REVUE FRANÇAISE D'INFORMATIQUE ET DE RECHERCHE OPÉRATIONNELLE. SÉRIE VERTE

PIERRE MALGRANGE

Critères de choix en avenir incertain : ébauche d'un algorithme d'optimisation

Revue française d'informatique et de recherche opérationnelle. Série verte, tome 4, nº V2 (1970), p. 65-76

<http://www.numdam.org/item?id=RO_1970__4_2_65_0>

R.I.R.O.
(4e année, V-2, 1970, p. 65-76)

CRITERES DE CHOIX EN AVENIR INCERTAIN EBAUCHE D'UN ALGORITHME D'OPTIMISATION

Pierre MALGRANGE (*)

Résumé. — *L'article a pour objet de donner des propriétés mathématiques des solutions optimales, dans un problème simple de décision en avenir incertain — états de la nature en nombre fini, décision continue — au regard de différents critères du choix — Espérance Mathématique, Maximin, Minimax Regret et Minimum de l'Espérance — et de montrer à la lumière de ces propriétés, comment on peut construire un algorithme général d'optimisation.*

INTRODUCTION

Dans le cadre d'études économiques sur la liaison entre court terme et moyen terme en avenir incertain, une opération intitulée « Optimix », tentative de traitement rationnel de l'incertain dans la préparation des décisions de politique économique, a été réalisée au début de 1968 par la Section de Recherche Opérationnelle de la Direction de la Prévision et le CEPREMAP.

Cette étude visait à déterminer une stratégie optimale de dépenses publiques sur les trois années du Ve Plan restant à couvrir (1968-69-70) avec comme objectif majeur une limitation du chômage sur la période, compte tenu d'un aléa (à deux valeurs chaque année) sur le commerce extérieur.

L'architecture du problème de décision peut être schématisée ainsi : étant donné :

1) un ensemble de décisions réalisables chaque année,

2) un ensemble d'aléas (éventuellement probabilisés),

3) un modèle décrivant l'état de l'économie chaque année résultant de la superposition d'une décision et d'un aléa,

4) une « fonction objectif » valuant les états possibles de l'économie,

(*) CEPREMAP.

5) un critère de choix en avenir incertain (espérance mathématique, maximin, minimax regret),

trouver la stratégie optimale au regard du critère de choix, compte tenu de la valuation des états de l'économie, c'est-à-dire trouver à chaque période l'ensemble des décisions les meilleures conditionnelles à la réalisation d'aléas.

Lors de l'opération Optimix, une *procédure de résolution systématique* a été employée : pour chaque séquence de décisions et d'aléas on a calculé le cheminement de l'économie correspondant, et donc la valuation de ce cheminement par la fonction objectif ; c'est à partir du tableau obtenu qu'a été déterminée la stratégie optimale vis-à-vis d'un critère de choix.

Mais avec une telle procédure le volume des calculs croît rapidement dès qu'on augmente le nombre de valeurs que peuvent prendre la décision et l'aléa chaque année, (avec m décisions réalisables et un aléa à n valeurs chaque année, avec T périodes, il faut résoudre $T \cdot (m \cdot n)^T$ fois le modèle...).

C'est pour tenter de lever, en ce qui concerne les décisions, ce goulot d'étranglement que l'on a été conduit à rechercher un algorithme de détermination par *tâtonnement* de la stratégie optimale, parmi une *gamme continue de décisions* réalisables ; à précision des résultats égale, le volume des calculs devient considérablement moindre que par la procédure systématique, et inversement à volume de calculs égal, la précision est nettement augmentée.

Avant de présenter l'algorithme on donnera dans une première partie des propriétés des solutions optimales au regard des critères de choix classiques, propriétés justifiant l'emploi de la méthode.

I. PROPRIETES DES SOLUTIONS OPTIMALES RELATIVES AUX CRITERES DE CHOIX CLASSIQUES

1.1. Généralités

On considère le problème décisionnel suivant :

— un ensemble $E = \{ e_1, \dots e_n \}$ fini d'états de la nature possibles,

— un sous-ensemble D de R^p caractérisant l'ensemble des décisions réalisables,

— une application f de $D \times E$ dans R appelée fonction objectif mesurant la conséquence — assimilée à un gain — de la prise d'une décision et de la réalisation d'un état de la nature.

Une décision d peut entraîner les conséquences $f(d, e_1), \dots f(d, e_n)$ suivant l'état qui se réalise ; on les notera pour plus de simplicité $f_1(d), \dots, f_n(d)$, et le vecteur $(f_i(d)) = F(d)$, « gain incertain d'une décision d ».

— un critère de choix défini par une application γ de R^n dans R, ramenant le « gain incertain » $(g_1, \dots g_n)$ à un seul chiffre.

Critères de choix considérés dans la suite :

— Espérance mathématique

$$\gamma_{Em}(g_1, \dots g_n) = \sum_{i=1}^{n} \rho_i g_i \qquad \left.\begin{array}{r}\text{avec } \rho_i \geqslant 0 \\ \Sigma\, \rho_i = 1\end{array}\right\} \text{donnés}$$

— Maximin

$$\gamma_{Mm}(g_1, \dots g_n) = \operatorname*{Min}_i \{ g_i \}$$

— Minimax regret

$$\gamma_{Mr}(g_1, \dots, g_n) = \operatorname*{Min}_i \{ g_i - \bar{g}_i \} \left(= - \operatorname*{Max}_i \{ \bar{g}_i - g_i \}\right)$$

$(\bar{g}_1, \dots, \bar{g}_n)$ vecteur de gains « idéal » donné

— Maximum de l'espérance minimum

$$\gamma_{Mem}(g_1, \dots, g_n) = \operatorname*{Min}_{(\rho_i) \in F_n} \left\{ \sum_{i=1}^{n} \rho_i g_i \right\} \text{avec } F_n \text{ sous ensemble compact du simplexe } T_n$$

— une décision d^* est alors dite optimale relativement au critère de choix dans l'ensemble D si

$\gamma_0 F(d^*) \geqslant \gamma_0 F(d)$ pour tout d de D.

On supposera dans la suite D compact et f continue en d quel que soit e_i

1.2. Solutions admissibles

On demande en général aux critères de choix — et ceux auxquels on s'intéresse le vérifient — d'être compatibles avec l'axiome dit de préférabilité absolue :

d_1 est absolument préférée à d_2 si $F(d_1) \geqslant F(d_2)$ (1)

Cette relation définit un préordre de préférence non total.

On dira qu'une décision réalisable d est admissible si elle est maximale pour ce préordre, c'est-à-dire si elle est telle qu'on ne peut pas accroître simultanément les gains dans toutes les situations d'états de la nature.

(1) Inégalité vectorielle.

On montre facilement sous nos hypothèses, que toute décision réalisable est dominée par une décision admissible (c'est un problème classique de maximation vectorielle sur un compact).

Tous les critères vérifiant l'axiome de préférabilité absolue donneront donc des solutions dans l'ensemble A des décisions admissibles ; on voit alors l'importance que peut revêtir la connaissance de cet ensemble.

Il est malheureusement bien souvent difficile d'exhiber A directement, c'est pourquoi on est amené à s'intéresser à une autre classe de solutions : l'ensemble des solutions optimales vis-à-vis de l'espérance mathématique ou solutions de Bayes.

1.3. Solutions de Bayes

Notations :

$$\psi(\rho, d) = \sum_{i=1}^{n} \rho_i f_i(d) = < \rho, F(d) > \text{ où } \sum_{i=1}^{n} \rho_i = 1 \text{ système de probabilités}$$

$$\varphi(\rho) \quad = \operatorname*{Max}_{d \in D} \psi(\rho, d)$$

$d(\rho)$ ensemble des décisions rendant $\psi(\rho, d)$ maximum, c'est-à-dire ensemble des décisions optimales pour le système de probabilité (ρ) ;

T_n ensemble de toutes les probabilisations possibles d'états.

On peut montrer facilement les propriétés suivantes, pour la plupart classiques :

a) $\varphi(\rho)$ est une fonction convexe et continue de ρ ; dans l'ensemble $d(\rho)$ il y a pour tout ρ des solutions admissibles.

b) Si l'ensemble D des décisions réalisables est convexe et la fonction f concave en d pour tout état de la nature e_i, alors toute décision admissible est une décision de Bayes.

c) Si f est strictement concave en d, $d(\rho)$ est réduit à un point pour tout ρ et la fonction $d(\rho)$ est continue sur T_n ; de plus $\varphi(\rho)$ est différentiable sur T_n et sa différentielle est le vecteur

$$F(d(\rho)) = (f, (d(\rho)), \ldots, f_n(d(\rho))).$$

1.4. Critères non probabilistes et solutions de Bayes

Les critères de choix habituellement utilisés dans l'incertain pur — c'est-à-dire dans des situations où l'on se refuse l'introduction de probabilités *a priori* — sont le Maximin et le Minimax Regret.

1.4.1. Maximin

On sait que dans le cas où la fonction f est concave en d, les solutions Maximin sont des solutions de Bayes par rapport à un système de probabilités dit le plus défavorable, c'est-à-dire rendant le plus petit possible le maximum espéré.

Plus précisément en appelant :

D^* l'ensemble des solutions Maximin, ou de solution de :

$$\mathrm{I}\left\{\begin{array}{l}\operatorname{Max} u \\ u = \operatorname*{Min}_{i} f_i(d) \\ d \in D\end{array}\right. \qquad \text{ou encore} \qquad \mathrm{I}'\left\{\begin{array}{l}\operatorname{Max} u \\ f_i(d) \geqslant u \\ d \in D\end{array}\right.$$

et T_n^* l'ensemble des solutions les plus défavorables, ou solutions de :

$$\mathrm{II}\left\{\begin{array}{l}\operatorname{Min} \varphi(\rho) \\ \rho \in T_n\end{array}\right.$$

avec $\varphi(\rho) = \max\limits_{d \in D} \psi(\rho, d)$

Alors si f est concave en d, D^* est contenu dans $d(\rho^*)$ pour tout ρ^* de T_n^*.

Si de surcroît f est strictement concave, $d(\rho^*)$ est réduit à un point qui est alors l'unique solution Maximin.

1.4.2. Minimax Regret ou Mr

Le « Regret » $R_i(d)$ attaché à l'état de la nature i est la différence entre la valeur $f_i(d)$ de la fonction pour cet état quand on prend la décision d et la valeur maximum $\bar{f}_i$ que peut prendre f_i quand d appartient à D :

$$\left\{\begin{array}{ll} & R_i(d) = \bar{f}_i - f_i(d) \\ \text{ou} & \bar{f}_i = \operatorname*{Max}_{d \in D} f_i(d)\end{array}\right.$$

Une décision Minimax Regret ou Mr est, par définition, une décision rendant minimum la plus grande valeur des regrets pour les différentes réalisations d'état.

Formellement une décision Mr rend minimum

$$R(d) = \operatorname{Max} \{ R_i(d) \}$$

Si l'on pose $g_i(d) = - R_i(d)$, une décision Mr rend maximum la fonction :

$$g(d) = \operatorname*{Min}_{i} g_i(d)$$

soit encore : *une décision Mr est une décision Maximin pour les fonctions de gain* $g_i(d) = f_i(d) - \bar{f}_i$

Or les fonctions g_i sont concaves si seulement les fonctions f_i le sont ; il en est de même de la continuité et de la stricte concavité.

La propriété du Maximin peut alors s'appliquer au Mr en substituant aux fonctions f_i les fonctions g_i, tout en conservant les hypothèses sur les f_i.

En particulier, si les f_i sont concaves, les décisions Mr sont à trouver parmi les décisions de Bayes (associées aux gains $g_i(d)$) vis-à-vis d'un système de probabilité rendant la fonction $\Gamma(\rho)$ minimum ;

où $$\Gamma(\rho) = \operatorname*{Max}_{d \in D} \sum_i \rho_i g_i(d)$$

Mais les décisions de Bayes associées aux gains $g_i(d)$ vis-à-vis d'un système de probabilités ρ sont identiques à celles associées aux gains $f_i(d)$ vis-à-vis du même système puisque :

$$\operatorname*{Max}_{d \in D} \Sigma \rho_i g_i(d) = \operatorname*{Max}_{d \in D} (\Sigma \rho_i (f_i(d) - \bar{f}_i)) = \operatorname*{Max}_{d \in D} (\Sigma \rho_i f_i(d)) - \Sigma \rho_i \bar{f}$$

Le dernier terme $\Sigma \rho_i \bar{f}_i$ étant une constante.

Cette dernière égalité peut encore s'écrire :

$$\Gamma(\rho) = \varphi(\rho) - \sum_i \rho_i \varphi(\delta_i) \qquad \text{avec} \qquad \delta_i \begin{cases} \rho_i = 1 & \\ \rho_j = 0 & \text{si} \quad j \neq i \end{cases}$$

Si on considère la surface Σ de R^n définie par

$$z = \bar{\varphi}(\rho_1, \ldots, \rho_{n-1}) = \varphi(\rho)$$
$$\text{où } \rho_i \geqslant 0$$
$$\sum_{i=1}^{n-1} \rho_i \leqslant 1$$

On voit que rendre minimum $\Gamma(\rho)$ revient à rechercher un plan d'appui à Σ parallèle au plan π engendré par les sommets $\varphi(\delta_i)$ de Σ.

Finalement, *les décisions Mr sont des décisions de Bayes vis-à-vis de systèmes de probabilités possédant une propriété très simple.*

1.5. Le Maximum de l'espérance Mathématique Minimum ou Mem

On suppose dans cette partie que le décideur a certaines idées — ou informations — *a priori* sur les probabilités des états, mais n'est pas apte à donner un chiffrement précis ; son information se traduit par un sous ensemble F de T_n, de probabilités possibles. F peut exprimer, par exemple, le fait que certains états sont jugés *a priori* plus probables que d'autres.

On supposera dans toute la suite que F est donné *a priori* et est compact.

On dira qu'une *décision est Mem* (maximum de l'espérance mathématique minimum) si elle rend, dans l'ensemble des décisions réalisables D, maximum la fonction $\theta(d)$ définie par

$$\theta(d) = \operatorname*{Min}_{p \in F} \left\{ \sum_{i=1}^{n} \rho_i f_i(d) \right\}$$

On constate que :

1) Si F se réduit à un point ρ_0 on retombe sur l'espérance mathématique.

2) A l'opposé si F est l'ensemble T_n tout entier — aucune information sur les probabilités — on retrouve le Maximin.

De même que pour le Maximin, en appelant :

D_F^* l'ensemble des solutions Mem, ou solutions de :

$$\mathrm{I} \begin{cases} \operatorname{Max} \theta(d) \\ \theta(d) = \operatorname*{Min}_{\rho \in F} \psi(\rho, d) \\ d \in D \end{cases}$$

et F^* l'ensemble des solutions les plus F — défavorables ou solutions de :

$$\mathrm{II} \begin{cases} \operatorname{Min} \varphi(\rho) \\ \varphi(\rho) = \operatorname*{Max}_{d \in D} \psi(\rho, d) \\ \rho \in F \end{cases}$$

Alors, si f est concave en d, D_F^* est inclu dans $d(\rho^*)$ pour tout ρ^* de F^*. La preuve de cette propriété s'établit très simplement.

REMARQUE

Si f est strictement concave en d, alors le problème I a une solution unique $d^* = d(\rho^*)$, où ρ^* est une solution quelconque du problème II.

II. UN ALGORITHME D'OPTIMISATION

On suppose dans cette partie que D ensemble des décisions réalisables est convexe *compact*, et que f, est une fonction strictement concave de d et différentiable sur D.

2.1. Résumé des propriétés des solutions optimales

— L'ensemble des solutions admissibles coïncide avec l'ensemble des solutions de Bayes.

— Pour tout ρ existe une solution de Bayes $d(\rho)$ unique, et la fonction $d(\rho)$ est continue.

— La fonction $\varphi(\rho)$, maximum espéré, est convexe et différentiable et sa différentielle est $F(d(\rho)) = (f_1(d(\rho)), ..., f_n(d(\rho)))$.

— La solution Maximin d^*_{Mm} est unique et $d^*_{\mathrm{Mm}} = d(\rho_{\mathrm{Mm}})$où ρ^{Mm} minime la fonction $\varphi(\rho)$ dans T_n.

— La solution Minimax Regret d^*_{Mr} est unique et $d^*_{\mathrm{Mr}} = d(\rho_{\mathrm{Mr}})$ où ρ_{Mr} minime la fonction $\varphi(\rho) - \sum_{i=1}^{n} \rho_i \varphi(\delta_i)$ dans T_n.

— La solution Mem d^*_{Mem} est unique et $d^*_{\mathrm{Mem}} = d(\rho_{\mathrm{Mem}})$ où ρ_{Mem} minime la fonction $\varphi(\rho)$ dans F.

2.2. Ebauche de l'algorithme

2.2.1. Calcul des solutions de Bayes

Le problème est celui, classique, de maximation d'une fonction $\psi(\rho, d)$ concave en d sur le convexe compact D.

Diverses méthodes d'optimisation peuvent être utilisées ; dans l'algorithme programmé sur le schéma « Optimix », la linéarité des contraintes a fait préférer la procédure du Gradient Réduit, généralisation de la procédure du simplexe au cas où la fonction à optimiser n'est pas linéaire.

On appellera $B(\rho)$ la procédure qui à un système de probabilité ρ associe $d(\rho)$, $\varphi(\rho)$ et les $f_i(d(\rho))$.

2.2.2. Solutions optimales vis-à-vis des autres critères

Pour chacun des trois critères Mm, Mr et Mem, trouver la décision optimale revient à minimiser une fonction convexe ($\varphi(\rho)$ pour le Mm et le Mem, $\varphi(\rho) - \Sigma\rho_i\varphi(\delta_i)$ pour le Mr) sur un ensemble convexe compact (se traduisant par des contraintes linéaires pour le Mm et le Mr).

On peut alors concevoir une méthode de Gradient emboîtée sur la précédente, d'autant plus que la fonction φ est différentiable et ses dérivées partielles connues en chaque point calculé, ce sont les valeurs $f_t(d(\rho))$.

En d'autres mots on chemine par une procédure de Gradient G, de solution de Bayes en solutions de Bayes — ces dernières obtenues par la procédure $B(\rho)$ — jusqu'à la solution optimale ; chaque pas de la procédure G utilise la procédure $B(\rho)$.

Notons $G[T, \bar{f}_1, ..., \bar{f}_n]$ le gradient réduit qui minime la fonction $\varphi(\rho) - \Sigma\rho_i\bar{f}_i$ sur le sous-ensemble T de T_n — T étant supposé se traduire par des contraintes linéaires.

On voit alors que les solutions optimales par rapport à tous les critères étudiés sont caractérisés par les paramètres T et $(\bar{f}_1, ... \bar{f}_n)$ de la procédure G.

En effet les solutions de Bayes sont données par $B(\rho)$ que l'on peut écrire $G[\{ \rho \} ; 0, ..., 0]$

les solutions Maximim par $G[T_n ; 0, ..., 0]$

les solutions Minimax Regret par $G[T_n ; G[\{ \delta_i \} ; 0, ..., 0], ..., G[\{ \delta_n \} ; 0, ..., 0]]$

puisque $\varphi(\delta_i)$ est donnée par $B(\delta_i)$ soit encore $G[\{ \delta_i \} ; 0, ..., 0]$

enfin les solutions Mem sont données par $G[F ; 0, ..., 0]$, dans le cas où F, ensemble des probabilisations possibles, se traduit par des contraintes linéaires sur les probabilités.

III. GENERALISATION A LA DYNAMIQUE

3.1. Généralités

On considère maintenant le problème décisionnel suivant :

Un système évoluant avec le temps et fonctionnant sur H période est affecté à chaque période par la réalisation d'un état de la nature e_t et peut être contrôlé par une décision d_t (d_t peut varier dans un certain sous-ensemble D_t de R_p dépendant éventuellement de la position du système).

A une séquence de décision et à une succession de réalisation d'états de la nature, qu'on appellera chemin d'états, correspond une trajectoire du système, valuée par une fonction objectif, assimilée à un gain.

On supposera que l'ensemble des états de la nature est fini à chaque période connue *a priori* et la réalisation d'état est observable.

On peut définir alors l'arbre des états qui résume toutes les successions de réalisations d'états de la nature possibles : un sommet de l'arbre est un début de période et une branche, une réalisation possible d'un état pendant cette période. Selon nos hypothèses, cet arbre est fini et connu *a priori.*

On appellera *stratégie* — ou plan conditionnel — un vecteur

$$s = (d_0 ; d_1^1, ..., d_1^n ; d_2^{11}, ..., d_2^{1p_1} ; d_2^{21}, ..., d_2^{2p_2} ; d_2^{n1}, ... ; d_{H-1}^{11\cdots}, ... d_{H-1}^{np\cdots}),$$

dont les éléments représentent des décisions que l'on prend à chaque période, conditionnelles au chemin antérieur des états :

— au départ (fin de la période 0) on prend la décision d_0 ;

— en fin de première période, la décision d_1^i si l'état de la nature e_{i_1} s'est réalisé pendant la première période ;

— en fin de seconde période, d_2^{ij}, si l'état e_{i_1} en première période, puis l'état e_{j_2} en seconde période se sont réalisés ;

— ainsi de suite jusqu'aux décisions prises à la fin de la période H — 1.

On remarque que définir une stratégie revient à effectuer à chaque sommet de l'arbre une décision. On remarque également qu'avec une telle définition d'une stratégie on peut tenir compte effectivement de toute l'information dont on dispose au moment où on prend la décision.

L'ensemble S des stratégies s telle que toutes les décisions de s soient réalisables (c'est-à-dire appartiennent au domaine de décision) sera appelé ensemble des stratégies réalisables.

Soit s_0 une stratégie réalisable ; à chaque chemin d'états C_i, on peut associer la séquence de décisions de s_0, soit s_0^i lui correspondant — c'est-à-dire la série temporelle des décisions qu'aura pris effectivement le décideur si c'est le chemin d'états C_i qui s'est réalisé — donc une trajectoire du système soit finalement une valeur de la fonction de valuation.

Cette valeur sera notée $f(C_i, s_0)$ ou plus simplement encore $f_i(s_0)$ (l'indice i de chemin d'états allant de 1 à N).

On peut donc définir une application de S dans R^N définie par $F(s_0) = (f_1(s_0), ..., f_N(s_0))$ qui représente l'ensemble des valeurs prises par la fonction de valuation sur les divers chemins d'états, pour la stratégie s_0.

3.2. Adaptation de l'algorithme

A partir de là on est ramené au problème précédent en remplaçant « état de la nature » par « chemin d'états de la nature » et « décision » par « stratégie ».

Cependant l'algorithme se complique légèrement du fait que l'hypothèse de stricte concavité n'a plus de sens ici, en effet les f_i ne dépendent explicitement que des séquences de décisions de la stratégie associées aux chemins d'états C_i.

On dira cependant que f_i est strictement concave si, comme dans la première partie la fonction objectif f est strictement concave par rapport à la séquence de décisions, quel que soit le chemin d'états C_i.

On introduit alors l'ensemble T'_N défini par l'ensemble des systèmes de probabilité ρ tels que $\psi(\rho, s)$ — espérance de gain pour le système de probabilités ρ si on décide de la stratégie s — dépende explicitement de tous les éléments de la stratégie, autrement dit, tels que ces derniers soient tous virtuellement réalisables, qu'aucun ne corresponde à des chemins d'état de probabilité nulle.

On voit alors facilement que, dans le cas de concavité stricte, les solutions de Bayes sont uniques, si ρ appartient à T'_N et la fonction $s(\rho)$ est continue sur T'_N ; de même $\varphi(\rho)$ est différentiable sur T'_N et sa différentielle est le vecteur $(f_1(s(\rho)), ..., f_N(s(\rho)))$.

L'idée est alors d'utiliser l'algorithme G non plus sur T_N (cas Maximin et Minimax Regret) ou sur F (cas Mem) — on n'est plus assuré de la différentiabilité de $\varphi(\rho)$ hors de T'_N — mais sur un ensemble convexe compact T_N^ϵ « voisin » de T_N et contenu dans T'_N($F \cap T_N^\epsilon$ dans le cas Mem)

— ceci est réalisable puisque la fermeture de T'_N est T_N — qui se traduise par l'adjonction de contraintes linéaires sur les probabilités.

Le lecteur vérifiera aisément en effet que si la correspondance qui à ε associe T_N^{ϵ} est continue, alors en faisant tendre ε vers 0, à partir d'un certain moment soit on obtiendra la solution optimale (cas où elle est dans T'_N), soit on tendra vers une solution optimale (correspondant à certaines probabilités nulles).

IV. POINT DE DEPART APPROCHE DE LA PROCEDURE

On ne parlera pas ici d'un système de probabilité approché pour l'enclenchement de la procédure G ; on n'est pas arrivé malheureusement à une solution satisfaisante sur ce point.

Par contre, on peut facilement trouver, pour la procédure $B(\rho)$, une première approximation de la décision — ou stratégie — de Bayes pour le système de probabilités ρ à partir du concept de « situation certaine approximativement équivalente ».

4.1. Cas statique

On peut montrer que si la fonction objectif est une fonction quadratique de la décision et de l'état de la nature alors la solution de Bayes pour un système de probabilités ρ est la même que la solution du problème certain consistant à maximer la fonction objectif sachant que l'état de la nature est l'espérance par rapport à ρ des états. Il n'est donc pas besoin, dans le cas quadratique, de considérer explicitement l'incertitude du futur, mais seulement l'avenir probable moyen.

Dans le cas général, Malinvaud [5] a montré que « au voisinage de la certitude les variations affectant la décision optimale sont du second ordre par rapport à celles affectant l'importance des aléas ».

Pour cela, il associe à la situation incertaine une situation qui « peut être qualifiée de certaine en ce sens que ni les résultats ni la valeur de la fonction objectif n'y dépendent de l'état de la nature ». Il introduit alors un indice ε qui mesure l'écart entre cette situation certaine et la situation incertaine ; ε caractérise ainsi l'importance de l'aléa. La décision optimale dépend alors de cet indice. Des hypothèses de différentiabilité sur les relations liant les résultats aux instruments et sur la fonction objectif permettent d'affirmer l'existence de $\frac{d}{d\varepsilon}(d^* \quad (\varepsilon))$ et de montrer que cette dérivée est nulle au point $\varepsilon = 0$. Pour obtenir la solution approchée, il suffit alors de faire fonctionner la procédure B en avenir certain avec $E_\rho(a)$ comme état de la nature.

4.2. Cas dynamique

Theil [7] a montré que le théorème d'équivalence pouvait être généralisé à la dynamique : si le modèle de fonctionnement du système est linéaire et la fonction objectif quadratique, la décision optimale de première période pour le système de probabilités ρ des chemins d'état est la même que celle obtenue en faisant fonctionner le modèle en avenir certain avec le chemin d'état moyen $E\rho(C_i)$.

Par ailleurs Malinvaud a annoncé une publication prochaine d'une généralisation de la démonstration de l'existence d'une situation certaine approximativement équivalente dans les problèmes faisant intervenir les petits aléas.

La solution approchée peut être alors obtenue en utilisant la procédure B en avenir certain avec le chemin d'état $E\rho(C_i)$ ce qui fournit la décision approchée de première période $\tilde{d}_0$; puis de calculer les p décisions approchées de seconde période $\tilde{d}_{1i}$ en optimisant p fois par la procédure B en avenir certain sur $H - 1$ périodes avec comme situations de départ les situations engendrées par d_0 et les p états de la nature de première période — ceci revient à utiliser B sur H périodes en prenant $\{ \tilde{d}_0 \}$ comme ensemble des décisions réalisables pour la première période et les p chemins d'états « a_i puis le chemin d'états moyen pour les $H - 1$ périodes ultérieures » — ainsi de suite jusqu'à obtenir une stratégie s approchée.

Les théorèmes de Theil et de Malinvaud permettent d'affirmer que s sera d'autant plus proche de $s(\rho)$ que la fonction objectif, résolue en fonction des décisions et états de la nature, sera proche du quadratique et que les états de la nature sont peu dispersés.

BIBLIOGRAPHIE

[1] K. G. Arrow, L. Hurwicz et H. Usawa, Studies in linear and non linear programming. Stanford Univ. Press 1958.

[2] F. Bessière, Critère de Regret Minimax et probabilités subjectives.

[3] C. Fourgeaud, B. Lenclud, Ph. Sentis, Critère de choix en avenir partiellement incertain. *Revue Française d'Informatique et de Recherche Opérationnelle*, n° 14-1968, p. 9-20.

[4] P. Huard et R. Faure, Résolution de programmes mathématiques par la méthode du Gradient Réduit.

[5] E. Malinvaud, Décision en face de l'aléatoire et situation certaine approximativement équivalente.

[6] P. Massé, Choix des investissements. Dunod Paris (2 éd.) 1964.

[7] M. H. Theil, Note on certainty equivalence in dynamic planning.

[8] A. Wald, Statistical decision functions. J. Wiley 1950.