“ WELL, PAPA, CAN YOU MULTIPLY TRIPLETS ? ”

Sophie Morier-Genoud

Résumé. — L'exposé porte sur l'algèbre des quaternions et sa propriété de commutativité récemment observée, [**2**]. Après un rappel historique de la naissance des quaternions, on définit la propriété de commutativité au sens gradué et on présente toutes les algèbres associatives simples ayant cette propriété.

1. Ce qu'on peut lire sur Brougham Bridge à Dublin

A l'automne 1843, le pont *Brougham* situé dans une paisible banlieue de Dublin, va subir un acte de vandalisme mathématique, aussi rare qu'important. L'auteur ? William Rowan Hamilton. Le mobile ? Une réponse positive, enfin, à des années de tourmente....

Comment multiplier des triplets de nombres réels ? La question est simple et naturelle. En effet, depuis le XVIème siècle on sait déjà comment multiplier les couples. La formule

$$(a, b) \cdot (a', b') = (aa' - bb',\ ab' + a'b)$$

définit sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ la structure algébrique dite *complexe* et notée $\mathbb{C}$. On note usuellement 1 l'élément $(1, 0)$ de $\mathbb{C}$ et i l'élément $(0, 1)$, on a alors i^2=-1. Plus généralement, on note $a + i\,b$ les couples (a, b) dans $\mathbb{C}$, qu'on appelle nombres complexes.

Comment multiplier des triplets de nombres réels ? Cette question occupe l'esprit de Hamilton pendant plusieurs années au milieu du XIXème siècle, et le tourmente jour et nuit. Quand, les cheveux en pagaille et les yeux cernés, témoignant de longues heures d'insomnie, Hamilton arrivait au petit-déjeuner, son fils inlassablement lui demandait : *Well, Papa, can you multiply triplets ?* Ceci n'égayait en rien Hamilton, et renvoyé à son échec, dans un soupir il répondait tristement : *No, son, I can only add and subtract them* [1].

[1] Anecdote rapportée par Hamilton lui-même dans une correspondance avec son fils.

Les tentatives de Hamilton de définir une multiplication sur les triplets qui en un sens généraliserait la structure complexe, échouent. En revanche, ce que découvre Hamilton le 16 octobre 1843, lors de sa promenade le long de *Royal Canal*, c'est la formule de multiplication des quadruplets. La formule originale, gravée par Hamilton sur une pierre du pont, n'est plus visible aujourd'hui. Une plaque rend hommage.

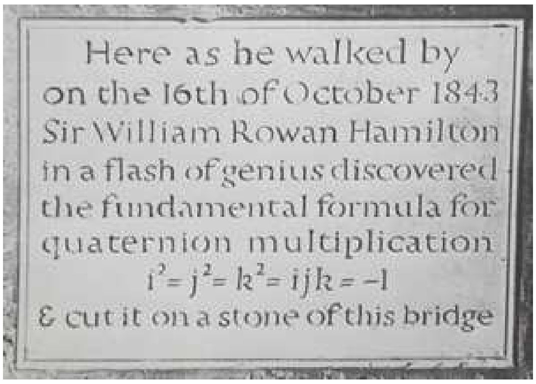

FIGURE 1. Multiplication des quaternions gravée sur Brougham Bridge

2. Ce qu'on ne pourra pas lire sur Brougham Bridge à Dublin

Les quaternions sont des nombres représentés par des quadruplets de réels (a, b, c, d), que l'on note $a + i\,b + j\,c + k\,d$. La loi de multiplication est donnée par la formule gravée sur Brougham Bridge (cf Figure 1)

$$i^2 = j^2 = k^2 = i \cdot j \cdot k = -1,$$

combinée avec les règles d'associativité et de distributivité usuelles. L'ensemble des quaternions est noté $\mathbb{H}$.

L'ensemble $\mathbb{H}$ est une algèbre réelle, associative, de dimension 4, et dite *à division*. Cette dernière propriété signifie que le produit de deux éléments $h \cdot h'$ est nul, si et seulement si, h ou h' est nul.

Le projet de Hamilton était donc de construire une telle algèbre (réelle, associative, à division) en dimension 3. Pourquoi a-t-il échoué ? Peut-on envisager de telles algèbres en dimensions supérieures ? La réponse est apportée en 1877 par un théorème de Frobenius :

***Théorème 2.1* (Frobenius).** — *Les seules algèbres associatives, à division, de dimension finie sur $\mathbb{R}$, sont : $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ et $\mathbb{H}$.*

Ce théorème désormais classique est enseigné et démontré dans les premiers cycles universitaires (voir par exemple [**1**]).

En corollaire immédiat on déduit que les seules algèbres associatives et commutatives, à division, et de dimension réelle finie sont $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$.

3. La question de la commutativité

La propriéte qu'il a fallu abandonner lors du passage aux quaternions, est la propriété de commutativité. En effet, dans les algèbres $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$, le produit satisfait

$$x \cdot y = y \cdot x,$$

pour tous éléments x, y réels ou complexes. Ceci n'est plus vrai dans $\mathbb{H}$ et rend l'algèbre des quaternions plus difficile à manier. Plusieurs procédés algébriques ou géométriques nécessitent des algèbres commutatives.

Dans un travail récent, en collaboration avec V. Ovsienko, nous avons observé que l'algèbre $\mathbb{H}$ est en fait commutative au sens gradué.

Définition 3.1. — Considérons $(\Gamma, +)$ un groupe abélien. Une algèbre $\mathcal{A}$ est dite Γ-*graduée*, si $\mathcal{A} = \bigoplus_{\gamma \in \Gamma} \mathcal{A}_\gamma$ et

$$\mathcal{A}_\gamma \cdot \mathcal{A}_{\gamma'} \subset \mathcal{A}_{\gamma+\gamma'}.$$

L'algèbre est *graduée commutative*, s'il existe une application bilinéaire $\langle \, , \, \rangle : \Gamma \times \Gamma \to \mathbb{Z}_2$ telle que

$$x \cdot y = (-1)^{\langle \bar{x}, \bar{y} \rangle} \, y \cdot x, \qquad (1)$$

pour tous éléments homogènes x, y de $\mathcal{A}$ de degré respectif $\bar{x}$ et $\bar{y}$ dans Γ.

Théorème 3.2. — [**2**] *L'algèbre des quaternions est* $(\mathbb{Z}_2)^3$*-commutative.*

En effet, si on associe les "degrés triples" suivants aux éléments de la base standard de $\mathbb{H}$:

$$\begin{aligned} \bar{1} &= (0,0,0)\,, \\ \bar{i} &= (0,1,1)\,, \\ \bar{j} &= (1,0,1)\,, \\ \bar{k} &= (1,1,0)\,, \end{aligned}$$

alors le produit dans $\mathbb{H}$ satisfait (1) pour le produit scalaire usuel sur $(\mathbb{Z}_2)^3$.

Une remarque amusante est que si l'on identifie les éléments $1, i, j, k$ à leur degré, $\mathbb{H}$ peut-être vue comme une algèbre de triplets. En effet, $\mathbb{H}$ est isomorphe à l'algèbre du groupe $\mathbb{R} < \mathbb{Z}_2^3 >$ munie de la loi de multiplication :

$$(a,b,c) \cdot (a',b',c') = (-1)^{a'(b+c)+b'c} \; (\, a+a' \,,\, b+b' \,,\, c+c' \,),$$

pour tous triplets (a, b, c) et (a', b', c') d'éléments de $\mathbb{Z}_2$.
Par exemple, la formule donne $(0, 1, 1) \cdot (1, 0, 1) = (1, 1, 0)$, correspondant à $ij = k$, et $(1, 0, 1) \cdot (0, 1, 1) = -(1, 1, 0)$, correspondant à $ji = -k$.

Finalement, ne pourrait-on pas dire que Hamilton savait multiplier des triplets...

4. Généralisations et perspectives

Peut-on étendre la liste $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{H}$?

Si on abandonne la condition d'associativité, la liste peut se rallonger avec exactement une algèbre supplémentaire $\mathbb{O}$, l'algèbre des octonions.

Si on garde la condition d'associativité, on peut alors essayer d'assouplir la condition de commutativité. Motivés par l'observation que l'algèbre $\mathbb{H}$ est graduée commutative ($\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$ l'étant trivialement) nous avons entrepris, en collaboration avec V. Ovsienko, une étude plus complète de telles algèbres. Nous obtenons :

Théorème 4.1. — **[3]** *Toute algèbre associative, graduée commutative, simple, de dimension finie sur $\mathbb{R}$, est isomorphe à une algèbre de Clifford.*

Compte-tenu de la classification bien connue des algèbres de Clifford (voir par exemple **[4]**), on obtient alors la liste complète :

$$\begin{array}{lll}
\mathbb{R} & & \\
\mathbb{R}(2) & \mathbb{C} & \\
\mathbb{R}(4) & \mathbb{C}(2) & \mathbb{H} \\
\mathbb{R}(8) & \mathbb{C}(4) & \mathbb{H}(2) \\
\mathbb{R}(16) & \mathbb{C}(8) & \mathbb{H}(4) \\
\vdots & \vdots & \vdots
\end{array}$$

où la notation $\mathbb{K}(n)$ désigne les matrices carrées d'ordre n à coefficients dans $\mathbb{K}$.

La classe des algèbres réelles commutatives admet un procédé de *complexification*. En effet, si $\mathcal{A}$ est une algèbre réelle commutative alors $\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \mathcal{A}$ est une algèbre complexe commutative. La "quaternionisation" ne peut être envisagée sans perte de la commutativité. En revanche, elle peut être envisagée dans la classe des algèbres graduées commutatives.

On espère que des procédés et constructions propres aux algèbres commutatives, notamment en géométrie algébrique, pourront être étendus aux algèbres graduées commutatives.

Références

[1] T. Y. Lam, *Hamilton's quaternions*, Handbook of algebra, Vol. 3, 429–454, North-Holland, Amsterdam, 2003.

[2] S. Morier-Genoud, V. Ovsienko, *Well, Papa, can you multiply triplets ?*, Math. Intelligencer, Vol 31, no 4, 1-2, 2009.

[3] S. Morier-Genoud, V. Ovsienko, *Simple graded commutative algebras*, J. Algebra, à paraître.

[4] I. R. Porteous, *Clifford Algebras and the Classical Groups*, Cambridge Univ. Press, 1995.

Sophie Morier-Genoud

Université Pierre et Marie Curie- Paris 6, Institut Mathématiques de Jussieu,
175 rue du Chevaleret, 75013 Paris.

E-mail : `sophiemg@math.jussieu.fr`