POINTS FIXES ET POINTS DE COÏNCIDENCE POUR LES MULTIAPPLICATIONS

Khadra Nachi

Résumé. — Nous donnons un résultat de point fixe pour une correspondance non dilatante et asymptotiquement contractante. Nous présentons aussi un théorème de coincidence qui généralise un résultat classique de Nadler.

1. Multiapplications asymptotiquement contractantes et leurs points fixes

La définition suivante généralise la notion d'application asymptotiquement contractante au cas des correspondances. Elle utilise la définition de l'*excès de Hausdorff* entre deux parties A, B d'un espace vectoriel normé X :

$$e(A,B) := \sup_{a \in A} d(a,B)$$

où $d(a,B) := \inf\{\|a-b\| : b \in B\}$. On utilise la convention $e(\emptyset, B) = 0$ pour toute partie B de X et $e(A,\emptyset) = +\infty$ pour toute partie non vide A de X. Nous nous servirons aussi de la *distance de Pompeiu-Hausdorff* entre A et B définie par

$$d(A,B) := \max(e(A,B), e(B,A)).$$

Notons que dans la définition qui suit, le mot "asymptotiquement" n'est pas lié aux iterations de la multiapplication comme dans **[2]** et de nombreux articles, mais porte sur le comportement de la multiapplication quand la norme de la variable tend vers l'infini. Ce comportement peut être étudié à l'aide de concepts de cônes asymptotes et de compacité asymptotique comme dans **[1]**, **[3]**, **[4]**, **[5]**, **[10]**.

Définition 1.1. — Soit C un sous-ensemble non vide d'un espace de Banach X et soit $F : C \to 2^X$ une multiapplication à valeurs non vides. On dit que F est asymptotiquement contractante sur C s'il existe un point $x_0 \in C$ tel que

$$\limsup_{x \in C, \|x\| \to \infty} \frac{e(F(x), F(x_0))}{\|x - x_0\|} < 1. \tag{1}$$

Lorsque F est univoque i.e. $F(x) := \{f(x)\}$ où $f : C \to X$ est une application, on retrouve la définition d'une application asymptotiquement contractante sur C donnée dans **[8]** comme une variante de la notion introduite dans **[4]**.

Si $e(F(x), F(x')) < \infty$ pour tous $x, x' \in C$ (en particulier, si F est à valeurs bornées) alors la condition (1) est indépendante du choix de $x_0 \in C$: en effet, soit $x_1 \in C$ ($x_1 \neq x_0$). Comme $e(F(x), F(x_1)) \leq e(F(x), F(x_0)) + e(F(x_0), F(x_1))$ on a

$$\frac{e(F(x), F(x_1))}{\|x - x_1\|} \leq \left(\frac{e(F(x), F(x_0))}{\|x - x_0\|} + \frac{e(F(x_0), F(x_1))}{\|x - x_0\|}\right)\frac{\|x - x_0\|}{\|x - x_1\|},$$

et

$$\limsup_{x \in C,\ \|x\| \to \infty} \frac{e(F(x), F(x_1))}{\|x - x_1\|} \leq \limsup_{x \in C,\ \|x\| \to \infty} \frac{e(F(x), F(x_0))}{\|x - x_0\|} < 1.$$

Rappelons qu'une multiapplication $F : C \to 2^X$ est *non-dilatante* si pour tous $x, x' \in C$, on a

$$F(x) \subset F(x') + \|x - x'\|\, B_X, \tag{2}$$

où B_X est la boule unité fermée dans X tandis que F est *demi-fermée* si son graphe $\mathrm{Gr}(F) := \{(x, y) \in C \times X : y \in F(x)\}$ est séquentiellement fermé dans l'espace produit $C \times X$ muni de la topologie faible dans C et de la topologie de la norme dans X, i.e.

$$((x_n, y_n))_n \subset \mathrm{Gr}(F),\ (x_n) \rightharpoonup x \in C \text{ et } (y_n) \to y \implies y \in F(x).$$

***Proposition 1.2.* —** *Soit X un espace de Banach réflexif et soit C un sous-ensemble convexe fermé de X. Soit $F : C \to 2^X$ une multiapplication à valeurs fermées, non vides, non-dilatante et satisfaisant la condition (1) en un point $x_0 \in C$ tel que $F(x_0)$ soit borné. Si $F(C) \subset C$ et si $I - F$ est demi-fermée alors F admet un point fixe.*

Démonstration : Soit $x_0 \in C$ tel que $F(x_0)$ soit borné. Considérons une suite (θ_n) dans $(0, 1)$ telle que $(\theta_n) \to 1$. Définissons, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la multiapplication $F_n : C \to 2^X$ par

$$F_n(x) := \theta_n F(x) + (1 - \theta_n)x_0. \tag{3}$$

Comme $F(C) \subset C$ et comme C est convexe on a $F_n(C) \subset C$. D'autre part, pour $x, x' \in C$ et $v_n \in F_n(x)$, il existe, d'après (3), $u_n \in F(x)$ tel que $v_n = \theta_n u_n + (1 - \theta_n)x_0$ et il existe, d'après (2), $u'_n \in F(x')$ tel que $\|u_n - u'_n\| \leq \|x - x'\|$. Donc pour $v'_n = \theta_n u'_n + (1 - \theta_n)x_0 \in F_n(x')$, on a

$$\|v_n - v'_n\| \leq \theta_n \|x - x'\|,$$

ce qui montre que F_n est θ_n-contractante dans C, i.e.

$$\forall x, x' \in C \qquad F_n(x) \subset F_n(x') + \theta_n \|x - x'\|\, B_X.$$

Le théorème de Nadler **[6]** assure alors l'existence d'un point fixe de F_n dans C. Soit, pour tout n, $x_n \in C$ tel que $x_n \in F_n(x_n)$. D'après (3), il existe $y_n \in F(x_n)$ tel que :

$$x_n = \theta_n y_n + (1 - \theta_n)x_0, \tag{4}$$

donc

$$(1-\theta_n)(x_0-y_n) = x_n - y_n \in (I-F)(x_n). \tag{5}$$

Remarquons d'abord que si la suite (x_n) est bornée, la conclusion de la proposition est immédiate. En effet, (x_n) étant bornée dans un espace de Banach réflexif, elle admet une sous-suite, notée encore (x_n), convergeant faiblement vers un point $\bar{x}$. Comme la suite $(x_n - y_n)$ converge vers 0 (car $(y_n) = (x_0 + \theta_n^{-1}(x_n - x_0))$ est bornée d'après (4)), on conclut, par l'hypothèse de fermeture, que $0 \in (I-F)(\bar{x})$ avec $\bar{x} \in C$, i.e. que $\bar{x}$ est un point fixe de F.

Ainsi, pour achever la preuve de la proposition, il suffit de montrer que (x_n) est bornée. Supposons le contraire ; il existe donc une sous-suite, notée encore (x_n), telle que $(\|x_n\|) \to \infty$. Comme la condition (1) est satisfaite il existe $c \in]0,1[$ et $\rho > 0$ tels que

$$\forall x \in C, \|x\| \geq \rho : e(F(x), F(x_0)) < c\,\|x - x_0\|.$$

Pour n assez grand on a $\theta_n > c$ et $\|x_n\| \geq \rho$ donc

$$d(y_n, F(x_0)) < c\,\|x_n - x_0\|.$$

Il existe donc une suite (z_n) dans $F(x_0)$ qui sera bornée telle que

$$\|y_n - z_n\| \leq c\,\|x_n - x_0\|.$$

D'autre part, des égalités (4) et (5), il vient :

$$\begin{aligned}
\|x_n\| &\leq \|x_n - y_n\| + \|y_n - z_n\| + \|z_n\|, \\
&\leq (1-\theta_n)\,\|x_0 - y_n\| + c\,\|x_n - x_0\| + \|z_n\|, \\
&\leq ((1-\theta_n)\theta_n^{-1} + c)\,\|x_n - x_0\| + \|z_n\|.
\end{aligned}$$

Divisant par $\|x_n\|$, on obtient

$$1 \leq (\theta_n^{-1} - 1 + c)\left(1 + \frac{\|x_0\|}{\|x_n\|}\right) + \frac{\|z_n\|}{\|x_n\|}.$$

Passant à la limite, en sachant que $(\|z_n\|)$ est bornée, que $(\|x_n\|) \to \infty$ et $(\theta_n) \to 1$, une contradiction en découle. Donc la suite (x_n) est bornée et la proposition est démontrée.

2. Théorème de coincidence en analyse multivoque

Le résultat précédent peut être généralisé au cas d'une coïncidence entre deux correspondances. Pour illustrer la souplesse de l'analyse multivoque, nous nous contenterons d'établir une généralisation du célèbre théorème de Nadler ([**6**]). Donnons pour cela une définition précise.

Définition 2.1. — Soient X un ensemble, Y un espace vectoriel et soient $F, G : X \to 2^Y$ deux multiapplications. On dira que F et G "présentent une coincidence" dans X s'il existe un point $u \in X$ tel que

$$0 \in (G - F)(u).$$

Le point u est appelé point de coincidence de F et G.

Remarquons que lorsque $Y = X$ et G est la multiapplication définie par $G(x) := \{x\}$ pour $x \in X$, on obtient la définition de point fixe de la multiapplication F. Observons aussi que la relation $0 \in (G - F)(u)$ s'écrit encore $F(u) \cap G(u) \neq \emptyset$, de sorte que deux applications $f, g : X \to Y$ présentent une coincidence dans X si, et seulement si, il existe un point $u \in C$ tel que $f(u) = g(u)$.

Proposition 2.2. — *Soient X un ensemble non vide, Y un espace de Banach et soient $F, G : X \to 2^Y$ deux multiapplications à valeurs non vides telles que*

$$\exists \lambda \in]0,1[,\ \forall (x,y),(x',y') \in Gr(G) \qquad d(F(x),F(x')) \leq \lambda \|y - y'\|. \tag{6}$$

Si F est à valeurs fermées et si $G(X)$ est fermé et contient $F(X)$, alors F et G admettent un point de coincidence $\bar{x} \in X$.

Si, de plus $Y = X$ et s'il existe $\bar{y} \in G(\bar{x}) \cap F(\bar{x})$ tel que

$$G(\bar{x}) \subset G(\bar{y}) \text{ et } G(F(\bar{x})) \subset F(\bar{y}), \tag{7}$$

alors $\bar{y}$ est un point fixe commun de F et G.

Démonstration : Soit $H : G(X) \to 2^Y$ donnée par $H := F \circ G^{-1}$, soit

$$H(y) := \{z \in Y : \exists x \in X, y \in G(x), z \in F(x)\}.$$

La relation (6) assure que H est une multiapplication contractante de taux λ. De plus, H est à valeurs fermées car pour tout $y \in G(X)$ et tous $x, x' \in G^{-1}(y)$ on a $F(x) = F(x')$, de sorte que $H(y) = F(x)$.

Le théorème de Nadler assure qu'il existe $\overline{y} \in G(X)$ tel que $\overline{y} \in H(\overline{y})$. Ainsi, pour tout $\overline{x} \in G^{-1}(\overline{y})$ on a $\overline{y} \in F(\overline{x}) \cap G(\overline{x})$.

Remarque 2.3. — : Si $G(\bar{x}) \subset G(\bar{y})$ et $G(F(\bar{x})) \subset F(\bar{y})$ alors $\bar{y}$ est un point fixe commun de F et G car on a alors $\overline{y} \in G(\overline{x}) \subset G(\bar{y})$ et $\overline{y} \in G(\overline{y}) \subset G(F(\bar{x})) \subset F(\bar{y})$.

Si de plus F et G sont les multiapplications dont le graphe coicide avec le graphe d'applications f et g les inclusions précédentes se traduisent par

$$g(\bar{x}) = g^2(\bar{x}) \text{ et } g(f(\bar{x})) = f(g(\bar{x})).$$

On obtient alors le résultat de Pathak-[**7**, Prop. 4] donné dans le cas univoque.

Références

[1] J.-P. Dedieu, *Cône asymptote d'un ensemble non convexe. Application à l'optimisation*, C. R. Acad. Sci. Paris, 287 (1977), 501-503.

[2] W.A. Kirk, *The fixed point property and mappings which are eventually nonexpansive, in Kartsatos, Athanassios G. (ed.), Theory and applications of nonlinear operators of accretive and monotone type*, Lect. Notes Pure Appl. Math. 178, Marcel Dekker, New York (1996), 141-147.

[3] D. T. Luc, *Recession maps and applications*, Optimization 27 (1993), 1-15.

[4] D. T. Luc, *Recessively compact sets : properties and uses*, Set-Valued Anal. 10 (2002), 15-35.

[5] D. T. Luc and J.-P. Penot, *Convergence of asymptotic directions*, Trans. Amer. Math. Soc. 353 (2001), 4095-4121.

[6] S. B. Nadler, *Multivalued contraction mappings*, Pacific J. Maths. 30 (1969), 475-488.

[7] H. K. Pathak, B.E. Rhoades and M. S. Khan, *Common fixed point theorem for asymptotically contractante mappings without compactness*, Preprint (2006).

[8] J.-P. Penot, *A fixed point theorem for asymptotically contracting mappings*, Proc. Amer. Math. Soc. 131, N 8, (2003), 2371-2377.

[9] J.-P. Penot, *A metric approach to asymptotic analysis*, Bulletin des Sciences Math. 127 (2003), 815-833.

[10] J.-P. Penot and C. Zălinescu, *Continuity of usual operations and variational convergences*, Preprint, Univ. of Pau, 2000 and 2001.

[11] C. Zălinescu, *Recession cones and asymptotically compact sets*, J. Optim. Theory Appl., 77 (1993), 209-220.

Khadra Nachi

Université d'Oran, Département de Mathématiques, BP 1524 El M'naouer., Oran, Algérie.

E-mail : `nachikhadra@yahoo.fr`