \quad F_n(x) \subset F_n(x') + \theta_n \|x - x'\| B_X.$$

Le théorème de Nadler [6] assure alors l'existence d'un point fixe de  $F_n$  dans  $C$ . Soit, pour tout  $n$ ,  $x_n \in C$  tel que  $x_n \in F_n(x_n)$ . D'après (3), il existe  $y_n \in F(x_n)$  tel que :

$$(4) \quad x_n = \theta_n y_n + (1 - \theta_n)x_0,$$

donc

$$(5) \quad (1 - \theta_n)(x_0 - y_n) = x_n - y_n \in (I - F)(x_n).$$

Remarquons d'abord que si la suite  $(x_n)$  est bornée, la conclusion de la proposition est immédiate. En effet,  $(x_n)$  étant bornée dans un espace de Banach réflexif, elle admet une sous-suite, notée encore  $(x_n)$ , convergeant faiblement vers un point  $\bar{x}$ . Comme la suite  $(x_n - y_n)$  converge vers 0 (car  $(y_n) = (x_0 + \theta_n^{-1}(x_n - x_0))$  est bornée d'après (4)), on conclut, par l'hypothèse de fermeture, que  $0 \in (I - F)(\bar{x})$  avec  $\bar{x} \in C$ , i.e. que  $\bar{x}$  est un point fixe de  $F$ .

Ainsi, pour achever la preuve de la proposition, il suffit de montrer que  $(x_n)$  est bornée. Supposons le contraire ; il existe donc une sous-suite, notée encore  $(x_n)$ , telle que  $(\|x_n\|) \rightarrow \infty$ . Comme la condition (1) est satisfaite il existe  $c \in ]0, 1[$  et  $\rho > 0$  tels que

$$\forall x \in C, \|x\| \geq \rho : e(F(x), F(x_0)) < c \|x - x_0\|.$$

Pour  $n$  assez grand on a  $\theta_n > c$  et  $\|x_n\| \geq \rho$  donc

$$d(y_n, F(x_0)) < c \|x_n - x_0\|.$$

Il existe donc une suite  $(z_n)$  dans  $F(x_0)$  qui sera bornée telle que

$$\|y_n - z_n\| \leq c \|x_n - x_0\|.$$

D'autre part, des égalités (4) et (5), il vient :

$$\begin{aligned} \|x_n\| &\leq \|x_n - y_n\| + \|y_n - z_n\| + \|z_n\|, \\ &\leq (1 - \theta_n) \|x_0 - y_n\| + c \|x_n - x_0\| + \|z_n\|, \\ &\leq ((1 - \theta_n)\theta_n^{-1} + c) \|x_n - x_0\| + \|z_n\|. \end{aligned}$$

Divisant par  $\|x_n\|$ , on obtient

$$1 \leq (\theta_n^{-1} - 1 + c) \left(1 + \frac{\|x_0\|}{\|x_n\|}\right) + \frac{\|z_n\|}{\|x_n\|}.$$

Passant à la limite, en sachant que  $(\|z_n\|)$  est bornée, que  $(\|x_n\|) \rightarrow \infty$  et  $(\theta_n) \rightarrow 1$ , une contradiction en découle. Donc la suite  $(x_n)$  est bornée et la proposition est démontrée.

## 2. Théorème de coïncidence en analyse multivoque

Le résultat précédent peut être généralisé au cas d'une coïncidence entre deux correspondances. Pour illustrer la souplesse de l'analyse multivoque, nous nous contenterons d'établir une généralisation du célèbre théorème de Nadler ([6]). Donnons pour cela une définition précise.

**Définition 2.1.** — Soient  $X$  un ensemble,  $Y$  un espace vectoriel et soient  $F, G : X \rightarrow 2^Y$  deux multiapplications. On dira que  $F$  et  $G$  "présentent une coïncidence" dans  $X$  s'il existe un point  $u \in X$  tel que

$$0 \in (G - F)(u).$$

Le point  $u$  est appelé point de coïncidence de  $F$  et  $G$ .

Remarquons que lorsque  $Y = X$  et  $G$  est la multiapplication définie par  $G(x) := \{x\}$  pour  $x \in X$ , on obtient la définition de point fixe de la multiapplication  $F$ . Observons aussi que la relation  $0 \in (G - F)(u)$  s'écrit encore  $F(u) \cap G(u) \neq \emptyset$ , de sorte que deux applications  $f, g : X \rightarrow Y$  présentent une coïncidence dans  $X$  si, et seulement si, il existe un point  $u \in C$  tel que  $f(u) = g(u)$ .

**Proposition 2.2.** — Soient  $X$  un ensemble non vide,  $Y$  un espace de Banach et soient  $F, G : X \rightarrow 2^Y$  deux multiapplications à valeurs non vides telles que

$$(6) \quad \exists \lambda \in ]0, 1[, \forall (x, y), (x', y') \in \text{Gr}(G) \quad d(F(x), F(x')) \leq \lambda \|y - y'\|.$$

Si  $F$  est à valeurs fermées et si  $G(X)$  est fermé et contient  $F(X)$ , alors  $F$  et  $G$  admettent un point de coïncidence  $\bar{x} \in X$ .

Si, de plus  $Y = X$  et s'il existe  $\bar{y} \in G(\bar{x}) \cap F(\bar{x})$  tel que

$$(7) \quad G(\bar{x}) \subset G(\bar{y}) \text{ et } G(F(\bar{x})) \subset F(\bar{y}),$$

alors  $\bar{y}$  est un point fixe commun de  $F$  et  $G$ .

Démonstration : Soit  $H : G(X) \rightarrow 2^Y$  donnée par  $H := F \circ G^{-1}$ , soit

$$H(y) := \{z \in Y : \exists x \in X, y \in G(x), z \in F(x)\}.$$

La relation (6) assure que  $H$  est une multiapplication contractante de taux  $\lambda$ . De plus,  $H$  est à valeurs fermées car pour tout  $y \in G(X)$  et tous  $x, x' \in G^{-1}(y)$  on a  $F(x) = F(x')$ , de sorte que  $H(y) = F(x)$ .

Le théorème de Nadler assure qu'il existe  $\bar{y} \in G(X)$  tel que  $\bar{y} \in H(\bar{y})$ . Ainsi, pour tout  $\bar{x} \in G^{-1}(\bar{y})$  on a  $\bar{y} \in F(\bar{x}) \cap G(\bar{x})$ .

**Remarque 2.3.** — : Si  $G(\bar{x}) \subset G(\bar{y})$  et  $G(F(\bar{x})) \subset F(\bar{y})$  alors  $\bar{y}$  est un point fixe commun de  $F$  et  $G$  car on a alors  $\bar{y} \in G(\bar{x}) \subset G(\bar{y})$  et  $\bar{y} \in G(\bar{y}) \subset G(F(\bar{x})) \subset F(\bar{y})$ .

Si de plus  $F$  et  $G$  sont les multiapplications dont le graphe coïncide avec le graphe d'applications  $f$  et  $g$  les inclusions précédentes se traduisent par

$$g(\bar{x}) = g^2(\bar{x}) \text{ et } g(f(\bar{x})) = f(g(\bar{x})).$$

On obtient alors le résultat de Pathak-[7, Prop. 4] donné dans le cas univoque.

### Références

- [1] J.-P. Dediou, *Cône asymptote d'un ensemble non convexe. Application à l'optimisation*, C. R. Acad. Sci. Paris, 287 (1977), 501-503.
- [2] W.A. Kirk, *The fixed point property and mappings which are eventually nonexpansive*, in Kartatos, Athanassios G. (ed.), *Theory and applications of nonlinear operators of accretive and monotone type*, Lect. Notes Pure Appl. Math. 178, Marcel Dekker, New York (1996), 141-147.
- [3] D. T. Luc, *Recession maps and applications*, Optimization 27 (1993), 1-15.
- [4] D. T. Luc, *Recessively compact sets : properties and uses*, Set-Valued Anal. 10 (2002), 15-35.
- [5] D. T. Luc and J.-P. Penot, *Convergence of asymptotic directions*, Trans. Amer. Math. Soc. 353 (2001), 4095-4121.
- [6] S. B. Nadler, *Multivalued contraction mappings*, Pacific J. Maths. 30 (1969), 475-488.
- [7] H. K. Pathak, B.E. Rhoades and M. S. Khan, *Common fixed point theorem for asymptotically contractante mappings without compactness*, Preprint (2006).
- [8] J.-P. Penot, *A fixed point theorem for asymptotically contracting mappings*, Proc. Amer. Math. Soc. 131, N 8, (2003), 2371-2377.
- [9] J.-P. Penot, *A metric approach to asymptotic analysis*, Bulletin des Sciences Math. 127 (2003), 815-833.
- [10] J.-P. Penot and C. Zălinescu, *Continuity of usual operations and variational convergences*, Preprint, Univ. of Pau, 2000 and 2001.
- [11] C. Zălinescu, *Recession cones and asymptotically compact sets*, J. Optim. Theory Appl., 77 (1993), 209-220.

*Khadra Nachi*

Université d'Oran, Département de Mathématiques, BP 1524 El M'naouer, Oran, Algérie.

*E-mail* : nachikhadra@yahoo.fr





# COMBINATOIRE DES ATTRACTEURS DE CIRCUITS D'AUTOMATES BOOLÉENS

*Mathilde Noual*

**Résumé.** — Dans le cadre de l'informatique théorique et de la biologie, les réseaux d'automates booléens sont souvent vus comme des modèles de réseaux de régulation génétique. Ici, nous présentons des résultats concernant la dynamique de réseaux d'automates booléens dont la structure sous-jacente est un circuit appelé *circuit d'automates booléens*. Ces réseaux particuliers sont connus pour jouer un rôle clé dans la dynamique asymptotique d'un réseau de régulation. Notre travail se concentre sur leur nombre d'attracteurs (comportements dynamiques asymptotiques distincts) dans le cas d'un mode d'itération bloc-séquentiel quelconque des automates.

## 1. Introduction

Depuis que Thomas [3] introduisit les premiers modèles à la fin des années soixante, de nombreux travaux ont été publiés dans le domaine des réseaux de régulation, tous motivés principalement par le besoin de comprendre mieux certains comportements dynamiques émergents des réseaux qui ne peuvent être expliqués par une simple analyse des interactions locales s'effectuant entre leurs éléments. Dans la lignée de certains des auteurs de ces travaux, nous avons choisi de nous concentrer sur les modèles de réseaux de régulation discrets que sont les réseaux d'automates booléens. Plus précisément, nous nous sommes intéressés à des réseaux d'automates booléens dont la structure sous-jacente est un circuit et qui sont connus [4] pour être des motifs jouant un rôle central dans la dynamique asymptotique des réseaux dans lesquels on les retrouve. Outre les sous-motifs importants que peut contenir un réseau d'automates booléens, parmi ses caractéristiques pouvant avoir un impact significatif sur sa dynamique, on trouve le mode d'itération de ses automates, *i.e.*, l'ordre dans lequel les états de ses automates sont mis à jour à chaque étape de temps. En focalisant notre attention sur des réseaux dont la structure est simple, à savoir les circuits d'automates booléens, nous avons pu effectuer une analyse combinatoire de leur dynamique pour tous les modes d'itération bloc-séquentiels, *i.e.*, pour tous les modes d'itération déterministes et invariants

dans le temps tels qu'à chaque étape de temps tous les automates voient leur état être mis à jour exactement une fois. Nous avons ainsi déterminé le nombre exact d'attracteurs d'une période donnée et au total d'un circuit d'automates booléens de taille arbitraire. La section 3 traite le cas du mode d'itération parallèle et la section 4 celui des autres modes d'itération bloc-séquentiels.

## 2. Définitions

Un **circuit** de taille  $n$  est un graphe dirigé noté ici  $\mathbb{C}_n = (V, A)$ . L'ensemble de ses sommets  $V = \{0, \dots, n-1\}$  est vu comme l'ensemble des éléments de  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$  de sorte que si  $i$  et  $j$  sont deux sommets,  $i+j$  désigne le sommet  $i+j \pmod n$ . L'ensemble des arcs du circuit est  $A = \{(i, i+1) \mid i \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}\}$ . Un réseau d'automates booléens associé à un circuit de taille  $n$ , ou, plus simplement, un **circuit d'automates booléens** de taille  $n$  est un couple  $R_n = (\mathbb{C}_n, F)$  où  $\mathbb{C}_n = (V, A)$  est un circuit de taille  $n$  dont les sommets sont assimilés aux automates du réseau  $R_n$  et  $F : \{0, 1\}^n \rightarrow \{0, 1\}^n$  est la **fonction globale de transition** du réseau  $R_n$ . Par abus de langage, on parlera de l'**état** (global) de  $R_n$  pour désigner le vecteur booléen  $x = (x_0 \dots x_{n-1}) \in \{0, 1\}^n$  dont le coefficient  $x_i$  correspond à l'état du sommet (ou automate)  $i$  de  $\mathbb{C}_n$ . Soit  $\text{id}$  la fonction d'identité booléenne ( $\forall a \in \{0, 1\}, \text{id}(a) = a$ ) et  $\text{neg}$  la fonction de négation booléenne ( $\forall a \in \{0, 1\}, \text{neg}(a) = \neg a = 1 - a$ ). La fonction  $F$  est définie par l'ensemble des  $n$  **fonctions locales de transition**  $\{f_i \in \{\text{id}, \text{neg}\} \mid i \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}\}$ . Ici, nous nous intéressons principalement au mode de mise à jour (ou mode d'itération) parallèle. Les fonctions locales de transition sont donc appliquées simultanément : soit  $x = (x_0 \dots x_{n-1}) \in \{0, 1\}^n$  un état global de  $R_n$  à une certaine date  $t \in \mathbb{N}$  du temps discrétisé, alors l'état global de  $R_n$  à la date  $t+1$  est :  $F(x) = (f_0(x_{n-1}), \dots, f_i(x_{i-1}), \dots, f_{n-1}(x_{n-2}))$ .

On dit qu'un arc  $(i, i+1)$  est **positif** (*resp.* **négatif**) quand  $f_{i+1} = \text{id}$  (*resp.*  $f_{i+1} = \text{neg}$ ). Le réseau  $R_n$  et le circuit  $\mathbb{C}_n = (V, A)$  associé sont dits *positifs* (*resp.* *négatifs*) quand le nombre d'arcs négatifs de  $A$  est pair (*resp.* impair).

Comme l'ensemble  $\{0, 1\}^n$  des états globaux d'un réseau  $R_n$  de taille finie est fini, chacun de ses états  $x \in \{0, 1\}^n$  vérifie nécessairement  $\exists t, p \in \mathbb{N}, F^{t+p}(x) = F^t(x)$ . On appelle **attracteur** ou **cycle limite** de  $R_n$  un ensemble d'états de la forme  $\{F^{t+k}(x) \mid k \in \mathbb{N} \text{ et } \exists p \in \mathbb{N}, F^{t+p}(x) = F^t(x)\}$ . La période de cet attracteur est le plus petit entier  $p$  vérifiant  $\forall k \in \mathbb{N}, F^{t+k+p}(x) = F^{t+k}(x)$ . Les états appartenant à un attracteur de période 1 sont appelés des **points fixes**. Le nombre d'attracteurs de période  $p$  de  $R_n$  est noté  $A_p(R_n)$ .

## 3. Dynamique de circuits d'automates booléens mis à jour en parallèle

Dans l'étude que nous résumons ici, deux quantités nous ont intéressées : le nombre d'attracteurs de période  $p$  d'un circuit d'automates booléens mis à jour en parallèle ( $A_p(R_n)$ ) et le nombre *total* de ses attracteurs ( $\sum_p A_p(R_n)$ ). Nous avons tout d'abord remarqué et prouvé en prolongeant un résultat de Goles *et*

al. [1] que : (i) tout état d'un tel réseau appartient nécessairement à un attracteur et, (ii) les périodes des attracteurs sont les entiers  $p$  divisant la taille  $n$  du circuit, dans le cas d'un circuit positif, ou divisant  $2n$  sans diviser  $n$  (i.e.,  $p$  est un diviseur pair de  $2n$  tel qu'il existe un entier impair  $q$  vérifiant  $2n = q \times p$ ) dans le cas d'un circuit négatif de taille  $n$ . De plus, le nombre d'attracteurs de chaque période pour un circuit d'automates booléens donné, soit positif, soit négatif, ne dépend pas du nombre (à condition qu'il soit pair soit impair) d'arcs négatifs dans le circuit associé ni de leur répartition le long de celui-ci. Autrement dit, si  $R_n = (C_n, F)$  et  $R'_n = (C'_n, H)$  sont deux circuits d'automates booléens de taille  $n$  et de même signe, alors  $\forall p \in \mathbb{N}$ ,  $A_p(R_n) = A_p(R'_n)$ . Ainsi, on note  $A_p^+ = A_p(R_p)$  pour tout circuit d'automates booléens positif  $R_p$  de taille  $p$  et  $A_{2p}^- = A_{2p}(R_p)$  pour tout circuit d'automates booléens négatif  $R_p$  de taille  $p$ . En comparant le comportement dynamique de circuits d'automates booléens de tailles différentes mais de même signe, on obtient le lemme suivant :

**Lemme 3.1.** — Soit  $R_n$  un circuit d'automates booléens de taille  $n$ . Si  $R_n$  est positif, alors, pour tout diviseur  $p$  de  $n$ ,  $A_p(R_n) = A_p^+$ . Si  $R_n$  est négatif, alors, pour tout diviseur  $p$  de  $n = p \times q$  où  $q$  est impair,  $A_{2p}(R_n) = A_{2p}^-$ .

Ainsi, nous en déduisons notre résultat principal concernant le comportement dynamique de circuits d'automates booléens mis à jour en parallèle :

**Théorème 3.2.** — Soit  $A_n^+$  (resp.  $A_n^-$ ) le nombre d'attracteurs de période  $p$  d'un circuit d'automates booléens positif (resp. négatif) dont la taille  $n$  est un multiple de  $p$  (resp. dont la taille  $n$  vérifie  $2 \cdot n = p \cdot q$  où  $q \in \mathbb{N}$  est impair). Soit  $T_n^+$  (resp.  $T_n^-$ ) le nombre total d'attracteurs distincts d'un circuit d'automates booléens positif (resp. négatif). Alors,  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,

$$\begin{aligned}
 (i) \quad 2^n &= \sum_{p|n} A_p^+ \times p & (iv) \quad 2^n &= \sum_{\text{odd } q|n} A_{2n/q}^- \times 2n/q \\
 (ii) \quad A_n^+ &= \frac{1}{n} \cdot \sum_{p|n} \mu\left(\frac{n}{p}\right) \cdot 2^p & (v) \quad A_{2n}^- &= \frac{1}{2n} \cdot \sum_{\text{odd } q|n} \mu(q) \cdot 2^{n/q} \\
 (iii) \quad T_n^+ &= \frac{1}{n} \cdot \sum_{p|n} \psi\left(\frac{n}{p}\right) \cdot 2^p & (vi) \quad T_n^- &= \frac{1}{2n} \cdot \sum_{\text{odd } p|n} \psi\left(\frac{n}{p}\right) \cdot 2^p
 \end{aligned}$$

où  $\mu$  est la fonction de Möbius et  $\psi$  est l'indicatrice d'Euler.

Les suites d'entiers  $(A_n^+)_{n \in \mathbb{N}}$ ,  $(T_n^+)_{n \in \mathbb{N}}$ ,  $(A_{2n}^-)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(T_n^-)_{n \in \mathbb{N}}$  mentionnées dans le théorème 3.2 sont en réalité déjà connues [6] mais dans le cadre de problèmes combinatoires différents de celui qui nous intéresse. Par exemple, les trois premières de ces suites sont intimement liées aux colliers de perles et aux mots de Lyndon [7] et les suites  $(T_n^+)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(T_n^-)_{n \in \mathbb{N}}$  comptent toutes deux le nombre de séquences distinctes produites par des machines à registres binaires décalantes<sup>1</sup>. Nous avons étudié les isomorphismes existant entre ces différents problèmes pour en tirer de nouvelles manières de formaliser la combinatoire de la dynamique de circuits d'automates booléens. En particulier, compter le nombre d'attracteurs d'un circuit d'automates

<sup>1</sup>En anglais : "binary shift register machines".

booléens  $\mathbb{C}_n$  en parallèle peut être vu comme un problème de comptage du nombre d'orbites des éléments de l'ensemble  $\mathbb{F}_2^n$  sous l'action du groupe cyclique d'ordre  $n$  engendré par la permutation  $\pi = (1, \dots, n)$ .

#### 4. Modes d'itération bloc-séquentiels quelconques

Soit  $\mathbb{C}_n = (V, A)$  un circuit d'automates booléens. Un mode d'itération bloc-séquentiel quelconque est une fonction  $s : V \rightarrow \{1, \dots, n\}$  qui donne une date de mise à jour à chaque sommet  $i \in V$  au sein d'une étape de temps, *i.e.*, entre la date  $t$  et la date  $t + 1$ , un sommet  $i$  est mis à jour à la date  $t + 1/s(i)$ . On définit  $\text{inv}(s) = \{(i, i + 1) \mid s(i) < s(i + 1)\}$  l'ensemble des inversions de  $s$  et le nouvel ensemble d'arcs suivant :  $A^s = \{(i, j) \mid s(j) \leq s(i) \text{ et } \forall i < k \leq j, (k, k + 1) \in \text{inv}(s)\}$ . Pour obtenir un résultat similaire au théorème 3.2 dans le cas d'un mode d'itération bloc-séquentiel quelconque, nous avons montré qu'itérer un circuit  $\mathbb{C}_n$  avec un mode d'itération  $s$  revient, en termes de combinatoire, à itérer en parallèle le circuit plus petit dont l'ensemble des arcs est  $A^s$ . Nous avons ainsi constaté que les modes d'itération bloc-séquentiels qui ont le même ensemble d'inversions induisent une même dynamique et qu'au contraire deux modes d'itération n'ayant pas le même ensemble d'inversions n'induisent pas la même dynamique.

#### 5. Conclusion

En ce qui concerne la dynamique des circuits d'automates booléens itérés suivant des modes d'itération bloc-séquentiels quelconques, la plupart des problèmes combinatoires a donc été traitée. Une question importante reste toutefois en suspens. Elle concerne la taille des ensembles de modes d'itération induisant un même comportement dynamique. Un autre problème qui découle naturellement du travail présenté ici est celui de la relation existant entre la dynamique d'un réseau ayant une structure quelconque et celle d'un circuit d'automates booléens. Résoudre ces deux problèmes nous permettrait par exemple d'expliquer pourquoi, d'après les résultats simulatoires présentés dans sa thèse [2], A. Elena trouve que les réseaux qui n'ont que des points fixes et aucun cycle limite de période plus grande que 1 quelque soit le mode d'itération sont les plus nombreux.

#### Références

- [1] Goles, E. and Fogelman-Soulie, F. and Weisbuch, G. *Specific roles of different Boolean mappings in random networks*, Bulletin of Mathematical Biology, 1982
- [2] Elena, A. *Robustesse des réseaux d'automates booléens à seuil aux modes d'itération. Application à la modélisation des réseaux de régulation génétique*, Thèse à l'Université Joseph Fourier, Grenoble, 2009
- [3] Thomas, R. *Boolean formalisation of genetic control circuits*, Journal of Theoretical Biology, 1973

- [4] Thomas, R. *On the relation between the logical structure of systems and their ability to generate multiple steady states or sustained oscillations*, Springer Series in Synergetics, 1981
- [5] Vasiga, T. and Shallit, J. *On the iteration of certain quadratic maps over  $GF(p)$* , Discrete Mathematics, 2004
- [6] N. J. A. Sloane *The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences*,  
<http://www.research.att.com/njas/sequences/>
- [7] C. Reutenauer, *Mots circulaires et polynômes irréductibles*, Annales des Sciences Mathématiques du Québec, vol. 12, pp. 275-285, 1988

*Mathilde Noual*

Laboratoire d'Informatique du Parallélisme (UM 16), École normale supérieure de Lyon,  
69007 Lyon, France, IXXI, Institut rhône-alpin des systèmes complexes, 69007 Lyon, France.

*E-mail* : `Mathilde.Noual@ens-lyon.fr`



# QUELQUES RÉSULTATS RÉCENTS EN APPROXIMATION DIOPHANTINNE.

*Martine Queffelec*

*Résumé.* — Les rationnels sont denses dans les réels et si une suite de rationnels réduits converge vers un irrationnel, la suite des dénominateurs doit tendre vers l'infini. Que peut-on dire de l'erreur, évaluée en fonction de la taille du dénominateur ? C'est l'objet de l'approximation diophantienne.

Historiquement, le lien avec la théorie de la transcendance a été un moteur évident mais des connections avec différentes directions thématiques apparaissent au fil du temps. En particulier, il y a un va-et-vient permanent entre l'approximation rationnelle et l'analyse harmonique ou les systèmes dynamiques : de nombreux résultats s'appuient sur les qualités d'approximation des nombres réels par les rationnels mais dans l'autre sens, l'approximation diophantienne se nourrit des techniques d'analyse, de dynamique ou de combinatoire.

Les résultats récents en approximation diophantienne partent essentiellement dans deux directions : des résultats globaux de type métrique faisant appel à la théorie de la mesure et la dimension de Hausdorff ; dans un tout autre esprit, des constructions explicites utilisant la combinatoire des mots. On essaiera d'illustrer ces deux aspects après un long rappel historique.

## 1. Rappel historique

L'approximation diophantienne ou rationnelle mesure la qualité d'approximation d'un nombre réel par les rationnels, ce qu'on relie historiquement aux propriétés algébriques de ce nombre. Tout réel  $x \in \mathbf{R}$  peut s'obtenir d'une infinité de façons comme limite d'une suite de rationnels ; de plus,

$$\forall q > 0, \exists p \in \mathbf{Z}; |x - \frac{p}{q}| \leq \frac{1}{2q}.$$

Peut-on faire mieux ? c'est-à-dire avoir une meilleure erreur relative à la taille ou la complexité du rationnel :  $\max(|p|, q)$ . Un nombre rationnel est mal approchable par les autres rationnels puisque, si les rationnels  $a/b$  et  $p/q$  sont distincts,

$$|\frac{a}{b} - \frac{p}{q}| = |\frac{aq - bp}{bq}| \geq \frac{1}{bq}.$$

Cela conduit au critère d'irrationalité classique : Si l'inégalité  $0 < |x - p/q| < \phi(q)$  admet une infinité de solutions où  $\phi > 0$  est  $o(1/q)$ , alors  $x \notin \mathbf{Q}$ . C'est le principe de la démonstration par Fourier (1815) de l'irrationalité de  $e$  et de la preuve par Beukers de l'irrationalité de  $\zeta(3)$  par exemple [3].

Le premier résultat général d'approximation diophantienne est dû à Dirichlet (1842) : il établit, comme conséquence du principe des tiroirs, que tout irrationnel s'approche à l'ordre 2 : Si  $x \notin \mathbf{Q}$ , il existe une infinité de rationnels  $p/q$  tels que  $0 < |x - p/q| < 1/q^2$ .

Au même moment, Liouville (1842) établit que les nombres algébriques (sur  $\mathbf{Q}$ ) ne peuvent être trop bien approchés, puisque : Pour un nombre algébrique  $x$  de degré  $d$ , il existe  $C > 0$  tel que  $|x - p/q| \geq C/q^d$  pour tout rationnel  $p/q$ .

Tout naturellement s'est posée la question de savoir si l'on pouvait décrire la propriété d'être algébrique en termes d'approximation. Le théorème de Roth en 1958, qui améliore cruellement le théorème de Liouville (en le rendant indépendant du degré), réduit de beaucoup tous ces espoirs.

**Théorème 1.1 (Roth).** — Pour tout  $x$  algébrique, pour tout  $\varepsilon > 0$ , l'inégalité  $0 < |x - \frac{p}{q}| < \frac{1}{q^{2+\varepsilon}}$  n'a qu'un nombre fini de solutions ; autrement dit si  $x$  est approchable à l'ordre  $b$  pour un  $b > 2$  (au sens où l'inégalité  $0 < |x - \frac{p}{q}| < \frac{1}{q^b}$  a lieu infiniment souvent), alors  $x$  est transcendant.

Pour autant, entre  $q^2$  et  $q^{2+\varepsilon}$  il reste beaucoup de place !

**Exemple [4]** : Le nombre  $e$  s'approche à l'ordre  $q^2 \log q / \log \log q$  et pas mieux.

La transcendance de  $e$  (établie par Hermite en 1872) ne résulte donc pas du théorème de Roth. Cependant, ce n'est pas un nombre si mal approchable : il existe des irrationnels approchables à l'ordre 2 exactement, ainsi les irrationnels quadratiques par le théorème de Liouville. Cela conduit à une première définition :

**Définition 1.1.** — On dit que  $x$  est mal approchable s'il existe  $C > 0$  avec  $|x - \frac{p}{q}| \geq \frac{C}{q^2}$  pour tout rationnel  $p/q$ . On désigne par **BAD** leur ensemble.

## 2. Développement en fraction continue

Comment trouve-t-on les meilleures approximations rationnelles ? Si on tronque le développement décimal d'un réel au  $n$ -ième terme pour obtenir le rationnel  $p_n/q_n$ , on fait une erreur d'ordre  $10^{-n}$  c'est-à-dire de l'ordre de  $1/q_n$  ; par contre il existe un développement plus adapté : le développement en fraction continue.

Tout irrationnel de  $\mathbf{R}$  admet un unique développement illimité de la forme

$$x = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \dots + \frac{1}{a_{n-1} + \frac{1}{a_n + \dots}}}}$$

qu'on écrit  $x = [a_0; a_1 a_2 \dots]$ , où  $a_0 = [x]$  et les  $a_n := a_n(x)$  sont des entiers  $\geq 1$  pour  $n \geq 1$ , appelés **quotients partiels**.

Le développement en fraction continue possède des propriétés importantes dont celles-ci :



1) (Algorithmique) Par troncature, il fournit des approximations rationnelles :  $p_n/q_n = [a_0; a_1 a_2 \cdots a_n]$ , qu'on appelle les **réduites** ou **convergentes** et qui se construisent à l'aide d'un algorithme **effectif**. Matriciellement on peut écrire

$$\begin{pmatrix} p_{n+1} & q_{n+1} \\ p_n & q_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{n+1} & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} a_0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$p_0 = a_0, q_0 = 1, p_{-1} = 1, q_{-1} = 0.$$

Noter ainsi que  $p_n/q_n$  est irréductible puisque  $p_{n+1}q_n - q_{n+1}p_n = (-1)^n$  pour tout  $n$ .

2) (Optimalité) Ces approximations fournissent une version explicite des approximations de Dirichlet. Elles vérifient en effet :

$$(1) \quad \frac{1}{(q_n + q_{n+1})q_n} < |x - \frac{p_n}{q_n}| < \frac{1}{q_{n+1}q_n} < \frac{1}{q_n^2}.$$

De plus, elles sont les **meilleures** possibles en ce sens : si  $\|x\| = d(x, \mathbf{Z})$ ,

$$(2) \quad \|q_n x\| = \min\{\|q x\|, q < q_{n+1}\}.$$

3) (Dynamique) Le développement en fraction continue d'un nombre de  $]0, 1[$  est donné par une transformation ; en effet, si  $a_1(x) = [\frac{1}{x}]$ ,  $\frac{1}{x} = a_1(x) + \{\frac{1}{x}\}$  et  $x =: \frac{1}{a_1(x) + T x}$  où  $T$  est la transformation de Gauss ; de sorte que  $a_n(x) = a_1(T^{n-1}x)$  pour tout  $n \geq 1$ . Le système dynamique associé  $((0, 1), \mathcal{B}, \mu, T)$ , muni de la mesure de Gauss  $\mu = \frac{1}{\log 2} \frac{dx}{1+x}$ , est ergodique et isomorphe à un shift sur  $(\mathbf{N}^*)^{\mathbf{N}^*}$ . En particulier, le théorème ergodique de Birkhoff nous dit que pour tout sous-ensemble mesurable  $A$  de  $(0, 1)$ , la fréquence de visite de  $A$  par  $x$ , sous l'action de  $T$ , est  $\mu(A)$  (pour presque tout  $x$ ). Ce qu'on exprime par : *la moyenne temporelle de  $A$  est égale à sa moyenne spatiale.*

### Retour à l'approximation en dimension 1

Les nombres mal approchables (dont font partie les irrationnels quadratiques) se décrivent facilement à l'aide du développement en fraction continue. Tout d'abord le théorème de Lagrange établit : *Les irrationnels quadratiques sont les nombres à développement en fraction continue ultimement périodique.*

Plus généralement, on a la caractérisation suivante :

**Proposition 2.1.** — *Un nombre réel est mal approchable si et seulement si la suite de ses quotients partiels est bornée.*

**Preuve :** Il résulte de (1) les inégalités  $\frac{1}{(a_{n+1}+2)q_n^2} < |x - \frac{p_n}{q_n}| < \frac{1}{a_{n+1}q_n^2}$ . Si  $a_n \leq K$  pour tout  $n$ ,  $\frac{1}{(K+2)q_n} \leq \frac{1}{(a_{n+1}+2)q_n} < \|q_n x\|$  et si  $q_n \leq q < q_{n+1}$ ,  $\|q x\| \geq \|q_n x\|$  par la propriété extrême des réduites (2) ; on en déduit  $\|q x\| \geq C/q$ . Dans l'autre sens,  $\frac{C}{q_n^2} \leq |x - \frac{p_n}{q_n}| < \frac{1}{(a_{n+1})q_n^2}$  implique  $a_n \leq 1/C$  pour tout  $n$ .  $\diamond$

Peut-on déterminer le développement en fraction continue des nombres célèbres (constantes universelles) ? On connaît celui de  $e$  depuis Euler (1737) :

$$e - 2 = [0; 1 \ 2 \ 1 \ 1 \ 4 \ 1 \ 1 \ 6 \ 1 \ \dots \ 1 \ 2n \ 1 \ \dots],$$

d’où l’on tire la propriété d’approximation citée au début ; en fait les seuls développements réguliers connus proviennent de fonctions hypergéométriques.

Les premiers exemples de nombres transcendants, donnés par Liouville, étaient des nombres à développement en base entière hyperlacunaire et ainsi très bien approchés, qu’on appelle désormais **nombres de Liouville**. Mais il existe des nombres transcendants mal approchables par un simple argument de cardinalité : l’ensemble des nombres mal approchables est non dénombrable alors que l’ensemble des nombres algébriques est dénombrable.

Faute de pouvoir expliciter le développement en fraction continue de nombres célèbres, on regarde le problème dans l’autre sens et on cherche des propriétés du comportement des quotients partiels satisfaites par presque tout réel. C’est là que la propriété dynamique va jouer un rôle.

### 3. Premiers résultats métriques

Borel et Khintchine, dans les 30 premières années du XXème, sont à l’origine de la théorie métrique des fractions continues. Le premier résultat métrique concernant la taille de **BAD** est dû à Borel :

**Proposition 3.1.** —  $m(\mathbf{BAD}) = 0$ , où  $m$  désigne la mesure de Lebesgue.

Tout d’abord, remarquons que la fréquence d’apparition de l’entier  $k \geq 1$ , fixé à l’avance, dans la suite des quotients partiels de  $x$  est presque sûrement

$$\pi_k = \frac{1}{\log 2} \log \left( 1 + \frac{1}{k(k+2)} \right).$$

Il suffit de prendre  $A = \{a_1 = k\}$  dans le théorème ergodique. En particulier, chaque  $k \geq 1$  apparaît avec une fréquence strictement positive dans la suite  $(a_n(x))$ , pour presque tout  $x$ . Maintenant **BAD** se décompose en  $\cup_N F(N)$  où

$$F(N) = \{x \in [0, 1]; a_n(x) \leq N \forall n \geq 1\};$$

il résulte de ce qui précède que chaque  $F(N)$ , et donc **BAD**, est de mesure nulle. C’est aussi une conséquence du théorème de Khintchine qui apporte la précision suivante :

**Théorème 3.1.** — Soit  $\phi : \mathbf{N} \rightarrow \mathbf{R}^+$  une fonction croissante et

$$\mathcal{K}_\phi = \{x / |qx - p| < 1/q\phi(q) \text{ pour une infinité de } p/q\}$$

Alors  $m(\mathcal{K}_\phi) = 0$  ou 1 selon que  $\sum 1/q\phi(q)$  converge ou diverge.

Le théorème de Roth a permis de définir une classe de nombres transcendants, les nombres très bien approchables :

**Définition 3.1.** — On désigne par **VWA** l’ensemble des nombres  $2 + \varepsilon$ -approchables pour un  $\varepsilon > 0$  i.e. les nombres pour lesquels il existe  $\varepsilon > 0$  tel que

$$\left| x - \frac{p}{q} \right| \leq \frac{C}{q^{2+\varepsilon}} \text{ pour une infinité de } p/q.$$

**Définition 3.2.** — *L'ensemble des nombres  $2 + \varepsilon$ -approchables pour tout  $\varepsilon > 0$  n'est autre que l'ensemble des nombres de Liouville noté par  $\mathcal{L}$*

Ainsi **VWA** contient les nombres de Liouville mais, il est loin d'épuiser l'ensemble des nombres transcendants car

**Proposition 3.2.** —  $m(\mathbf{VWA}) = 0$ .

C'est encore une conséquence directe du théorème de Khintchine.

#### 4. Résultats récents

Les questions en approximation diophantienne tournent autour des propriétés des développements en liaison avec la nature algébrique des nombres et conduisent à étudier les connections entre les différents développements eux-mêmes ; de nombreuses questions se posent aussi en dimension supérieure, sur l'approximation simultanée en particulier, où il n'existe pas d'analogue du développement en fraction continue jouissant des mêmes propriétés. Un ensemble de nombres définis par une propriété particulièrement simple de leur développement adique est l'ensemble de Cantor  $K$  (nombres sans 1 dans leur développement triadique). Il est clair que  $K$  contient des nombres de Liouville, ainsi  $\xi = 2 \sum_{n=1}^{\infty} 3^{-n!}$ , mais des questions subsistent :

- (1) (Mahler)  $K$  contient-il des nombres très bien approchables non Liouville ?
- (2) (Mahler) Les irrationnels de l'ensemble triadique de Cantor sont-ils tous transcendants ?
- (3) Y a-t-il des irrationnels quadratiques dans  $K$  ?
- (4) Y a-t-il des nombres mal approchables dans  $K$  ?
- (5) (Khintchine) Existe-t-il des nombres cubiques mal approchables ?

Voici quelques résultats récents faisant appel à la théorie de la mesure et la géométrie des fractales :

**Théorème 4.1 ([6]).** — *La dimension de Hausdorff de  $(\mathbf{VWA} \setminus \mathcal{L}) \cap K$  est au moins  $\alpha/2$ , avec  $\alpha = \log 2 / \log 3 = \dim K$ . En particulier il y a une infinité de nombres très bien approchables et non Liouville dans  $K$ .*

Pourtant,

**Théorème 4.2 ([7]).** — *Presqu'aucun nombre de  $K$  n'est très bien approchable c'est-à-dire  $\mu(\mathbf{VWA} \cap K) = 0$  si  $\mu$  est la mesure naturelle sur  $K$ .*

**Théorème 4.3 ([5]).** — *La dimension de Hausdorff de  $\mathbf{BAD} \cap K$  est égale à  $\alpha = \dim K$ . En particulier il y a une infinité de nombres mal approchables dans  $K$ .*

Par contre les questions 3 et 5 restent ouvertes.

Une autre approche consiste à construire des classes de nombres transcendants à partir de leurs quotients partiels : il résulte de l'inégalité  $|x - p_n/q_n| \leq 1/q_n q_{n+1}$  que le comportement des dénominateurs  $q_n$  est déterminant ; s'il y a explosion des quotients partiels, il y a explosion de la suite  $(q_n)$  et le nombre est transcendant par le

théorème de Roth. A l’opposé, pour les nombres à quotients partiels bornés, la suite  $(q_n)$  est simplement lacunaire. Pourtant il existe des nombres transcendants dans **BAD**, comment en construire ? L’idée consiste à utiliser la combinatoire des mots et l’approximation par les irrationnels quadratiques. Pour cela, on identifie un nombre de **BAD** à son développement en fraction continue  $a_1 a_2 \dots$ , qui est une suite à valeurs dans l’alphabet fini  $\mathcal{A} = \{1, 2, \dots, b\}$ . Une suite de la forme :  $UVVVV \dots =: UV^\infty$ ,  $U$  et  $V$  étant des mots finis de  $\mathcal{A}$  ( $V$  est infiniment répété) correspond au développement d’un irrationnel quadratique par le théorème de Lagrange. On dit qu’un mot  $U$  est un **carré** s’il s’écrit  $U = VV$  où  $V$  est lui-même un mot sur  $\mathcal{A}$  ; c’est un **palindrome** s’il est symétrique.

**Théorème 4.4 ([1, 2]).** — 1. *Le développement en fraction continue d’un nombre cubique ne commence pas par des carrés arbitrairement grands.*  
2. *Le développement en fraction continue d’un nombre cubique ne commence pas par des palindromes arbitrairement grands.*

### Références

- [1] B. Adamczewski et Y. Bugeaud, On the complexity of algebraic numbers. II. Continued fractions. *Acta Math.* **195** (2005), 1–20.
- [2] B. Adamczewski et Y. Bugeaud, Palindromic continued fractions. *Ann. Inst. Fourier* **57** (2007), 1557–1574.
- [3] F. Beukers, A note on the irrationality of  $\zeta(2)$  and  $\zeta(3)$ . *Bull. London Math. Soc.* **11** (1979), 268–272.
- [4] C.S. Davis, Rational approximations to  $e$ . *J. Austral. Math. Soc.* **25** (1978), 497–502.
- [5] D. Kleinbock and B. Weiss, Badly approximable vectors on fractals. *Israel J. Math.* **149** (2005), 137–170.
- [6] J. Levesley, C. Salp and S. Velani, On a problem of K. Mahler : Diophantine approximation and Cantor sets. *Math. Ann.* **338** (2007), 98–118.
- [7] B. Weiss, Almost no point on a Cantor set are very well approximable. *Proc. R. Soc. London* **457** (2001), 949–952.

*Martine Queffélec*

Université Lille1 Sciences et Technologies, 59655 Villeneuve d’Ascq Cedex.

*E-mail* : Martine.Queffelec@univ-lille1.fr

# QUELQUES PROBLÈMES DE PERTURBATION SINGULIÈRE

*Laure Saint-Raymond*

Quelques problèmes de perturbation singulière

Laure Saint-Raymond  
Université Paris VI & Ecole Normale Supérieure  
Département de Mathématiques et Applications  
Laure.Saint-Raymond@ens.fr

5 novembre 2009

## Un exemple en mécanique des fluides

### ► Description des océans à grande échelle

Si on considère l'océan comme un fluide

- homogène incompressible
- vérifiant la loi de pression hydrostatique
- et dont le mouvement est essentiellement horizontal

l'évolution de la hauteur d'eau  $h$  et de la vitesse  $v$  est donnée par les **équations de Saint-Venant avec force de Coriolis**

$$\begin{aligned}\partial_t h + \nabla \cdot (hu) &= 0 \\ \partial_t (hu) + \nabla \cdot (hu \otimes u) + \omega(hu)^\perp + \frac{1}{Fr^2} h \nabla h &= \tau\end{aligned}$$

où  $\omega$  est la composante verticale de la rotation de la Terre.

**Aux latitudes moyennes**, on peut approcher  $\omega$  par une constante.

### ► Un problème de perturbation singulière

En tenant compte des ordres de grandeur des différents paramètres physiques, on se ramène alors au **système adimensionné**

$$\begin{aligned}\partial_t \rho + \frac{1}{\varepsilon} \nabla \cdot u + \nabla \cdot (\rho u) &= 0 \\ \partial_t u + \frac{1}{\varepsilon} \nabla \rho + \frac{1}{\varepsilon} u^\perp + (u \cdot \nabla) u &= \tau\end{aligned}$$

où  $\varepsilon$  est très petit.

Le but de l'étude mathématique est de déterminer le **comportement asymptotique** de ce système, i.e. une bonne approximation dans la limite  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Plus généralement, on s'intéresse à des systèmes du type

$$\partial_t V + \frac{1}{\varepsilon} L V + Q(V, V) = 0$$

où  $L$  est un opérateur linéaire antisymétrique à coefficients constants.

► Etude heuristique

On s'attend à ce que

- la dynamique soit imposée par la pénalisation (oscillations) ;
- le mouvement moyen  $\bar{V}$  soit contraint ( $L\bar{V} = 0$ ) ;
- le terme non linéaire introduise des couplages entre les différents modes d'oscillation.

En physique, le mouvement est décomposé en **superposition d'ondes** dont on détermine les **équations d'enveloppe**.

**Remarque :** *si la structure de la pénalisation n'est pas compatible avec les conditions aux bords, il apparaît des **phénomènes de couche limite***

- *chaque onde est modifiée par un correcteur localisé au voisinage du bord*
- *ces correcteurs peuvent être instables (croissance exponentielle en temps)*
- *les effets de bords peuvent alors donner lieu à des comportements turbulents*

## Mouvement moyen et méthode de compacité faible

Si on s'intéresse uniquement au mouvement moyen, le bon outil mathématique est la **convergence faible** : la partie oscillante converge faiblement vers 0.

► Stratégie

Pour obtenir le comportement asymptotique, il suffit alors

- d'établir des bornes uniformes qui donnent la **compacité faible**

$$\|V_\varepsilon\|_{L^2} \leq C_0$$

- de dériver l'**équation de contrainte** sur la limite faible  $\bar{V}$

$$L\bar{V} = 0$$

- de passer à la limite dans l'**équation dynamique**

$$\partial_t \bar{V} = ?$$

La difficulté est d'obtenir la limite du terme non linéaire. En général

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} Q(V_\varepsilon, V_\varepsilon) \neq Q(\bar{V}, \bar{V}).$$

► **Compacité par compensation**

Dans certains cas, cette limite peut s'exprimer en fonction de  $\bar{V}$ .

Autrement dit, les couplages entre les oscillations ne perturbent pas le mouvement moyen.

Ce type de résultat, appelé **compacité par compensation**, repose sur une **propriété algébrique** dépendant de la structure de la non linéarité et du noyau de  $L$

$$\Pi Q(\Pi_\perp V, \Pi_\perp V) = 0.$$

**Remarque :** dans les autres cas, une description plus précise des oscillations est nécessaire.

► **Cas d'un fluide mince en rotation**

Soit  $(\rho_\varepsilon, u_\varepsilon)$  une famille de solutions des équations de Saint-Venant Coriolis.

La compacité faible est obtenue à partir des **estimations a priori** (qui donnent l'existence de solutions)

- conservation de l'énergie

$$\int (1 + \varepsilon \rho_\varepsilon) u_\varepsilon^2 dx + \int \rho_\varepsilon^2 dx \leq C_0;$$

- contrôle local de normes Sobolev (système hyperbolique)

$$\|u_\varepsilon\|_{H^s}^2 + \|\rho_\varepsilon\|_{H^s}^2 \leq C(t) \text{ pour } s > \frac{5}{2} \text{ et } t \text{ assez petit ;}$$

- estimation globale de régularité dans le cas visqueux

$$\int (1 + \varepsilon \rho_\varepsilon) u_\varepsilon^2 dx + \int \rho_\varepsilon^2 dx + \nu \int |\nabla u_\varepsilon|^2 dx \leq C_0;$$



L'**équation de contrainte** s'en déduit en étudiant l'opérateur de pénalisation

- son noyau

$$\text{Ker } L = \{(\bar{\rho}, \bar{u}) \in L^2 / \bar{u} = \nabla^\perp \bar{\rho}\}.$$

- le projecteur spectral associé

$$\Pi(\rho, u) = ((Id - \Delta)^{-1}(\rho - \nabla^\perp \cdot u), \nabla^\perp \cdot (Id - \Delta)^{-1}(\rho - \nabla^\perp \cdot u))$$

Soit  $(\bar{\rho}_\varepsilon, \bar{u}_\varepsilon)$  la projection de  $(\rho_\varepsilon, u_\varepsilon)$  sur  $\text{Ker } L$ .

$$(\bar{\rho}_\varepsilon, \bar{u}_\varepsilon) \rightharpoonup (\bar{\rho}, \bar{u}) \text{ avec } \bar{u} = \nabla^\perp \bar{\rho}.$$

De plus, par définition de  $\Pi$ , on a de la régularité spatiale sur  $(\bar{u}_\varepsilon)$ .

On note  $(\tilde{\rho}_\varepsilon, \tilde{u}_\varepsilon)$  la projection de  $(\rho_\varepsilon, u_\varepsilon)$  sur  $(\text{Ker } L)^\perp$ .

$$(\tilde{\rho}_\varepsilon, \tilde{u}_\varepsilon) \rightharpoonup 0.$$

A  $\varepsilon$  fixé, on a l'**équation dynamique**

$$\partial_t \begin{pmatrix} \bar{\rho}_\varepsilon \\ \bar{u}_\varepsilon \end{pmatrix} + \Pi \begin{pmatrix} \nabla \cdot (\rho_\varepsilon u_\varepsilon) \\ (u_\varepsilon \cdot \nabla) u_\varepsilon \end{pmatrix} = O(\varepsilon)$$

d'où l'on déduit de la régularité temporelle sur  $(\bar{\rho}_\varepsilon, \bar{u}_\varepsilon)$ .

- La **compacité forte** de  $(\bar{u}_\varepsilon)$  permet de passer à la limite dans les termes du type  $Q(\bar{V}_\varepsilon, \bar{V}_\varepsilon)$  et  $Q(\bar{V}_\varepsilon, \tilde{V}_\varepsilon)$ .
- La **compacité par compensation** montre que le dernier terme  $\Pi Q(\tilde{V}_\varepsilon, \tilde{V}_\varepsilon)$  tend vers 0. En effet, les oscillations de  $(\tilde{\rho}_\varepsilon, \tilde{u}_\varepsilon)$  sont décrites par

$$\begin{aligned} \varepsilon \partial_t \tilde{\rho}_\varepsilon + \nabla \cdot \tilde{u}_\varepsilon &= O(\varepsilon) \\ \varepsilon \partial_t \nabla \cdot \tilde{u}_\varepsilon + (Id - \Delta) \tilde{\rho}_\varepsilon &= O(\varepsilon) \end{aligned}$$

On a alors

$$\begin{aligned} \nabla \cdot (\tilde{\rho}_\varepsilon \tilde{u}_\varepsilon) - \nabla^\perp \cdot ((\tilde{u}_\varepsilon \cdot \nabla) \tilde{u}_\varepsilon) &= (\tilde{u}_\varepsilon \cdot \nabla)(\tilde{\rho}_\varepsilon - \nabla^\perp \cdot \tilde{u}_\varepsilon) - \tilde{\rho}_\varepsilon \nabla \cdot \tilde{u}_\varepsilon \\ &= \frac{\varepsilon}{2} \partial_t (\tilde{\rho}_\varepsilon)^2 + O(\varepsilon) \end{aligned}$$

## Description des oscillations, méthode de filtrage

Pour obtenir une description incluant les oscillations, une idée naturelle est d'utiliser une méthode de filtrage, associée à de la convergence forte.

### ► Stratégie

- Par conjugaison, on a

$$\partial_t e^{\frac{t}{\varepsilon}L} V_\varepsilon + e^{\frac{t}{\varepsilon}L} Q(V_\varepsilon, V_\varepsilon) = 0$$

donc  $e^{\frac{t}{\varepsilon}L} V_\varepsilon$  est régulier en temps : les **oscillations sont filtrées**.

- Pour établir un résultat de convergence forte du type

$$\|e^{\frac{t}{\varepsilon}L} V_\varepsilon - W_{app}\|_{L^2} \rightarrow 0$$

on **module l'inégalité d'énergie**.

- Le terme dominant de l'approximation  $W_{app}$  est obtenu en passant à la limite dans l'équation filtrée. Il vérifie l'**équation d'enveloppe**

$$\partial_t W + Q_L(W, W) = 0$$

où  $Q_L$  dépend de  $Q$  et de la structure spectrale de  $L$ .

Si  $L$  a du spectre continu, on s'attend à pouvoir montrer un **résultat de dispersion** (type inégalité de Strichartz) en utilisant une variante du théorème RAGE. On a alors

$$\Pi_\perp Q_L(W, W) = 0.$$

Si  $L$  a du spectre discret, on utilise sa **décomposition spectrale**.

### ► Résonances

Le terme non linéaire s'écrit

$$\begin{aligned} e^{\frac{t}{\varepsilon}L} Q(V_\varepsilon, V_\varepsilon) &= e^{\frac{t}{\varepsilon}L} Q(e^{-\frac{t}{\varepsilon}L} W_\varepsilon, e^{-\frac{t}{\varepsilon}L} W_\varepsilon) \\ &= \sum_{i\lambda, i\mu, i\nu \in \mathfrak{S}} e^{i\frac{t}{\varepsilon}(\lambda - \mu - \nu)} \Pi_\lambda Q(\Pi_\mu W_\varepsilon, \Pi_\nu W_\varepsilon) \end{aligned}$$

- Si  $\lambda - \mu - \nu \neq 0$ , le terme est rapidement oscillant et son intégrale en temps est négligeable.
- Si  $\lambda - \mu - \nu = 0$  (résonance), le terme apparaît dans l'opérateur  $Q_L$ .  
Formellement, on a alors

$$Q_L(W, W) = \sum_{\lambda = \mu + \nu} \Pi_\lambda Q(\Pi_\mu W, \Pi_\nu W)$$

**Remarque :** *L'étude des résonances conduit naturellement à des problèmes de la théorie des nombres.*

► Cas d'un fluide mince en rotation

Comme la pénalisation est un opérateur différentiel à coefficients constants, on obtient facilement sa **décomposition spectrale** en variables de Fourier. On a

$$L_k \begin{pmatrix} \rho_k \\ u_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ik \cdot u_k \\ u_k^\perp + ik\rho_k \end{pmatrix}$$

d'où

$$L_k = \begin{pmatrix} 0 & ik_1/a_1 & ik_2/a_2 \\ ik_1/a_1 & 0 & 1 \\ ik_2/a_2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & |k| & 0 \\ 0 & 0 & -|k| \end{pmatrix}$$

Les ondes élémentaires sont donc indexées par leur nombre d'onde  $k$  et l'indice  $\sigma = 0, \pm$  intervenant dans la relation de dispersion

$$\lambda = \sigma|k|$$

Pour presque tout couple  $(a_1, a_2)$ , l'**équation de résonance**

$$\sigma_\lambda \sqrt{\left(\frac{k_1^\lambda}{a_1}\right)^2 + \left(\frac{k_2^\lambda}{a_2}\right)^2} = \sigma_\mu \sqrt{\left(\frac{k_1^\mu}{a_1}\right)^2 + \left(\frac{k_2^\mu}{a_2}\right)^2} + \sigma_\nu \sqrt{\left(\frac{k_1^\nu}{a_1}\right)^2 + \left(\frac{k_2^\nu}{a_2}\right)^2}$$

n'a que des solutions triviales

$$\lambda = 0 \text{ ou } \mu = 0 \text{ ou } \nu = 0.$$

Le calcul de **compacité par compensation** présenté dans la partie précédente montre de plus que la partie non oscillante se découple du reste du système.

Les **équations d'enveloppe** s'écrivent alors

$$\partial_t \bar{V} + \Pi Q(\bar{V}, \bar{V}) = 0$$

pour la partie non oscillante, et

$$\partial_t W_\lambda + 2\Pi_\lambda Q(\bar{V}, \Pi_\lambda V) = 0$$

pour les oscillations  $\lambda \neq 0$ .

## Pénalisations à coefficients variables

Dans de nombreux problèmes issus de la physique, la pénalisation n'est pas homogène spatialement : en océanographie par exemple, on doit tenir compte de la topographie, des variations du paramètre de Coriolis..... La décomposition spectrale ne peut plus s'obtenir par un simple calcul en variables de Fourier.

### ► Etude spectrale

L'étude qualitative du comportement asymptotique nécessite néanmoins de connaître quelques propriétés spectrales :

- la nature du spectre détermine si les ondes dispersent ou non ;
- le spectre discret qui intervient dans l'équation de résonance gouverne les couplages entre les ondes ;
- les propriétés de régularité (asymptotique) des vecteurs propres définissent les espaces fonctionnels adaptés pour l'étude de l'équation limite (et de la convergence).

Ces résultats fins de **théorie spectrale** peuvent être établis dans certains cas particuliers.

### ► Cas de l'approximation betaplan

Dans la zone équatoriale, on utilise l'approximation betaplan pour le paramètre de Coriolis  $\omega(x) = \beta x_2$ .

La pénalisation  $L$  s'exprime en fonction des opérateurs  $\partial_2 + \beta x_2$  et  $\partial_2 - \beta x_2$ . Il est alors naturel d'introduire une base de type Fourier (en  $x_1$ )- Hermite (en  $x_2$ ).

- Le spectre discret est constitué des racines des polynômes

$$\lambda^3 - (k_1^2 + \beta(2n + 1))\lambda + \beta k_1 = 0, \quad n \in \mathbb{N}, k_1 \in \mathbb{Z}$$

- Il n'y a pas de spectre continu : les vecteurs propres  $(\Psi_{k_1, n, j})$  forment une base de  $L^2(\mathbb{R} \times \mathbb{T}, \mathbb{R}^3)$ .
- On construit des espaces fonctionnels (de type Sobolev à poids) adaptés en considérant les normes

$$\|V\|_s^2 = \sum (n + k_1^2 + 1)^s | \langle \Psi_{k_1, n, j} | V \rangle |^2.$$

Pour presque tout  $(a_1, \beta)$ , l'équation de résonance

$$\lambda(k_1, n, j) + \lambda(k'_1, n', j') = \lambda(k_1 + k'_1, m, l)$$

n'a que des solutions triviales

$$\lambda(k_1, n, j) = 0 \text{ ou } \lambda(k'_1, n', j') = 0 \text{ ou } \lambda(k_1 + k'_1, m, l) = 0,$$

ou  $n = n' = m$ ,  $\lambda(k_1, n, j) = k_1$ ,  $\lambda(k'_1, n', j') = k'_1$ ,  $\lambda(k_1 + k'_1, m, l) = k_1 + k'_1$

De plus, un calcul algébrique de type **compacité par compensation** montre que la partie non oscillante se découple du reste du système.

En utilisant les **espaces fonctionnels adaptés** à  $L$  (et les estimations trilineaires correspondantes), on montre alors que le système est localement bien posé.

**Remarque** : comme la dérivation en  $x_2$  est quantifiée par  $\sqrt{n}$ , la régularité requise est celle des systèmes hyperboliques 3D classiques (conditions de sommabilité).

La théorie des formes normales permet parfois de se ramener au cas de l'oscillateur harmonique, ou de d'autres opérateurs connus.

Mais, en général, on n'obtient pas de décomposition spectrale explicite, ni même d'information précise sur la nature du spectre.

#### ► Séparation d'échelle et analyse semiclassique

Si les coefficients de la pénalisation ne varient pas trop vite et que les oscillations considérées ont des grands nombres d'onde, l'**analyse semiclassique** fournit de bonnes approximations de la dynamique.

- Le calcul (pseudo-)différentiel est remplacé par des calculs symboliques dans l'espace des phases

$$(x_2, \varepsilon \partial_2) \rightarrow (x_2, \xi_2)$$

- Les commutateurs (qui sont négligés dans ce type de calculs) sont d'ordre plus élevé en  $\varepsilon$

$$[x_2, \varepsilon \partial_2] = -\varepsilon$$

► Cas des gyres équatoriaux

Dans le modèle précédent, on ajoute un terme de convection par un courant macroscopique (type Gulf Stream) et on s'intéresse à la propagation des ondes de surface (générées par le vent).

Après adimensionnement, la pénalisation  $L$  s'écrit

$$L = \begin{pmatrix} (\varepsilon \bar{u} \cdot \varepsilon \nabla) & \varepsilon \partial_1 & \varepsilon \partial_2 \\ \varepsilon \partial_1 & (\varepsilon \bar{u} \cdot \varepsilon \nabla) & -\omega(x_2) \\ \varepsilon \partial_2 & \omega(x_2) & (\varepsilon \bar{u} \cdot \varepsilon \nabla) \end{pmatrix}$$

En utilisant une sorte de polynôme caractéristique, et des quantifications adaptées, on peut alors identifier trois **propagateurs scalaires** dont les symboles principaux sont

$$\tau_{\pm} = \pm \sqrt{\xi_2^2 + \xi_1^2 + \omega^2(x_2)} \text{ et } \tau_0 = \frac{\varepsilon \omega'(x_2) \xi_1}{\xi_2^2 + \xi_1^2 + \omega^2(x_2)}$$

Cela permet de décrire la **géométrie** associée à la propagation des ondes.

L'application de ce type de techniques à des **équations non linéaires** reste un problème essentiellement ouvert

- l'optique géométrique apporte des réponses pour des données WKB (avant l'apparition des caustiques)
- Une autre piste consiste à obtenir des informations sur le spectre dans la limite  $\varepsilon \rightarrow 0$  (méthode de phase non stationnaire).

# REGULAR FLOWS OF VISCOELASTIC FLUIDS AND THE INCOMPRESSIBLE LIMIT

*Zaynab Salloum*

**Résumé.** — We consider compressible viscoelastic fluids obeying the Oldroyd constitutive law. Local existence and uniqueness of flows are proven by a classical fixed point argument. Some global properties of the solutions are also derived. In particular, we obtain some a priori estimates which are uniform in the Mach number and prove global existence of weakly compressible fluid flows. We show that weakly compressible flows with *well-prepared* initial data converge to incompressible ones when the Mach number goes to zero.

## 1. Introduction

The mathematical analysis of flows at vanishing Mach number begins with the works of Klainerman and Majda [6]. The incompressible limit of the isentropic Navier-Stokes equations has been justified for weak solutions by Desjardins and Grenier [4], Lions and Masmoudi [8], Bresch, Desjardins and Gérard-Varet [2]. For viscous gas, global well-posedness in critical spaces has been established by Danchin [3]. In the case of well-prepared initial data and regular solutions, Bessaih [1] has studied the compressible Navier-Stokes limit. Lei, in [7], has proven the local and global existence of classical solutions for an Oldroyd-B system in a torus when the initial data are sufficiently small.

In this presentation<sup>1</sup>, we show the global existence of solutions for weakly compressible viscoelastic fluid flows in the case of the Oldroyd-B model in a regular bounded domain in  $\mathbb{R}^3$ . We also study the convergence of the weakly compressible model to the incompressible one, for *well-prepared* initial data, when the Mach number tends to zero.

## 2. The Modeling

**2.1. Unsteady Flows of Compressible Viscoelastic Fluids.** — Consider unsteady flows of viscoelastic fluids in a bounded domain  $\Omega^*$  of  $\mathbb{R}^3$  with a regular boundary  $\Gamma^*$ . The system, obtained from the laws of conservation of momentum, and of mass, and from the constitutive equation of the fluid, reads as follows (see for instance [9]):

---

<sup>1</sup>based on a study completed in collaboration with C. GUILLOPÉ and R. TALHOUK [5].





notation  $\mathbf{u}' = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}$ ,  $\sigma' = \frac{\partial \sigma}{\partial t}$  and  $\tau' = \frac{\partial \tau}{\partial t}$ , as well as  $\Lambda = -(\Delta + \nabla \operatorname{div})$ , we may rewrite System (2) as follows : in  $Q_T$ ,

$$(3) \quad \begin{cases} \alpha(\mathbf{u}' + (\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u}) + (1 - \omega)\Lambda\mathbf{u} + \nabla\sigma &= \mathbf{F}(\mathbf{u}, \sigma, \tau) + \operatorname{div}\tau, \\ \sigma' + (\mathbf{u} \cdot \nabla)\sigma + \sigma \operatorname{div}\mathbf{u} &= -\varepsilon^2 \alpha \operatorname{div}\mathbf{u}, \\ \tau + \operatorname{We}(\tau' + (\mathbf{u} \cdot \nabla)\tau + \mathbf{g}(\nabla\mathbf{u}, \tau)) &= 2\omega\mathbf{D}[\mathbf{u}], \end{cases}$$

with  $\mathbf{F}(\mathbf{u}, \sigma, \tau) = \alpha\mathbf{f} + \frac{(1-\omega)\varepsilon^2\sigma}{\alpha+\varepsilon^2\sigma}\Lambda\mathbf{u} + \frac{\varepsilon^2(\sigma-w(\sigma))}{\alpha+\varepsilon^2\sigma}\nabla\sigma - \frac{\varepsilon^2\sigma}{\alpha+\varepsilon^2\sigma}\operatorname{div}\tau$ . System (3) is completed by a homogeneous condition on the boundary,  $\mathbf{u} = 0$  on  $\Sigma_T = (0, T) \times \Gamma$ , and by three initial conditions,  $\mathbf{u}(0) = \mathbf{u}_0$ ,  $\sigma(0) = \sigma_0$ ,  $\tau(0) = \tau_0$  in  $\Omega$ .

### 3. The Main Results

We assume that the data  $\mathbf{u}_0$ ,  $\sigma_0$  and  $\tau_0$  are regular enough and satisfy

$$\mathfrak{m} \leq \alpha + \varepsilon^2 \sigma_0 \leq \mathfrak{M}, \quad \int_{\Omega} \sigma_0 \, dx = 0,$$

for some given constants  $\mathfrak{m} > 0$  and  $\mathfrak{M}$ . Moreover the function  $p = p(\rho)$  satisfies the condition  $\sup_{[\frac{\rho}{3}, 3\alpha]} (|p''| + |p'''|) \leq \frac{C}{\varepsilon^2}$ , for some constant  $C$  independent of  $\varepsilon$ .

**Theorem 3.1.** — (Existence and uniqueness of a global solution) *Assume that  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$  is a domain of class  $C^4$ ,  $\mathbf{f} \in L^\infty(\mathbb{R}_+; \mathbf{H}^1(\Omega))$ , and  $\mathbf{f}' \in L^\infty(\mathbb{R}_+; \mathbf{L}^2(\Omega))$ . There exist three positive constants  $\mathfrak{b}_1$ ,  $\mathfrak{b}_2$  and  $\omega_0$  ( $0 < \omega_0 < 1$ ), independent of  $\varepsilon$ , such that if  $0 < \omega \leq \omega_0$ ,  $\|\mathbf{u}_0\|_2^2 + \varepsilon^2 \|\sigma_0\|_2^2 + \|\tau_0\|_2^2 \leq \mathfrak{b}_1$ , and  $\|\mathbf{f}\|_{\infty, 1, \infty}^2 + \|\mathbf{f}'\|_{\infty, 0, \infty}^2 \leq \mathfrak{b}_2$ , then System (3) admits a unique solution  $(\mathbf{u}, \sigma, \tau)$ , satisfying*

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &\in L^2_{\text{loc}}(\mathbb{R}_+; \mathbf{H}^3(\Omega)) \cap C_b(\mathbb{R}_+; \mathbf{H}^2(\Omega)), \quad \mathbf{u}' \in L^2_{\text{loc}}(\mathbb{R}_+; \mathbf{H}^1(\Omega)) \cap C_b(\mathbb{R}_+; \mathbf{L}^2(\Omega)), \\ \sigma &\in C_b(\mathbb{R}_+; H^2(\Omega)), \quad \sigma' \in C_b(\mathbb{R}_+; H^1(\Omega)), \quad \tau \in C_b(\mathbb{R}_+; \mathbf{H}^2(\Omega)), \quad \tau' \in C_b(\mathbb{R}_+; \mathbf{H}^1(\Omega)), \end{aligned}$$

and

$$\frac{\alpha}{2} \leq \alpha + \varepsilon^2 \sigma \leq \frac{3\alpha}{2}, \quad \text{in } \overline{\Omega} \times \mathbb{R}_+.$$

Moreover, for all  $t \in \mathbb{R}_+$ ,

$$\|\mathbf{u}(t)\|_1^2 + \varepsilon^2 \|\mathbf{u}(t)\|_2^2 + \varepsilon^2 \|\sigma(t)\|_2^2 + \|\tau(t)\|_2^2 \leq \mathfrak{b}_3, \quad \|\mathbf{u}'(t)\|^2 + \varepsilon^2 \|\sigma'(t)\|^2 + \|\tau'(t)\|^2 \leq \mathfrak{b}_4,$$

where  $\mathfrak{b}_3$  and  $\mathfrak{b}_4$  are some positive constants independent of  $\varepsilon$ .

If, in addition,  $\mathbf{f} \in L^2(\mathbb{R}_+; \mathbf{H}^1(\Omega))$ , and  $\mathbf{f}' \in L^2(\mathbb{R}_+; \mathbf{L}^2(\Omega))$ , then the solution  $(\mathbf{u}, \sigma, \tau)$  of (3) also satisfies

$$\mathbf{u} \in L^2(\mathbb{R}_+; \mathbf{H}^3(\Omega)), \quad \mathbf{u}' \in L^2(\mathbb{R}_+; \mathbf{H}^1(\Omega)),$$

$$\sigma \in L^2(\mathbb{R}_+; H^2(\Omega)), \quad \sigma' \in L^2(\mathbb{R}_+; H^1(\Omega)), \quad \tau \in L^2(\mathbb{R}_+; \mathbf{H}^2(\Omega)), \quad \tau' \in L^2(\mathbb{R}_+; \mathbf{H}^1(\Omega)).$$

The second result concerns the convergence of weakly compressible flows towards incompressible ones when  $\varepsilon$  tends to zero. We now make the  $\varepsilon$ -dependence explicit, that is denote the solution  $(\mathbf{u}, \sigma, \tau)$  of Problem (3) by  $(\mathbf{u}^\varepsilon, \sigma^\varepsilon, \tau^\varepsilon)$ . Let  $(\mathbf{v}, \pi, \mathbf{S})$  be the solution of the incompressible model, where  $\rho \equiv \alpha$ ,

$$(4) \quad \left\{ \begin{array}{ll} \alpha \left( \mathbf{v}' + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} \right) - (1 - \omega) \Delta \mathbf{v} + \nabla \pi = \alpha \mathbf{f} + \operatorname{div} \mathbf{S}, & \text{in } \mathbb{R}_+ \times \Omega, \\ \operatorname{div} \mathbf{v} = 0, & \text{in } \mathbb{R}_+ \times \Omega, \\ \mathbf{S} + \operatorname{We} \left( \mathbf{S}' + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{S} + \mathbf{g}(\nabla \mathbf{v}, \mathbf{S}) \right) = 2\omega \mathbf{D}[\mathbf{v}], & \text{in } \mathbb{R}_+ \times \Omega, \\ \mathbf{v} = 0, & \text{on } \mathbb{R}_+ \times \Gamma, \\ \mathbf{v}(0) = \mathbf{v}_0, & \text{in } \Omega, \\ \mathbf{S}(0) = \mathbf{S}_0, & \text{in } \Omega. \end{array} \right.$$

**Theorem 3.2.** — *Let  $0 \leq \tau < 1$ . We suppose that  $(\mathbf{u}_0^\varepsilon, \tau_0^\varepsilon)$  converges towards  $(\mathbf{v}_0, \mathbf{S}_0)$  in  $\mathbf{H}^{1+\tau}(\Omega) \times \mathbf{H}^{1+\tau}(\Omega)$ , as  $\varepsilon$  tends to zero. Under the assumptions of Theorems 3.1, the solution of Problem (3) tends towards the solution of Problem (4) as  $\varepsilon$  tend to zero. More precisely, for all  $\delta > 0$ , there exists  $\varepsilon_0 > 0$  such that for all  $\varepsilon$  in  $(0, \varepsilon_0]$  and  $T > 0$ ,*

$$\|\mathbf{u}^\varepsilon - \mathbf{v}\|_{C([0,T];\mathbf{H}^\tau(\Omega))} + \|\varepsilon^2 \sigma^\varepsilon\|_{C([0,T];\mathbf{H}^{1+\tau}(\Omega))} + |\tau^\varepsilon - \mathbf{S}|_{C([0,T];\mathbf{H}^{1+\tau}(\Omega))} < \delta.$$

### Références

- [1] H. Bessaih, *Limite de modèles de fluides compressibles*, Port. Math., **52** (4) (1995), 441-463.
- [2] D. Bresch, B. Desjardins and D. Gérard-Varet, *Rotating fluids in a cylinder*, Discrete Contin. Dyn. Syst., **11**(1) (2004), 47-82.
- [3] R. Danchin, *Zero Mach number limit in critical spaces for compressible Navier-Stokes equations*, Ann. Scient. Éc. Norm. Sup., 4<sup>e</sup> série **35** (2002), 27-75.
- [4] B. Desjardins and E. Grenier, *Low Mach number limit of viscous compressible flows in the whole space*, Proc. Roy. Soc. Lond. A, **455** (1999), 2271-2279.
- [5] C. Guillopé, Z. Salloum and R. Talhouk, *Regular flows of weakly compressible viscoelastic fluids and the incompressible limit*, Discr. Cont. Dyn. Systems - B, **24** (3) (2010).
- [6] S. Klainerman and A. Majda, *Compressible and incompressible fluids*, Comm. Pure Appl. Math., **35** (1982), 629-651.
- [7] Z. Lei, *Global Existence of classical solutions for some Oldroyd-B model via the incompressible limit*, Chin. Ann. Math., **27B** (5) (2006), 565-580.
- [8] P.-L. Lions and N. Masmoudi, *Incompressible limit for a viscous compressible fluid*, J. Math. Pures Appl., **77** (6) (1998), 585-627.
- [9] Z. Salloum, "Étude mathématique d'écoulements de fluides viscoélastiques dans des domaines singuliers", Doctorat de l'Université Paris-Est, 2008.

Zaynab Salloum

Université Paris-Est, Laboratoire d'Analyse et de Mathématiques Appliquées, UMR CNRS 8050, 61 avenue du Général de Gaulle, 94010 Créteil Cedex, France, and.

Université Libanaise, Faculté des Sciences, Beyrouth, Liban, .

E-mail : salloum@u-pec.fr ; salloum@ul.edu.lb

# HOMOLOGIE STABLE DES GROUPES

*Christine Vespa*

**Résumé.** — Depuis les années 1970, beaucoup d'intérêt a été porté à l'étude de l'homologie stable notamment à cause des liens étroits existant entre elle et la K-théorie algébrique. Après quelques rappels concernant l'homologie d'un groupe, on définit ce qu'est l'homologie stable d'une famille de groupes à coefficients triviaux ou tordus. On donne quelques résultats concernant l'homologie stable des groupes linéaires puis on énonce le résultat principal obtenu dans [DV09] concernant le calcul de l'homologie stable des groupes orthogonaux à coefficients tordus.

## 1. Homologie d'un groupe à coefficients triviaux

**1.1. Définition et exemples [Bro82, Wei94].** — Soient  $G$  un groupe fini et  $R$  un anneau commutatif. Pour  $M$  un  $R$ -module, une **résolution** de  $M$  est une suite exacte de  $R$ -modules :  $\dots \rightarrow F_2 \xrightarrow{\partial_2} F_1 \xrightarrow{\partial_1} F_0 \xrightarrow{\epsilon} M \rightarrow 0$ . Si, pour tout  $i \in \mathbb{N}$ ,  $F_i$  est un module libre on dit que la résolution est libre. On rappelle que le  $\mathbb{Z}$ -module libre engendré par les éléments de  $G$  :  $\mathbb{Z}G := \{\sum n_i g_i \mid n_i \in \mathbb{Z}, g_i \in G\}$  est un anneau pour la multiplication induite par la loi de  $G$ . Soit  $M$  un  $\mathbb{Z}G$ -module et  $N$  le sous-groupe additif de  $M$  engendré par les éléments de la forme  $gm - m$  pour  $g \in G$  et  $m \in M$ . Le **groupe des coïnvariants** de  $M$  est défini par  $M_G := M/N$ . C'est le plus grand quotient de  $M$  sur lequel  $G$  agit trivialement. Les coïnvariants définissent un foncteur  $-_G : G\text{-Mod} \rightarrow \text{Ab}$ .

On considère une résolution libre de  $\mathbb{Z}$  par des  $\mathbb{Z}G$ -modules à laquelle on applique le foncteur défini précédemment. On obtient ainsi un complexe :  $\dots \rightarrow (F_2)_G \xrightarrow{\delta_2} (F_1)_G \xrightarrow{\delta_1} (F_0)_G \xrightarrow{\epsilon} R \rightarrow 0$ . On a donc  $\text{Im}(\delta_{n+1}) \subset \text{Ker}(\delta_n)$  mais, en général,  $\text{Im}(\delta_{n+1}) \neq \text{Ker}(\delta_n)$ . L'homologie de  $G$  mesure le défaut de ce complexe d'être exact.

**Définition 1.1.** — Le  $n$ -ième groupe d'homologie de  $G$  à coefficients dans  $\mathbb{Z}$  est :

$$H_n(G, \mathbb{Z}) = \text{Ker}(\delta_n) / \text{Im}(\delta_{n+1}).$$

Cette définition ne dépend pas du choix de la résolution libre. On remarque que  $H_0(G, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$  et  $H_1(G, \mathbb{Z}) = G/[G, G]$ .

**Exemple 1.2.** — Soit  $G$  le groupe cyclique d'ordre  $n$  et de générateur  $t$ . On considère  $N = 1 + t + \dots + t^{n-1} \in \mathbb{Z}G$ . En utilisant la résolution  $\dots \rightarrow \mathbb{Z}G \xrightarrow{t-1} \mathbb{Z}G \xrightarrow{N} \mathbb{Z}G \xrightarrow{t-1} \mathbb{Z}G \xrightarrow{\epsilon} \mathbb{Z} \rightarrow 0$ , on obtient, en appliquant le foncteur  $-_G$ , le complexe :  $\dots \xrightarrow{0} \mathbb{Z} \xrightarrow{n} \mathbb{Z} \xrightarrow{0} \mathbb{Z}$ . On en déduit que  $H_0(G, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$ ,  $H_i(G, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$  pour  $i$  pair et  $H_i(G, \mathbb{Z}) = 0$  pour  $i$  impair.

**Remarque 1.3.** — On peut remplacer  $\mathbb{Z}$  par un anneau commutatif  $k$  et considérer les  $kG$ -modules. On définit alors de manière similaire  $H_*(G, k)$ .

**1.2. Homologie stable d'une famille de groupes.** — Soit  $(G_i)_i$  une suite de groupes munie d'inclusions  $G_i \hookrightarrow G_{i+1}$ . Ceci fournit une suite naturelle de morphismes :

$$(1) \quad \dots \rightarrow H_k(G_i, \mathbb{Z}) \rightarrow H_k(G_{n+1}, \mathbb{Z}) \rightarrow H_k(G_{n+2}, \mathbb{Z}) \rightarrow \dots$$

Deux questions se posent alors naturellement concernant cette suite de morphismes :

(1) **Est-ce que cette suite se stabilise?** Autrement dit, pour  $k$  fixé, existe-t-il un entier  $N(k)$  tel que  $\forall n \geq N(k)$ ,  $H_k(G_n, \mathbb{Z}) \simeq H_k(G_{n+1}, \mathbb{Z})$ ? Dans le cas affirmatif, quel est le plus petit entier  $N(k)$  ayant cette propriété?

(2) **Peut-on calculer la colimite de cette suite?** Cette colimite sera appelée l'homologie stable des groupes  $G_i$  à coefficients triviaux et sera notée  $H_k(G_\infty, \mathbb{Z})$ . Même dans les cas où l'on sait que la réponse à la première question est positive, le calcul de cette colimite reste un problème difficile.

**1.3. Quelques résultats de stabilité et calculs de la valeur stable.** — Dans ce paragraphe on commence par donner quelques résultats répondant à la première question énoncée précédemment.

**Théorème 1.4 (Nakaoka [Nak60]).** — L'homologie de la suite des groupes symétriques  $(S_p)_p$  se stabilise et  $H_k(S_p, \mathbb{Z}) \simeq H_k(S_{p+1}, \mathbb{Z})$  pour  $k \leq \frac{p+1}{2}$ .

**Théorème 1.5 (Quillen [Qui72]).** — Soit  $A$  un corps fini différent de  $\mathbb{F}_2$ , l'homologie de  $(GL_n(A))_n$  se stabilise et  $H_k(GL_n(A)) \simeq H_k(GL_{n+1}(A))$  pour  $k \leq n - 1$ .

**Remarque 1.6.** — Ce résultat a été généralisé au cas d'un anneau noethérien commutatif de dimension finie dans [vdK80] par Van der Kallen.

**Théorème 1.7 (Charney [Cha87]).** — Pour  $R$  un anneau de Dedekind, l'homologie de la famille des groupes orthogonaux  $(O_{n,n}(R))_n$  et de la famille des groupes symplectiques  $(Sp_{2n}(R))_n$  se stabilisent.

Des résultats de calculs d'homologie stable sont donnés dans les deux théorèmes suivants.

**Théorème 1.8 (Quillen [Qui72]).** — Pour  $k$  un corps fini, on a :

$$H_0(GL_\infty(k), k) = k \quad \text{et} \quad H_j(GL_\infty(k), k) = 0 \quad \text{pour } j > 0.$$

**Théorème 1.9 (Fiedorowicz-Priddy [FP78]).** — Pour  $k$  un corps fini, on a :

$$H_0(O_\infty(k), k) = k \quad \text{et} \quad H_j(O_\infty(k), k) = 0 \quad \text{pour } j > 0 \text{ si } \text{car}(k) \neq 2$$

$$H_0(Sp_\infty(k), k) = k \quad \text{et} \quad H_j(Sp_\infty(k), k) = 0 \quad \text{pour } j > 0.$$

## 2. Homologie d'un groupe à coefficients tordus

**2.1. Définitions.** — Soit  $M$  un  $\mathbb{Z}G$ -module. En appliquant à une résolution libre de  $\mathbb{Z}$  par des  $\mathbb{Z}G$ -modules à droite :  $\dots \rightarrow F_2 \rightarrow F_1 \rightarrow F_0 \rightarrow \mathbb{Z} \rightarrow 0$ , le foncteur  $- \otimes_{\mathbb{Z}G} M$  on obtient le complexe :  $\dots \rightarrow F_1 \otimes_{\mathbb{Z}G} M \rightarrow F_0 \otimes_{\mathbb{Z}G} M \rightarrow \mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}G} M \rightarrow 0$ .

**Définition 2.1 (Définition de l'homologie de  $G$  à coefficients dans  $M$ )**

$$H_*(G, M) := H_*(F \otimes_{\mathbb{Z}G} M).$$

**Remarque 2.2.** — (1) Pour  $M = \mathbb{Z}$  on retrouve le cas du paragraphe précédent.

(2)  $H_0(G, M) = \mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}G} M \simeq M_G$ .

(3) Par définition,  $H_*(F \otimes_{\mathbb{Z}G} M)$  sont les groupes de torsions entre  $\mathbb{Z}$  et  $M$  notés  $\text{Tor}_*^{\mathbb{Z}G}(\mathbb{Z}, M)$ .

**Proposition 2.3 (Lemme de Shapiro).** — Si  $H \subset G$  et  $M$  est un  $\mathbb{Z}H$ -module, alors  $H_*(H, M) \simeq H_*(G, \text{Ind}_H^G M)$  où  $\text{Ind}_H^G M$  est le  $\mathbb{Z}G$ -module induit, c'est-à-dire  $\text{Ind}_H^G M = \mathbb{Z}G \otimes_{\mathbb{Z}H} M$ .

**2.2. Stabilité à coefficients tordus : le cas des groupes linéaires.** — Pour  $R$  un anneau, considérons la suite des groupes  $(GL_n(R))_n$  et notons  $I_n : GL_n(R) \rightarrow GL_{n+1}(R)$  l'inclusion induite par  $R^n \hookrightarrow R^n \oplus R$ . Une suite de  $GL_n(R)$ -modules  $M_n$  munie de morphismes de  $GL_n(R)$ -modules  $f_n : M_n \rightarrow \text{Res}_{GL_n(R)}^{GL_{n+1}(R)} M_{n+1}$ , où  $\text{Res}_{GL_n(R)}^{GL_{n+1}(R)} M_{n+1}$  est le module obtenu par restriction via  $I_n$ , fournit une suite naturelle de morphismes :

$$(2) \quad \dots \rightarrow H_*(GL_n(R), M_n) \xrightarrow{g_n} H_*(GL_{n+1}(R), M_{n+1}) \rightarrow \dots$$

où  $g_n$  est la composée suivante :

$$H_*(GL_n(R), M_n) \xrightarrow{\simeq} H_*(GL_{n+1}(R), \text{Ind}_{GL_n(R)}^{GL_{n+1}(R)} M_n)$$

$$\begin{aligned} &\rightarrow H_*(GL_{n+1}(\mathbb{R}), \text{Ind}_{GL_n(\mathbb{R})}^{GL_{n+1}(\mathbb{R})} \text{Res}_{GL_n(\mathbb{R})}^{GL_{n+1}(\mathbb{R})} M_{n+1}) \\ &\rightarrow H_*(GL_{n+1}(\mathbb{R}), M_{n+1}) \end{aligned}$$

où la première application est donnée par le lemme de Shapiro, la deuxième est induite par  $f_n$  et la dernière découle de l'application de  $GL_{n+1}$ -modules

$$\text{Ind}_{GL_n(\mathbb{R})}^{GL_{n+1}(\mathbb{R})} \text{Res}_{GL_n(\mathbb{R})}^{GL_{n+1}(\mathbb{R})} M_{n+1} = \mathbb{Z}GL_{n+1}(\mathbb{R}) \otimes_{\mathbb{Z}GL_n(\mathbb{R})} M_{n+1} \rightarrow M_{n+1}$$

définie par  $A \otimes m \mapsto A \cdot m$ .

**Remarque 2.4.** — Une manière naturelle d'obtenir une suite de modules  $M_n$  munie de morphismes  $f_n$  est de considérer des foncteurs  $F : \mathbb{R} - \text{mod} \rightarrow \mathbb{R} - \text{mod}$ .

Les mêmes questions qu'au paragraphe 1.2 peuvent alors être posées pour la suite (2). Les deux théorèmes suivants répondent à ces questions.

**Théorème 2.5 (Dwyer [Dwy80]).** — Soient  $R$  un anneau principal et  $F$  un foncteur polynomial sans terme constant (i.e.  $F(0) = 0$ ) alors l'homologie de  $(GL_n(\mathbb{R}))$  à coefficients dans  $M_n = F(\mathbb{R}^n)$  se stabilise et  $H_i(GL_n(\mathbb{R}), F(\mathbb{R}^n)) \simeq H_{i+1}(GL_{n+1}(\mathbb{R}), F(\mathbb{R}^{n+1}))$  pour  $n \geq 2i + d + c$  où  $d$  est le degré de  $F$  et  $c$  est une constante.

**Remarque 2.6.** — Les exemples classiques de foncteurs polynomiaux de degré  $n$  sont le foncteur  $n$ -ième puissance tensorielle  $T^n$ , le foncteur  $n$ -ième puissance extérieure  $\Lambda^n$  et le foncteur  $n$ -ième puissance symétrique  $S^n$ . Pour une définition des foncteurs polynomiaux on pourra consulter [FFPS03].

**Théorème 2.7 (Betley [Bet92]).** — Soient  $R$  un anneau principal et  $F$  un foncteur polynomial sans terme constant (i.e.  $F(0) = 0$ ) alors

$$H_*(GL_\infty(\mathbb{R}), F_\infty) = 0$$

où  $F_\infty = \text{colim}_n F(\mathbb{R}^n)$ .

**Remarque 2.8.** — Ce résultat a été généralisé indépendamment par Betley [Bet99] et Suslin [FFSS99] au cas de coefficients obtenus à partir de bifoncteurs  $B$  (polynomial en chaque variable) et  $R$  un corps. Dans ce cas la valeur stable n'est plus nulle. Pour les foncteurs usuels, ces groupes d'homologie sont accessibles aux calculs.

### 2.3. Stabilité à coefficients tordus : généralisation et cas des groupes orthogonaux.

— La situation décrite au paragraphe précédent peut se généraliser à d'autres familles de groupes  $(G(n))_n$  de la manière suivante. Pour  $\mathcal{C}$  une catégorie monoïdale symétrique et  $A$  un objet de  $\mathcal{C}$  on note  $G(n)$  le groupe des automorphismes  $\text{Aut}_{\mathcal{C}}(A^{\oplus n})$ . En évaluant un foncteur  $F : \mathcal{C} \rightarrow \text{Ab}$  sur  $A^{\oplus n}$  on obtient de manière naturelle un  $\text{Aut}_{\mathcal{C}}(A^{\oplus n})$ -module ce qui permet de considérer :  $H_*(G(n), F(A^{\oplus n}))$ . De plus, en remarquant que l'injection dans les  $n$  premières variables  $A^{\oplus n} \hookrightarrow A^{\oplus n+1}$  est

compatible à l'action des groupes d'automorphismes  $\text{Aut}(A^{\oplus n})$  via le morphisme :  $\text{Aut}(A^{\oplus n}) \xrightarrow{g \mapsto g \oplus \text{Id}_A} \text{Aut}(A^{\oplus n+1})$  on obtient une suite naturelle de morphismes :

$$(3) \quad \dots \rightarrow H_*(G(n), F(A^{\oplus n})) \rightarrow H_*(G(n+1), F(A^{\oplus n+1})) \rightarrow \dots$$

En prenant pour  $\mathcal{C}$  des catégories convenables, ce cadre général permet aussi bien de traiter le cas des groupes linéaires, des groupes symétriques, des groupes orthogonaux et des groupes symplectiques.

Dans la cas des groupes orthogonaux la stabilité de la suite (3) est donnée par le résultat suivant :

**Théorème 2.9 (Charney [Cha87]).** — Soient  $k$  un corps fini et  $F$  un foncteur polynomial alors l'homologie de  $(O_{n,n}(k))_n$  à coefficients dans  $M_n = F(k^{2n})$  se stabilise.

Dans [DV09] nous obtenons le calcul de la valeur stable  $H_*(O_\infty(k), F_\infty)$  lorsque  $\text{car}(k) \neq 2$ . Cette valeur n'est pas nulle en général. Plus précisément, nous obtenons le théorème :

**Théorème 2.10 (Djament-Vespa [DV09]).** — Soient  $k$  un corps fini tel que  $\text{car}(k) \neq 2$  et  $F$  un foncteur polynomial entre espaces vectoriels, il existe un isomorphisme naturel :

$$H_*(O_\infty(k), F_\infty) \simeq \text{Tor}_*^{\mathcal{E}_k^f}(V \mapsto k[S^2(V^*)], F)$$

où  $\mathcal{E}_k^f$  désigne la catégorie des  $k$ -espaces vectoriels de dimension finie, et  $S^2$  la seconde puissance symétrique.

Les groupes de torsion entre endofoncteurs des espaces vectoriels étant accessibles on obtient ainsi des calculs explicites d'homologie stable.

Plus précisément, dans [DV09] nous montrons que sous certaines hypothèses supplémentaires sur la catégorie  $\mathcal{C}$ , il existe une suite spectrale convergeant vers l'homologie stable des groupes  $G(n)$  à coefficients tordus qui dégénère à la deuxième page. Ceci nous permet de retrouver les résultats de Betley sur l'homologie stable des groupes linéaires par des méthodes purement algébriques. Dans le cas des groupes orthogonaux on réinterprète la deuxième page de cette suite spectrale à l'aide de foncteurs de Mackey et on utilise de puissants résultats d'annulation en homologie des foncteurs pour calculer cette deuxième page.

### Références

- [Bet92] S. BETLEY – « Homology of  $GL(R)$  with coefficients in a functor of finite degree », *J. Algebra* **150** (1992), no. 1, p. 73–86.
- [Bet99] ———, « Stable K-theory of finite fields », *K-Theory* **17** (1999), no. 2, p. 103–111.
- [Bro82] K. S. BROWN – *Cohomology of groups*, Graduate Texts in Mathematics, vol. 87, Springer-Verlag, New York, 1982.

- [Cha87] R. CHARNEY – « A generalization of a theorem of Vogtmann », in *Proceedings of the Northwestern conference on cohomology of groups (Evanston, Ill., 1985)*, vol. 44, 1987, p. 107–125.
- [DV09] A. DJAMENT & C. VESPA – « Sur l’homologie des groupes orthogonaux et symplectiques à coefficients tordus », (accepté aux Annales de l’ENS et disponible sur <http://arxiv.org/abs/0808.4035>), 2009.
- [Dwy80] W. G. DWYER – « Twisted homological stability for general linear groups », *Ann. of Math. (2)* **111** (1980), no. 2, p. 239–251.
- [FFPS03] V. FRANJOU, E. M. FRIEDLANDER, T. PIRASHVILI & L. SCHWARTZ – *Rational representations, the Steenrod algebra and functor homology*, Panoramas et Synthèses [Panoramas and Syntheses], vol. 16, Société Mathématique de France, Paris, 2003.
- [FFSS99] V. FRANJOU, E. M. FRIEDLANDER, A. SCORICHENKO & A. SUSLIN – « General linear and functor cohomology over finite fields », *Ann. of Math. (2)* **150** (1999), no. 2, p. 663–728.
- [FP78] Z. FIEDOROWICZ & S. PRIDDY – *Homology of classical groups over finite fields and their associated infinite loop spaces*, Lecture Notes in Mathematics, vol. 674, Springer, Berlin, 1978.
- [Nak60] M. NAKAOKA – « Decomposition theorem for homology groups of symmetric groups », *Ann. of Math. (2)* **71** (1960), p. 16–42.
- [Qui72] D. QUILLEN – « On the cohomology and K-theory of the general linear groups over a finite field », *Ann. of Math. (2)* **96** (1972), p. 552–586.
- [vdK80] W. VAN DER KALLEN – « Homology stability for linear groups », *Invent. Math.* **60** (1980), no. 3, p. 269–295.
- [Wei94] C. A. WEIBEL – *An introduction to homological algebra*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, vol. 38, Cambridge University Press, Cambridge, 1994.

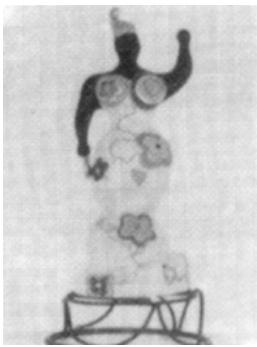
*Christine Vespa*

Institut de Recherche Mathématique Avancée, UMR 7501, Université de Strasbourg et CNRS,  
7 rue René Descartes, 67000 Strasbourg, France.

*E-mail* : [vespa@math.u-strasbg.fr](mailto:vespa@math.u-strasbg.fr)



# *à propos de femmes*





# LA POLITIQUE DU CNRS EN MATIÈRE DE PARITÉ, MISSION POUR LA PLACE DES FEMMES AU CNRS

*Agnès Netter*



la Politique du CNRS en matière de  
parité,  
Mission pour la place des femmes au  
CNRS

Présentation  
Paris 7 novembre 2009

[www.cnrs.fr](http://www.cnrs.fr)

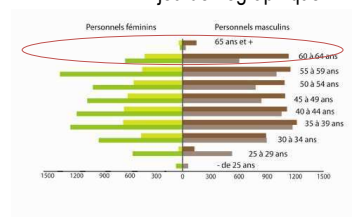
**Agnès Netter**  
Directrice de la Mission pour la place des femmes  
au CNRS  
[Agnes.Netter@cnrs-dir.fr](mailto:Agnes.Netter@cnrs-dir.fr)

## Pourquoi parler de la place des femmes dans les sciences ?



Enjeu d'équité ...

... Enjeu démographique ...



Enjeu de société

## 1 | La place des femmes dans la recherche scientifique

### 1.1 | Les femmes au sein du vivier de l'emploi scientifique et technique

> Lycéennes : 83% de réussite au bac, toutes filières confondues

> Étudiantes : majoritaires parmi les diplômés de Licence et Master, sauf en STAPS et en sciences fondamentales



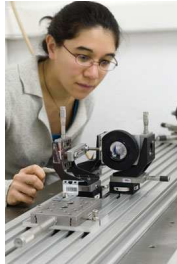
> Doctorantes en sciences fondamentales et appliquées : 28%

> Diplômées des écoles d'ingénieur-e : 25%

## 1 | La place des femmes dans la recherche scientifique

### 1.2 | Les femmes dans la recherche française

138 000 femmes en activité dans la recherche/développement  
dont 28% de femmes parmi les chercheur-e-s français



Public	<b>EPST</b>	51 % de femmes (43% sans Inserm et Ined) dont 28 % de femmes chercheurs
	<b>EPIC</b>	30 % de femmes en moyenne
	<b>Universités</b>	34% de femmes dont 40 % de femmes parmi les maîtres de conférence 18 % de femmes parmi les professeurs
Secteur privé		25 % de femmes en moyenne

## 2 | Et au CNRS ?

### 2.1 | En première lecture

Le CNRS emploie 39 129 personnes  
→ 42,7% de femmes parmi les personnels CNRS  
→ 44,5% des collaborateurs non titulaires sont des femmes



Elles représentent  
→ 1/3 des chercheur-e-s (31,8%)  
→ plus de la 1/2 des IT (51,4%)



## 2.2 | Des disparités...

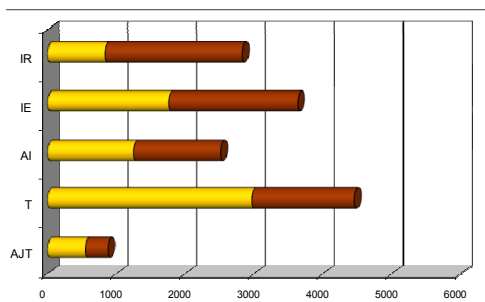
... selon les disciplines ...

Mathématiques	Physique	Électronique et informatique	Sciences pour l'ingénieur	Sciences de l'Univers	Chimie	Sciences du Vivant	Sciences humaines et sociales
16%	17%	19%	20%	26%	31%	39%	43%

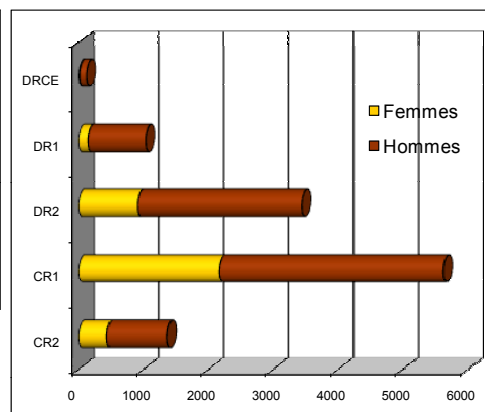
... et selon les activités professionnelles

Appui direct	Fonctionnement	Accompagnement.	Appui direct	Appui direct	Appui direct	Accompagnement	Fonctionnement.
Sciences de l'ingénieur et instrumentation scientifique	Patrimoine logistique, prévention	Informatique, statistique et calcul scientifique	Sciences chimique et des matériaux	Sciences humaines et sociales	Sciences du vivant	Information	Gestion scientifique et technique
11%	20%	23%	43%	57%	69%	74%	86%

## 2.3 | L'autre réalité : « plafond de verre »



6 femmes au CA du CNRS  
 Mais aussi 17% de femmes parmi les DU et leurs adjoint-e-s  
 10 sections présidées par des femmes sur 40



Répartition des chercheurs selon le grade et le sexe

grade	CNRS 2008				CNRS 1977	
	H	F	Total	% F	grade	% F
CR2	931	437	1368	31.9%	AR	24.6%
CR1	3452	2173	5625	38.6%	CR	36.6%
DR2	2528	914	3442	26.5%	MR	25.3%
DR1	888	148	1036	14.28%	DR	15.4%
DRCE	108	16	124	12.9%		

Le taux de présence des femmes dans les grades les plus élevés est très nettement inférieur au taux de présence des femmes parmi les chercheurs.

Si on applique une règle de 3, il devrait y avoir 369 femmes DR1+ DRCE.  
Il y en a actuellement 164 (déficit 205).  
Il devrait y avoir 1464 femmes DR, il y en a 1078 (déficit 386).

Prise en compte de la différence de pyramide des ages (étude réalisée à la demande de la MPPF et la DRH) : le déficit DR est de 310 au lieu de 386.

**DR**

**Déficit tous Instituts : 310/1078, 29 %**  
**Déficit INC 27/153, 18%**  
**Déficit MPPU 29/217, 13%**

Dans un certain nombre de filières, le recrutement de femmes est conditionné par l'existence d'un vivier de recrutement plus féminisé. Le CNRS développe des actions de sensibilisation en direction des jeunes.

Exposition Physique de femmes, interventions aux fêtes de la science, chapeau les filles avec le Québec....



### 3 | Égalité professionnelle : ce que dit la Loi

Loi n°83-635  
du 13 juillet 1983  
Directive 76/207/CE

> Mise en œuvre du principe de l'égalité de traitement entre hommes et femmes (accès à l'emploi, à la formation et à la promotion professionnelle, conditions de travail)  
> Production d'un rapport annuel sur la situation comparée des hommes et des femmes en matière d'emploi et de formation

La loi n°2001-397  
du 9 mai 2001

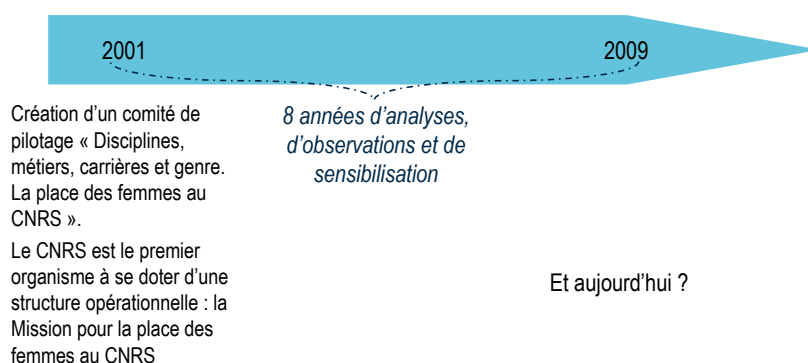
> Rapport annuel reposant sur des indicateurs (éléments chiffrés)  
> Obligation de négocier sur l'égalité professionnelle tout en faisant de ce thème un élément transversal des négociations obligatoires  
= mise en œuvre de la politique de l'approche intégrée ou Gender Mainstreaming

Loi n°2008-724  
du 23 juillet 2008

> Article 1<sup>er</sup> de la Constitution complété par « La loi favorise l'égal accès des femmes et des hommes aux mandats électoraux et fonctions électives, ainsi qu'aux responsabilités professionnelles et sociales. »



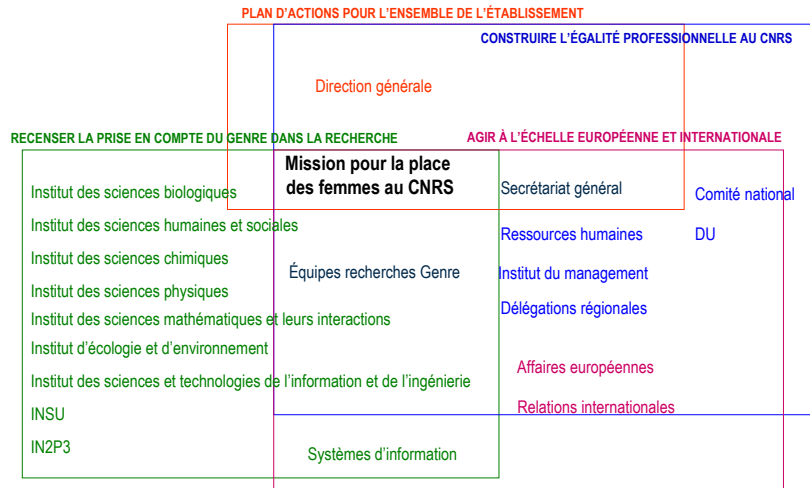
#### 4 | Les premières réponses apportées par le CNRS



#### 5 | Objectifs de la Mission pour la place des femmes au CNRS

- Nos principaux objectifs
  - Être un observatoire
  - Promouvoir l'égalité professionnelle et la recherche concernée par la problématique
  - Impulser des actions de sensibilisation et de communication
- Notre ambition
  - Instaurer le Gender mainstreaming : inscrire le genre dans toutes les politiques et activités de l'établissement pour améliorer l'équilibre entre hommes et femmes
  - Doter le CNRS d'un acte solennel affichant son engagement en matière d'égalité hommes - femmes

## 6 | La dynamique de la Mission : une démarche intégrée



## 7 | Des actions - Contractualiser la démarche

- Renouvellement de l'accord-cadre entre le ministère de l'Enseignement supérieur et de la Recherche / le ministère du Travail, des Relations sociales, de la Famille et de la Solidarité / le CNRS, signé en 2003
- Adhésion à la plateforme européenne EPWS
- Conclusions de conventions de partenariats internationaux autour d'actions spécifiques

## 8 | Les actions - Partager un même constat en France et dans le monde, et échanger sur les pratiques

- Présence dans les réseaux
  - Réseau parité du ministère de l'Enseignement supérieur et de la Recherche
  - Réseau de chercheuses : ICWIP, Femmes en photonique, etc.
  - Réseaux associatifs et de structures opérationnelles
- Multiplication des points de contacts en Europe et dans le monde
- Promouvoir la transversalité des recherches sur le genre et mettre en lien les acteurs de ces recherches

## 9 | Les actions - Communiquer vers le vivier en France et dans le monde

- Inciter les jeunes à s'engager dans des filières scientifiques, en particulier les jeunes filles
- Faire connaître les métiers scientifiques et techniques, notamment ceux du CNRS
- Valoriser l'image des femmes au CNRS
- Réalisation de supports pédagogiques destinés à ces publics

## 10 | Les actions – Prise en compte du genre

- Édition d'un document à l'usage des IPE pour la prise en compte du genre dans les projets du 7e PCRD
- Aide aux laboratoires dans leurs réponses aux appels à projet et leurs engagements vis-à-vis de l'Europe

### Opérations phares 2009

- lancement d'un recensement des chercheur-e-s et unités prenant en compte le genre et les femmes dans leurs études et recherches
- résultat d'une enquête relative à la prise en compte du genre par la filière RH

## 11 | Les actions – Construire et négocier les bases d'un accord d'égalité professionnelle au CNRS

- Production d'indicateurs : édition d' une brochure annuelle «la parité dans les métiers du CNRS »
- Sensibilisation de l'ensemble des acteurs de la fonction RH (DRH nationale et régionales, comité national, DU, organisations syndicales)
- Construction et négociations autour d'un Accord

**PARCOURS DE FEMMES (ET D'HOMMES) AU  
CNRS**

*Suzanne de Cheveigné*

**Parcours de femmes  
(et d'hommes) au CNRS**

Suzanne de Cheveigné  
Shadyc (EHESS-CNRS), Marseille  
suzanne.de-cheveigne@univmed.fr

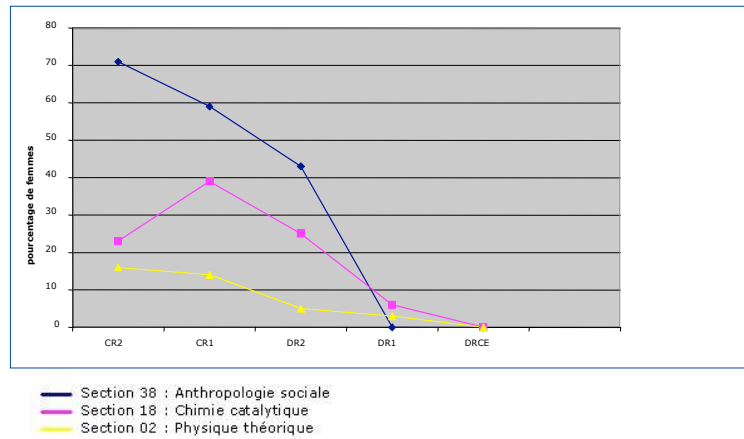
## **Contexte de l'enquête**

- Politiques européennes d'égalité :  
1er colloque F&S, 1993
- Wenneras et Wold (*Nature*, 1997)

## **Contexte de l'enquête en France**

- Statistiques publiées  
ex. Bilan social CNRS, rapport Barré, Crance, Sigogneau 1999,  
Boukhobza, Delavault, Hermann, 2000
- Création de la Mission pour la place des  
femmes au CNRS en 2001
- Enquête proposée et immédiatement acceptée

## Le « plafond de verre »



Proportions de femmes dans les populations de chercheurs 2002

## Objectif de l'étude

Aller au delà du constat pour comprendre les raisons de ce « plafond de verre » :



## Méthodologie

- Explorer par entretien les carrières de femmes et d'hommes au CNRS
- ITA et chercheurs
- Sans introduire a priori la question du genre

## Méthodologie

- 15 entretiens auprès de :
  - 8 ITA et 7 chercheuses
  - Tous départements scientifiques, catégories diversifiées, Paris/Province, labos propres et mixtes, de 24 à 60 ans
- Puis pour chacune d'elles, 2 entretiens complémentaires auprès de collègues (hommes et femmes)
  - => 47 personnes au total, 1/3 H, 2/3 F
- Durée environ 2 heures



## **Entretiens**

- **Centrés sur la carrière** (pas H/F):
  - trajectoire professionnelle de l'interviewé (motivations, premiers contacts, parcours)
  - perception de la fonction actuelle (missions, interlocuteurs, organisation concrète du travail)
  - attentes et besoins (perspectives d'évolution, vision du rôle de chercheur, équilibre vie privée-vie professionnelle)

## **Une analyse commune hommes et femmes, ITA et chercheurs**

- Un très grand attachement au métier
- Des conditions d'exercice de plus en plus difficiles
- De très fortes critiques :
  - gestion des ressources humaines (leur carrière + les autres)
  - pesanteurs administratifs
  - défaut de communication interne

### **Notre analyse de la situation générale**

- Tensions entre travail *collectif* (de plus en plus nécessaire) et travail individuel
- Évaluation sur l'*individuel*
- Pesanteurs administratifs et défaut de communication interne rendent *le collectif plus difficile à assurer*

### **Et les femmes dans ce contexte ?**

- Les femmes font la même analyse de la situation générale que les hommes
- Elles *méconnaissance* de la situation des femmes (ex. statistiques du "plafond de verre")

## **Des points communs ITA et chercheuses**

- L'attachement aux métiers de la recherche
- Les critiques sur les modes d'évaluation et de promotion
  
- Une vision plus **collective** que les hommes des métiers de la recherche
- Problèmes de **gestion du temps long** (limites d'âge, « voies sans issue ») plus que du quotidien (horaires)
- **Déni** de toute discrimination et rejet des quota

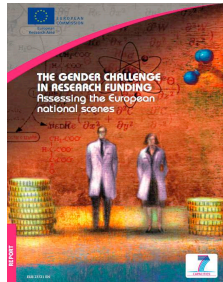
## **Des différences entre ITA et chercheuses**

- Pour les chercheuses :
  - La contextualisation socioculturelle explique les différences hommes-femmes dans la relation au travail (vs erreurs propres ou structure)
  
- Pour les ITA :
  - La difficulté à négocier les changements : moins de maîtrise que les chercheuses
  - Hétérogénéité des situations

## Recommandations de 2003

- Intégrer réellement les activités **collectives** dans les critères d'évaluations et les faciliter matériellement
- Favoriser la « **transparence** » : procédures d'évaluation, de promotion et de financement
- Rendre **visible** le fonctionnement du CNRS (débatte, rompre l'isolement - modèle Cargèse ?)
- Penser les métiers de la recherche dans le **long terme**  
=> lever limites d'âge, éviter les "scléroses", permettre les parcours "atypiques"

EC, 2009



"The applicants should receive extensive evaluation **feedback** in writing."

### Lettre INSHS, Nov 2009 : Projets exploratoires

"Plusieurs candidats malheureux ont réclamé les avis des experts. Ces avis ne seront pas communiqués. La raison en est que leur prise en considération dépend notamment du contexte formé par les projets en lice au dernier stade de la procédure. Si bien que livrer ces éléments affranchis de ce contexte ne pourrait qu'engendrer des erreurs d'appréciation."

## And so what ?

- Audace de la toute nouvelle Mission !
- Mais frilosité du CNRS pour la publication  
... idem pour une seconde enquête sur  
l'évaluation (C. Marry)
- Publiée dans *Social Studies of Science*

## And so what ?

- Une question non prioritaire, non légitime :  
une non-question !
- La France est TRÈS en retard sur la prise en  
compte du problème
- Importance de soutenir l'action des Missions - et  
de se mobiliser





## *femmes & math*

Revue de l'association *femmes et mathématiques*  
Institut Henri Poincaré  
11 rue Pierre et Marie Curie  
75231 Paris CEDEX 05  
fetm@ihp.jussieu.fr  
<http://www.femmes-et-maths.fr>

# Numéro 9

## SOMMAIRE

Editorial	p. 1
<b>Vie de l'association</b>	
Des activités de femmes et mathématiques	p.5 à 14
<b>A propos de mathématiques</b>	
Textes des communications mathématiques du 9ème Forum des jeunes mathématiciennes, 6 et 7 novembre 2009	p. 17 à 116
<b>A propos de femmes</b>	
Agnès Netter - La Politique du CNRS en matière de parité, Mission pour la place des femmes au CNRS	p. 119 à 128
Suzanne de Cheveigné - Parcours de femmes (et d'hommes) au CNRS	p. 129 à 137



INSTITUT NATIONAL  
DE RECHERCHE  
EN INFORMATIQUE  
ET EN AUTOMATIQUE



Coordinatrice de rédaction : Christine Charretton  
Directrice de publication : Véronique Slovacek-Chauveau  
Imprimerie : Général Art Impressions (95270 Belloy en France)  
Numéro ISSN : 1271-3546  
Tirage 200 ex  
Dépôt légal : septembre 2010  
Prix du numéro : 12 €