

JOSE MILLAN MORERA DE LA VALL

**Dimensionnement des carrousels de
livraison de bagages**

Revue française d'informatique et de recherche opérationnelle. Série verte, tome 4, n° V3 (1970), p. 45-52

http://www.numdam.org/item?id=RO_1970__4_3_45_0

© AFCET, 1970, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Revue française d'informatique et de recherche opérationnelle. Série verte » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

DIMENSIONNEMENT DES CARROUSELS DE LIVRAISON DE BAGAGES

par Jose Millan MORERA DE LA VALL (1)

Résumé. — *La dimension optimale d'un tapis de livraison de bagages à l'arrivée des avions, est un compromis entre le coût et la surface liés à une grande installation et les attentes résultant d'un système trop petit. L'étude mathématique du problème conduit à une application de la loi hypergéométrique, et à une simulation d'hypothèses sur les lois d'arrivées, programmée sur un terminal d'ordinateur.*

INTRODUCTION

L'utilisation d'avions grands porteurs du type B747 et AIRBUS oblige à reconsidérer certains matériels et installations d'une Compagnie aérienne. Dans le cas présent, on a étudié le dimensionnement des tapis roulants qui livrent les bagages des passagers à l'arrivée.

HYPOTHESES ET DONNEES

Les passagers sont supposés arriver au carrousel suivant une fonction du temps, non aléatoire, bien connue : $p(t)$ = nombre de passagers arrivés au carrousel entre la coupure des moteurs, origine des temps, et l'instant t . Remarquons que les services de la Compagnie peuvent très peu modifier l'actuelle loi $p(t)$.

Par contre, on peut légèrement jouer sur $b(t)$ = nombre de bagages déchargés sur le tapis jusqu'à l'instant t , pour diminuer la file d'attente des passagers, qui est liée à $b(t)$ et $p(t)$ comme on le verra par la suite.

(1) Capitaine d'Etat Major de l'Armée espagnole Elève du CIRO. Stagiaire du Département de Recherche Opérationnelle d'AIR FRANCE.

Les autres données du problème sont :

N : nombre de passagers (= nombre de bagages groupés par passager),

t_0 : temps nécessaire au tapis pour effectuer un tour complet,

m : nombre de passagers (et de bagages) au mètre linéaire du carrousel.

RESOLUTION

La longueur du carrousel doit permettre d'absorber, à chaque instant la plus grande quantité : bagages ou passagers en attente dans le carrousel. Pour cela, on calcule les moyennes et les variances des files d'attente respectives, à chaque instant, qui donnent la base du dimensionnement du tapis.

1. DEFINITION DE LA VARIABLE ALEATOIRE $X(t)$

C'est le nombre de passagers qui, étant arrivés au carrousel jusqu'à l'instant t , ont aperçu leurs valises sur le tapis.

1.1. Domaine de définition

— Les valeurs entières de $X(t)$ ne peuvent pas être supérieures au nombre de passagers, $p(t)$, ou de bagages, $b(t)$, arrivés jusqu'à l'instant t .

— Il est aussi évident que si, à l'instant t , le nombre de passagers arrivés au carrousel $p(t)$ est supérieur au nombre de valises encore non déchargées sur le tapis $N - b(t)$, la plus petite valeur possible de $X(t)$ est la différence entre ces deux nombres.

Donc, le domaine de la v.a. $X(t)$ est constitué par les valeurs entières comprises entre :

$$\max [0, p(t) + b(t) - N] \quad \text{et} \quad \min [p(t), b(t)]$$

1.2. Probabilité que $X(t) = x$

C'est celle de l'événement : « A l'instant t , des $b(t)$ valises arrivées, x ont leurs propriétaires présents devant le carrousel et $b(t) - x$ ne les ont pas ».

Calculons d'abord la probabilité pour que cet événement soit réalisé dans l'ordre : « les x premières valises ont leurs propriétaires présents et les $b(t) - x$ suivantes ne sont pas « identifiées ».

La probabilité, P , d'un tel événement est fournie par l'axiome des probabilités composées :

$$\text{Prob. } \{ 1^{\text{re}} \text{ valise est identifiée } \} = \frac{p(t)}{N}$$

$$\text{Prob. } \{ 2^{\text{e}} \text{ valise est identifiée / sachant que la } 1^{\text{re}} \text{ aussi} \} = \frac{p(t) - 1}{N - 1}$$

.....
 Prob. $\{x^e \text{ valise [est identifiée] sachant que les } (x - 1)^e \text{ aussi}\} =$

$$\frac{p(t) - (x - 1)}{N - (x - 1)}$$

Prob. $\{(x + 1)^e \text{ valise n'est pas identifiée /sachant que les } x^e \text{ l'ont été}\} =$

$$\frac{N - p(t)}{N - x}$$

.....
 Prob. $\{b(t)^e \text{ valise n'est pas identifiée /sachant que les } b(t) - 1^e \text{ sont classées}\} =$

$$\frac{N - p(t) - (b(t) - x - 1)}{N - (b(t) - 1)}$$

Donc :

$$P = \frac{p(t)[p(t) - 1] \dots [p(t) - x + 1] \cdot [N - p(t)] \cdot [N - p(t)x + 1] \dots [N - p(t) - b(t) + 1]}{N(N - 1) \dots (N - x + 1)(N - x) \dots [N - b(t) + 1]}$$

$$P = \frac{\frac{p(t)!}{[p(t) - x]!} \cdot \frac{[N - p(t)!]}{[N - p(t) - b(t) + x]!}}{N! \cdot [N - b(t)]!}$$

Or, le nombre d'ordres équiprobables correspondant à la répartition $(x, b(t) - x)$ est égal au nombre de permutations des $b(t)$ valises, sans considérer les ordres relatifs des x et des $b(t) - x$, c'est-à-dire

$$\frac{b(t)!}{x!(b(t) - x)!}$$

D'où

$$\text{Prob. } \{X(t) = x\} = \frac{P \cdot b(t)!}{x!(b(t) - x)!}$$

$$\text{Prob. } \{X(t) = x\} = \frac{C_{p(t)}^x \cdot C_{N-p(t)}^{b(t)-x}}{C_N^{b(t)}}$$

Les résultats de 1.1 et de 1.2 montrent que $X(t)$ suit une loi hypergéométrique de paramètres $H\left(N, b(t), \frac{p(t)}{N}\right)$. Ou bien $H\left(N, p(t), \frac{b(t)}{N}\right)$ puisque passagers et valises jouent en effet un rôle symétrique.

Maintenant il semble évident que les valeurs de $X(t)$ correspondent à un tirage exhaustif d'un échantillon de $b(t)$ bagages dans une urne de

N bagages avec probabilité $\frac{p(t)}{N}$, pour chaque bagage, d'avoir son propriétaire présent.

$X(t)$ étant une loi hypergéométrique, rappelons que sa moyenne est : $\frac{p(t) \cdot b(t)}{N}$, d'où la moyenne des passagers $a_p(t)$, étant devant le carrousel sans avoir aperçu leurs valises à l'instant t :

$$a_p(t) = p(t) - \frac{p(t) b(t)}{N} = p(t) \left[1 - \frac{b(t)}{N} \right]$$

De façon analogue, on trouve que la moyenne des bagages non « identifiés » est :

$$a_b(t) = b(t) \left[1 - \frac{p(t)}{N} \right]$$

On sait que la variance de $X(t)$ est

$$V(X(t)) = \frac{b(t) \cdot p(t) [N - b(t)] \cdot [N - p(t)]}{N^2 (N - 1)}$$

que l'on peut mettre sous la forme :

$$V(X(t)) = \frac{1}{N - 1} \cdot a_p(t) \cdot a_b(t)$$

2. INFLUENCE DE LA TRANSLATION DU TAPIS

Quand un passager aperçoit son bagage sur le carrousel, il doit attendre que les valises arrivent jusqu'à lui pour les retirer. Ce temps d'attente dépend de t_0 : temps nécessaire au carrousel pour effectuer un tour complet.

Considérons maintenant la v.a. $R(t) =$ « Nombre de bagages retirés avant t » :

— Il est évident que les bagages aperçus par leurs propriétaires avant $t - t_0$ (puisque jusqu'à t , le tapis a fait au moins un tour) auront été retirés avant t . Leur nombre est $X(t - t_0)$.

— Pour calculer le nombre des bagages retirés dans l'intervalle $(t - t_0, t)$, on peut admettre que les « identifications » des bagages arrivent, dans cet intervalle, de façon uniforme. Ainsi, leur nombre pour tout

$t', t - t_0 \leq t' \leq t$ est : $\frac{1}{t_0} [X(t) - X(t - t_0)]$.

Les voyageurs étant répartis au hasard autour du carrousel, un bagage « identifié à l'instant t' » a une probabilité $\frac{t-t'}{t_0}$ d'avoir été enlevé à l'instant t . Donc, en moyenne, le nombre de bagages retirés entre $t - t_0$ et t est :

$$\frac{1}{t_0} [X(t) - X(t - t_0)] \int_{t-t_0}^t \frac{t-t'}{t_0} dt' = \frac{1}{2} [X(t) - X(t - t_0)]$$

On a donc :

$$R(t) = X(t - t_0) + \frac{1}{2} [X(t) - X(t - t_0)] \text{ ou bien}$$

$$R(t) = \frac{1}{2} [X(t) + X(t - t_0)]$$

3. CALCUL DES CARACTERISTIQUES DES FILES D'ATTENTE

3.1. Moyennes : $FB(t)$ et $FP(t)$

soit

$f_b(t)$ = Nombre de bagages qui restera autour du carrousel à l'instant t

$f_p(t)$ = Nombre de passagers qui restera sur le carrousel à l'instant t .

$$f_b(t) = b(t) - R(t) = b(t) - \frac{1}{2} [X(t) + X(t - t_0)]$$

$$f_p(t) = p(t) - R(t) = p(t) - \frac{1}{2} [X(t) + X(t - t_0)]$$

donc

$$\begin{aligned} FB(t) &= b(t) - \frac{1}{2} [EX(t) + EX(t - t_0)] \\ &= b(t) - \frac{1}{2} \frac{p(t) \cdot b(t) + p(t - t_0) \cdot b(t - t_0)}{N} \end{aligned}$$

et

$$FP(t) = p(t) - \frac{1}{2} \frac{p(t) \cdot b(t) + p(t - t_0) \cdot b(t - t_0)}{N}$$

3.2. Variances $V(t)$

$V(t)$, la variance est la même pour les deux files d'attente :

$$V(t) = \text{Var } f_b(t) = \text{Var } [b(t) - R(t)] = \text{Var } f_p(t) = \text{Var } [p(t) - R(t)] = \frac{\text{Var } R(t)}{\text{Var } R(t)}$$

C'est-à-dire

$$V(t) = \text{Var } R(t) = \frac{1}{4} \text{Var} [X(t) + X(t - t_0)]$$

On a pris comme $V(t)$ la limite connue supérieure de la variance de la somme de deux v.a.

$$V(t) = \frac{1}{4} [\text{Var } X(t) + \text{Var } X(t - t_0) + 2\sqrt{\text{Var } X(t) \cdot \text{Var } X(t - t_0)}]$$

On a pu constater sur tous les exemples traités que l'écart-type restait toujours inférieur à 5.

4. CALCUL SUR L'ORDINATEUR

Sur le terminal RAX d'Air France on a mis au point un programme qui donne les valeurs de $FB(t)$, $FP(t)$ et leur variance, à partir de N , t_0 et les points caractéristiques de $p(t)$ et de $b(t)$; entre deux de ces points le programme fait une interpolation linéaire pour construire les fonctions $p(t)$ et $b(t)$, le temps étant segmenté en 0,5 minute.

Le temps d'unité centrale employé varie entre 1 et 0,5 seconde, suivant les allures de $b(t)$ et $p(t)$. Cette rapidité de calcul a permis d'étudier la sensibilité du système pour différentes valeurs de t_0 et de la fonction $b(t)$, ce qui constitue, en quelque sorte, une simulation qui guide les responsables dans le dimensionnement des carrousels et dans les délais souhaitables pour décharger les bagages des avions.

5. EXEMPLES

On a construit le graphique à partir des sorties de l'ordinateur, dont l'interprétation est :

- colonne 1. T : temps exprimé en centièmes
- — 2. BT : valeurs de la fonction $b(t)$
- — 3 PT : — — — $p(t)$
- — 4 FB : — — — moyenne de la file d'attente
des valises
- — 5 FP : — — — — — — —
des passagers
- — 6 V : variance de ces files d'attente.

Les données sont pour les deux cas :

- $N = 300$, $t_0 = 2,5$ minutes (temps d'un tour du tapis),
- $m = 3$ (nombre de bagages et passagers au mètre linéaire),
- $p(t)$: arrivée uniforme des voyageurs entre 4 et 24 minutes.

La fonction pointillée $b^1(t)$ représente la loi de décharge sur le tapis des bagages, dans le premier exemple.

Dans ce cas, L est donnée par la file d'attente des bagages.

Sa valeur est :
$$L = \frac{109 + 2\sqrt{16}}{3} = \frac{117}{3} = 39 \text{ mètres.}$$

Cependant, cette hypothèse de travail doit être rejetée. En effet, on observe qu'autour de la minute 12,5, le carrousel est saturé et n'admet pas le nombre de bagages, au rythme prévu.

Dans le deuxième cas, L est donnée par la file d'attente des passagers $L = \frac{1}{3} (97 + 2\sqrt{16}) = 35$ m. Dans le graphique on a représenté en trait continu $f_b^2(t)$ pour montrer que le système est acceptable.

A partir de ces sorties, on peut aisément étudier les distributions des moyennes des files d'attente des passagers.

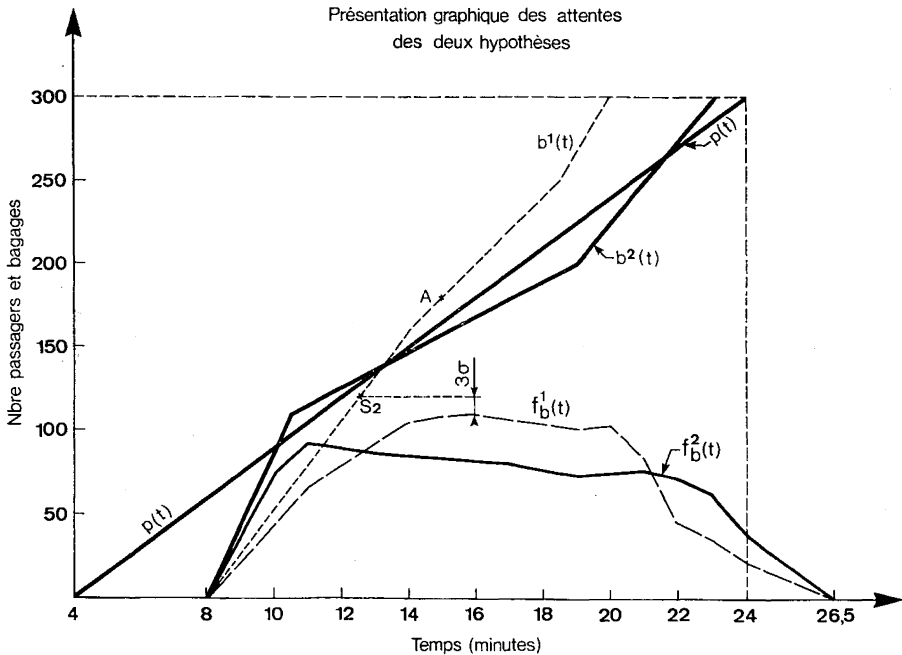


Figure I

RÉSULTATS DE DEUX SIMULATIONS

Hypothèse 1 : $b^1(t)$

T	End of compilation main					V
	BT	PT	FB	FP		
40	0	0	0	0	0	
45	0	7	0	7	0	
50	0	14	0	14	0	
55	0	21	0	21	0	
60	0	8	0	28	0	
65	0	35	0	35	0	
70	0	42	0	42	0	
75	0	49	0	49	0	
80	0	60	0	60	0	
85	13	67	12	66	0	
90	26	74	23	71	1	
95	19	81	34	76	1	
100	52	88	45	81	2	
105	65	95	55	85	2	
110	78	102	64	88	6	
115	91	109	72	90	8	
120	104	116	79	91	10	
125	117	123	86	92	12	
130	130	130	92	92	14	
135	143	137	98	92	15	
140	160	150	104	94	15	
145	170	157	106	93	16	
150	180	164	108	92	17	
155	190	171	108	89	17	
160	200	178	109	87	16	
165	210	185	106	81	16	
170	220	192	106	78	15	
175	230	199	105	74	14	
180	240	206	104	70	13	
185	250	218	101	69	11	
190	266	225	102	61	9	
195	282	232	103	53	6	
200	300	240	104	44	3	
205	300	247	95	42	2	
210	300	254	83	37	2	
215	300	261	70	31	1	
220	300	268	57	25	0	
225	300	275	43	18	0	
230	300	282	36	18	0	
235	300	289	29	18	0	
240	300	300	20	20	0	
245	300	300	16	16	0	
250	300	300	13	13	0	
255	300	300	9	9	0	
260	300	300	6	6	0	
265	300	300	0	0	0	

STOP 00000

M. 0070 DONE 3.3.S. + 0.6.S

Hypothèse 2 : $b^2(t)$

T	End of compilation main					V
	BT	PT	FB	FP		
40	0	0	0	0	0	
45	0	7	0	7	0	
50	0	14	0	14	0	
55	0	21	0	21	0	
60	0	28	0	28	0	
65	0	35	0	35	0	
70	0	42	0	42	0	
75	0	29	0	49	0	
80	0	60	0	60	0	
85	22	68	20	66	0	
90	44	76	39	71	1	
95	66	84	57	75	2	
100	88	92	75	79	3	
105	110	100	92	82	3	
110	115	107	93	85	7	
115	120	114	92	86	11	
120	125	121	91	87	13	
125	130	128	90	88	15	
130	135	135	87	87	16	
135	140	142	87	89	16	
140	145	149	87	91	17	
145	150	156	86	92	17	
150	155	163	86	94	18	
155	160	170	85	95	18	
160	165	177	84	96	18	
165	170	184	82	96	17	
170	175	191	81	97	17	
175	180	198	79	97	16	
180	185	205	77	97	16	
185	190	212	75	97	15	
190	200	225	73	98	14	
195	212	232	75	95	13	
200	224	239	76	91	12	
205	236	246	77	87	10	
210	248	253	77	82	8	
215	260	260	73	73	7	
220	272	267	70	65	5	
225	284	274	66	56	4	
230	300	285	61	46	1	
235	300	292	50	42	1	
240	300	300	38	38	1	
245	300	300	29	29	0	
250	300	300	21	21	0	
255	300	300	8	8	0	
260	300	300	4	4	0	
265	300	300	0	0	0	

STOP 00000

M. 0070 DONE 3.1.S. + 0.6.S