QUELQUES RÉSULTATS RÉCENTS EN APPROXIMATION DIOPHANTIENNE.

Martine Queffélec

Résumé. — Les rationnels sont denses dans les réels et si une suite de rationnels réduits converge vers un irrationnel, la suite des dénominateurs doit tendre vers l'infini. Que peut-on dire de l'erreur, évaluée en fonction de la taille du dénominateur ? C'est l'objet de l'approximation diophantienne.

Historiquement, le lien avec la théorie de la transcendance a été un moteur évident mais des connections avec différentes directions thématiques apparaissent au fil du temps. En particulier, il y a un va-et-vient permanent entre l'approximation rationnelle et l'analyse harmonique ou les systèmes dynamiques : de nombreux résultats s'appuient sur les qualités d'approximation des nombres réels par les rationnels mais dans l'autre sens, l'approximation diophantienne se nourrit des techniques d'analyse, de dynamique ou de combinatoire.

Les résultats récents en approximation diophantienne partent essentiellement dans deux directions : des résultats globaux de type métrique faisant appel à la théorie de la mesure et la dimension de Hausdorff ; dans un tout autre esprit, des constructions explicites utilisant la combinatoire des mots. On essaiera d'illustrer ces deux aspects après un long rappel historique.

1. Rappel historique

L'approximation diophantienne ou rationnelle mesure la qualité d'approximation d'un nombre réel par les rationnels, ce qu'on relie historiquement aux propriétés algébriques de ce nombre. Tout réel $x \in \mathbf{R}$ peut s'obtenir d'une infinité de façons comme limite d'une suite de rationnels ; de plus,

$$\forall q > 0,\ \exists p \in \mathbf{Z};\ |x - \frac{p}{q}| \leq \frac{1}{2q}.$$

Peut-on faire mieux ? c'est-à-dire avoir une meilleure erreur relative à la taille ou la complexité du rationnel : $\max(|p|, q)$. Un nombre rationnel est mal approchable par les autres rationnels puisque, si les rationnels a/b et p/q sont distincts,

$$|\frac{a}{b} - \frac{p}{q}| = |\frac{aq - bp}{bq}| \geq \frac{1}{bq}.$$

Cela conduit au critère d'irrationalité classique : *Si l'inégalité* $0 < |x - p/q| < \phi(q)$ *admet une infinité de solutions où* $\phi > 0$ *est* $o(1/q)$, *alors* $x \notin \mathbf{Q}$. C'est le principe de la démonstration par Fourier (1815) de l'irrationalité de e et de la preuve par Beukers de l'irrationalité de $\zeta(3)$ par exemple [**3**].

Le premier résultat général d'approximation diophantienne est dû à Dirichlet (1842) : il établit, comme conséquence du principe des tiroirs, que tout irrationnel s'approche à l'ordre 2 : *Si* $x \notin \mathbf{Q}$, *il existe une infinité de rationnels* p/q *tels que* $0 < |x-p/q| < 1/q^2$.

Au même moment, Liouville (1842) établit que les nombres algébriques (sur **Q**) ne peuvent être trop bien approchés, puisque : *Pour un nombre algébrique* x *de degré* d, *il existe* $C > 0$ *tel que* $|x - p/q| \geq C/q^d$ *pour tout rationnel* p/q.

Tout naturellement s'est posée la question de savoir si l'on pouvait décrire la propriété d'être algébrique en termes d'approximation. Le théorème de Roth en 1958, qui améliore cruellement le théorème de Liouville (en le rendant indépendant du degré), réduit de beaucoup tous ces espoirs.

***Théorème 1.1* (Roth).** — *Pour tout* x *algébrique, pour tout* $\varepsilon > 0$, *l'inégalité* $0 < |x - \frac{p}{q}| < \frac{1}{q^{2+\varepsilon}}$ *n'a qu'un nombre fini de solutions ; autrement dit si* x *est approchable à l'ordre* b *pour un* $b > 2$ *(au sens où l'inégalité* $0 < |x - \frac{p}{q}| < \frac{1}{q^b}$ *a lieu infiniment souvent), alors* x *est transcendant.*

Pour autant, entre q^2 et $q^{2+\varepsilon}$ il reste beaucoup de place !

Exemple [4] : *Le nombre* e *s'approche à l'ordre* $q^2 \log q / \log\log q$ *et pas mieux.*

La transcendance de e (établie par Hermite en 1872) ne résulte donc pas du théorème de Roth. Cependant, ce n'est pas un nombre si mal approchable : il existe des irrationnels approchables à l'ordre 2 exactement, ainsi les irrationnels quadratiques par le théorème de Liouville. Cela conduit à une première définition :

Définition 1.1. — *On dit que* x *est mal approchable s'il existe* $C > 0$ *avec* $|x - \frac{p}{q}| \geq \frac{C}{q^2}$ *pour tout rationnel* p/q. *On désigne par* **BAD** *leur ensemble.*

2. Développement en fraction continue

Comment trouve-t-on les meilleures approximations rationnelles ? Si on tronque le développement décimal d'un réel au n-ième terme pour obtenir le rationnel p_n/q_n, on fait une erreur d'ordre 10^{-n} c'est-à-dire de l'ordre de $1/q_n$; par contre il existe un développement plus adapté : le développement en fraction continue.

Tout irrationnel de **R** admet un unique développement illimité de la forme

$$x = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \ldots + \cfrac{1}{a_{n-1} + \cfrac{1}{a_n + \ldots}}}}$$

qu'on écrit $x = [a_0; a_1 a_2 \cdots]$, où $a_0 = [x]$ et les $a_n := a_n(x)$ sont des entiers ≥ 1 pour $n \geq 1$, appelés **quotients partiels**.

Le développement en fraction continue possède des propriétés importantes dont celles-ci :

1) (Algorithmique) Par troncature, il fournit des approximations rationnelles : $p_n/q_n = [a_0; a_1 a_2 \cdots a_n]$, qu'on appelle les **réduites** ou **convergentes** et qui se construisent à l'aide d'un algorithme **effectif**. Matriciellement on peut écrire

$$\begin{pmatrix} p_{n+1} & q_{n+1} \\ p_n & q_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{n+1} & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} a_0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$p_0 = a_0,\ q_0 = 1,\ p_{-1} = 1,\ q_{-1} = 0.$$

Noter ainsi que p_n/q_n est irréductible puisque $p_{n+1}q_n - q_{n+1}p_n = (-1)^n$ pour tout n.

2) (Optimalité) Ces approximations fournissent une version explicite des approximations de Dirichlet. Elles vérifient en effet :

$$\frac{1}{(q_n + q_{n+1})q_n} < |x - \frac{p_n}{q_n}| < \frac{1}{q_{n+1}q_n} < \frac{1}{q_n^2}. \tag{1}$$

De plus, elles sont les **meilleures** possibles en ce sens : si $||x|| = d(x, \mathbf{Z})$,

$$||q_n x|| = \min\{||qx||, q < q_{n+1}\}. \tag{2}$$

3) (Dynamique) Le développement en fraction continue d'un nombre de $]0, 1[$ est donné par une transformation ; en effet, si $a_1(x) = [\frac{1}{x}]$, $\frac{1}{x} = a_1(x) + \{\frac{1}{x}\}$ et $x =: \frac{1}{a_1(x)+Tx}$ où T est la transformation de Gauss ; de sorte que $a_n(x) = a_1(T^{n-1}x)$ pour tout $n \geq 1$. Le système dynamique associé $((0, 1), \mathcal{B}, \mu, T)$, muni de la mesure de Gauss $\mu = \frac{1}{\log 2}\frac{dx}{1+x}$, est ergodique et isomorphe à un shift sur $(\mathbf{N}^*)^{\mathbf{N}^*}$. En particulier, le théorème ergodique de Birkhoff nous dit que pour tout sous-ensemble mesurable A de $(0, 1)$, la fréquence de visite de A par x, sous l'action de T, est $\mu(A)$ (pour presque tout x). Ce qu'on exprime par : *la moyenne temporelle de* A *est égale à sa moyenne spatiale.*

Retour à l'approximation en dimension 1

Les nombres mal approchables (dont font partie les irrationnels quadratiques) se décrivent facilement à l'aide du développement en fraction continue. Tout d'abord le théorème de Lagrange établit : *Les irrationnels quadratiques sont les nombres à développement en fraction continue ultimement périodique.*
Plus généralement, on a la caractérisation suivante :

Proposition 2.1.* — *Un nombre réel est mal approchable si et seulement si la suite de ses quotients partiels est bornée.

Preuve : Il résulte de (1) les inégalités $\frac{1}{(a_{n+1}+2)q_n^2} < |x - \frac{p_n}{q_n}| < \frac{1}{a_{n+1}q_n^2}$. Si $a_n \leq K$ pour tout n, $\frac{1}{(K+2)q_n} \leq \frac{1}{(a_{n+1}+2)q_n} < ||q_n x||$ et si $q_n \leq q < q_{n+1}$, $||qx|| \geq ||q_n x||$ par la propriété extrémale des réduites (2) ; on en déduit $||qx|| \geq C/q$. Dans l'autre sens, $\frac{C}{q_n^2} \leq |x - \frac{p_n}{q_n}| < \frac{1}{(a_{n+1})q_n^2}$ implique $a_n \leq 1/C$ pour tout n. ♢

Peut-on déterminer le développement en fraction continue des nombres célèbres (constantes universelles) ? On connaît celui de e depuis Euler (1737) :

$$e - 2 = [0; 1\ 2\ 1\ 1\ 4\ 1\ 1\ 6\ 1\ \ldots\ 1\ 2n\ 1\ \ldots],$$

d'où l'on tire la propriété d'approximation citée au début ; en fait les seuls développements réguliers connus proviennent de fonctions hypergéométriques.

Les premiers exemples de nombres transcendants, donnés par Liouville, étaient des nombres à développement en base entière hyperlacunaire et ainsi très bien approchés, qu'on appelle désormais **nombres de Liouville**. Mais il existe des nombres transcendants mal approchables par un simple argument de cardinalité : l'ensemble des nombres mal approchables est non dénombrable alors que l'ensemble des nombres algébriques est dénombrable.

Faute de pouvoir expliciter le développement en fraction continue de nombres célèbres, on regarde le problème dans l'autre sens et on cherche des propriétés du comportement des quotients partiels satisfaites par presque tout réel. C'est là que la propriété dynamique va jouer un rôle.

3. Premiers résultats métriques

Borel et Khintchine, dans les 30 premières années du XXème, sont à l'origine de la théorie métrique des fractions continues. Le premier résultat métrique concernant la taille de **BAD** est dû à Borel :

Proposition 3.1. — $m(\mathbf{BAD}) = 0$, *où* m *désigne la mesure de Lebesgue.*

Tout d'abord, remarquons que *la fréquence d'apparition de l'entier* $k \geq 1$, *fixé à l'avance, dans la suite des quotients partiels de* x *est presque sûrement*

$$\pi_k = \frac{1}{\log 2} \log\Big(1 + \frac{1}{k(k+2)}\Big).$$

Il suffit de prendre $A = \{a_1 = k\}$ dans le théorème ergodique. En particulier, chaque $k \geq 1$ apparaît avec une fréquence strictement positive dans la suite $(a_n(x))$, pour presque tout x. Maintenant **BAD** se décompose en $\cup_N F(N)$ où

$$F(N) = \{x \in [0,1];\ a_n(x) \leq N\ \forall n \geq 1\};$$

il résulte de ce qui précède que chaque $F(N)$, et donc **BAD**, est de mesure nulle. C'est aussi une conséquence du théorème de Khintchine qui apporte la précision suivante :

Théorème 3.1. — *Soit* $\phi : \mathbf{N} \to \mathbf{R}^+$ *une fonction croissante et*

$$\mathcal{K}_\phi = \{x / \ |qx - p| < 1/q\phi(q) \text{ pour une infinité de } p/q\}$$

Alors $m(\mathcal{K}_\phi) = 0$ *ou* 1 *selon que* $\sum 1/q\phi(q)$ *converge ou diverge.*

Le théorème de Roth a permis de définir une classe de nombres transcendants, les nombres *très bien approchables* :

Définition 3.1. — *On désigne par* **VWA** *l'ensemble des nombres* $2+\varepsilon$*-approchables pour un* $\varepsilon > 0$ *i.e. les nombres pour lesquels il existe* $\varepsilon > 0$ *tel que*

$$|x - \frac{p}{q}| \leq \frac{C}{q^{2+\varepsilon}} \text{ pour une infinité de } p/q.$$

Définition 3.2. — *L'ensemble des nombres $2+\varepsilon$-approchables pour tout $\varepsilon > 0$ n'est autre que l'ensemble des nombres de Liouville noté par $\mathcal{L}$*

Ainsi **VWA** contient les nombres de Liouville mais, il est loin d'épuiser l'ensemble des nombres transcendants car

Proposition 3.2. — $m(\mathbf{VWA}) = \mathbf{0}$.

C'est encore une conséquence directe du théorème de Khintchine.

4. Résultats récents

Les questions en approximation diophantienne tournent autour des propriétés des développements en liaison avec la nature algébrique des nombres et conduisent à étudier les connections entre les différents développements eux-mêmes ; de nombreuses questions se posent aussi en dimension supérieure, sur l'approximation simultanée en particulier, où il n'existe pas d'analogue du développement en fraction continue jouissant des mêmes propriétés. Un ensemble de nombres définis par une propriété particulièrement simple de leur développement adique est l'ensemble de Cantor K (nombres sans 1 dans leur développement triadique). Il est clair que K contient des nombres de Liouville, ainsi $\xi = 2\sum_{n=1}^{\infty} 3^{-n!}$, mais des questions subsistent :

(1) (Mahler) K contient-il des nombres très bien approchables non Liouville ?
(2) (Mahler) Les irrationnels de l'ensemble triadique de Cantor sont-ils tous transcendants ?
(3) Y a-t-il des irrationnels quadratiques dans K ?
(4) Y a-t-il des nombres mal approchables dans K ?
(5) (Khintchine) Existe-t-il des nombres cubiques mal approchables ?

Voici quelques résultats récents faisant appel à la théorie de la mesure et la géométrie des fractales :

***Théorème 4.1* ([6]).** — *La dimension de Hausdorff de* $(\mathbf{VWA}\backslash\mathcal{L}) \cap K$ *est au moins* $\alpha/2$, *avec* $\alpha = \log 2/\log 3 = \dim K$. *En particulier il y a une infinité de nombres très bien approchables et non Liouville dans* K.

Pourtant,

***Théorème 4.2* ([7]).** — *Presqu'aucun nombre de* K *n'est très bien approchable c'est-à-dire* $\mu(\mathbf{VWA} \cap K) = 0$ *si* μ *est la mesure naturelle sur* K.

***Théorème 4.3* ([5]).** — *La dimension de Hausdorff de* $\mathbf{BAD} \cap K$ *est égale à* $\alpha = \dim K$. *En particulier il y a une infinité de nombres mal approchables dans* K.

Par contre les questions 3 et 5 restent ouvertes.
Une autre approche consiste à construire des classes de nombres transcendants à partir de leurs quotients partiels : il résulte de l'inégalité $|x - p_n/q_n| \leq 1/q_n q_{n+1}$ que le comportement des dénominateurs q_n est déterminant ; s'il y a explosion des quotients partiels, il y a explosion de la suite (q_n) et le nombre est transcendant par le

théorème de Roth. A l'opposé, pour les nombres à quotients partiels bornés, la suite (q_n) est simplement lacunaire. Pourtant il existe des nombres transcendants dans **BAD**, comment en construire ? L'idée consiste à utiliser la combinatoire des mots et l'approximation par les irrationnels quadratiques. Pour cela, on identifie un nombre de **BAD** à son développement en fraction continue $a_1 a_2 ...$, qui est une suite à valeurs dans l'alphabet **fini** $\mathcal{A} = \{1, 2, \dots, b\}$. Une suite de la forme : $UVVVV \cdots =: UV^\infty$, U et V étant des mots finis de $\mathcal{A}$ (V est infiniment répété) correspond au développement d'un irrationnel quadratique par le théorème de Lagrange. On dit qu'un mot U est un **carré** s'il s'écrit $U = VV$ où V est lui-même un mot sur $\mathcal{A}$; c'est un **palindrome** s'il est symétrique.

***Théorème 4.4* ([1, 2]).** — *1. Le développement en fraction continue d'un nombre cubique ne commence pas par des carrés arbitrairement grands.*
2. Le développement en fraction continue d'un nombre cubique ne commence pas par des palindromes arbitrairement grands.

Références

[1] B. Adamczewski et Y. Bugeaud, On the complexity of algebraic numbers. II. Continued fractions. *Acta Math.* **195** (2005), 1–20.

[2] B. Adamczewski et Y. Bugeaud, Palindromic continued fractions. *Ann. Inst. Fourier* **57** (2007), 1557–1574.

[3] F. Beukers, A note on the irrationality of $\zeta(2)$ and $\zeta(3)$. *Bull. London Math. Soc.* **11** (1979), 268–272.

[4] C.S. Davis, Rational approximations to e. *J. Austral. Math. Soc.* **25** (1978), 497–502.

[5] D. Kleinbock and B. Weiss, Badly approximable vectors on fractals. *Israel J. Math.* **149** (2005), 137–170.

[6] J. Levesley, C. Salp and S. Velani, On a problem of K. Mahler : Diophantine approximation and Cantor sets. *Math. Ann.* **338** (2007), 98–118.

[7] B. Weiss, Almost no point on a Cantor set are very well approximable. *Proc. R. Soc. London* **457** (2001), 949–952.

Martine Queffélec

Université Lille1 Sciences et Technologies, 59655 Villeneuve d'Ascq Cedex.

E-mail : `Martine.Queffelec@univ-lille1.fr`