

A. HENRY-LABORDÈRE

**Résolution d'un programme quadratique en variantes bivalentes par décomposition application au placement de commutateurs dans un réseau**

*RAIRO. Recherche opérationnelle*, tome 13, n° 1 (1979), p. 23-35

[http://www.numdam.org/item?id=RO\\_1979\\_\\_13\\_1\\_23\\_0](http://www.numdam.org/item?id=RO_1979__13_1_23_0)

© AFCET, 1979, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « RAIRO. Recherche opérationnelle » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

**RÉSOLUTION D'UN PROGRAMME QUADRATIQUE  
EN VARIANTES BIVALENTES  
PAR DÉCOMPOSITION  
APPLICATION AU PLACEMENT DE COMMUTATEURS  
DANS UN RÉSEAU**

par A. HENRY-LABORDÈRE <sup>(1)</sup>

Résumé. — Nous proposons un algorithme de décomposition pour résoudre le problème quadratique en variables bivalentes (0 ou 1)

$$\begin{cases} z = \text{Min} \{ c'x + x'Qx + f'y \} \\ Bx + Dy \geq b \end{cases}$$

où  $x$  et  $y$  sont des vecteurs à composantes entières (0 ou 1).

$x'Qx$  est une forme quadratique générale (positive ou négative semi-définie, ou non définie).

Les contraintes sont linéaires en  $x$  et  $y$ .

Ce problème a pour origine un problème de très grande taille de placement de commutateurs dans un réseau téléphonique, que nous présentons dans la section (I). Nous présentons ensuite (II) la méthode de décomposition sur laquelle est basée l'algorithme (III) que nous testons sur un exemple numérique simple (IV).

**I. DESCRIPTION ET FORMALISATION DU PROBLÈME**

Le réseau à optimiser comporte  $N = 103$  installations terminales ( $A_i$ )  $i = 1, N$ , disséminées dans toute la France, qui doivent être regroupées en régions ( $R_i$ )  $i = 1, n$ ; dans chaque région  $i$  il faut choisir un commutateur  $T_i$  situé à l'emplacement d'une installation terminale de la région; chaque terminal appartenant à la région  $R_i$  sera relié à  $T_i$ .

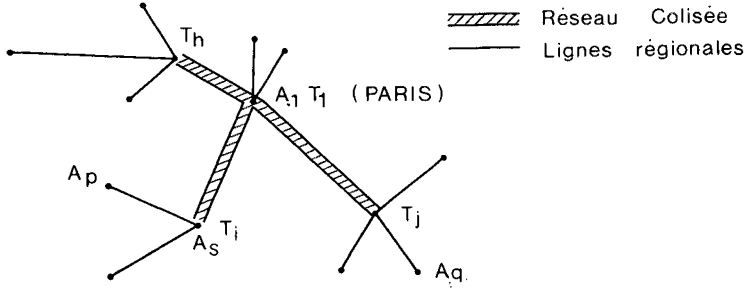
Il se décompose donc en deux sous-réseaux point à point :

- . un réseau aval réalisé par lignes louées aux P. T. T.,
- . un réseau amont reliant les  $n$  commutateurs  $T_i$  à Paris ( $T_i$ ), utilisant le réseau commuté Colisée des P. T. T., et donc taxé à la communication.

Nous présentons ci-dessous un modèle permettant de mieux définir le problème et d'en mesurer la complexité; en effet les problèmes de ce type peuvent,

---

<sup>(1)</sup> S.I.T.A., 112, avenue Charles-de-Gaulle, 92522 Neuilly.



comme on l'a souvent remarqué, se ramener à un problème de programmation en nombre entiers.

Les données du problème sont :

$c_{ij}$  : coût des lignes louées allant de  $A_j$  vers le commutateur placé en  $A_i$  en nombre suffisant pour écouler le trafic  $A_j$ ; il varie linéairement par tranches en fonction de la distance  $A_i A_j$ .

$t_{ij}$  : trafic entre  $A_i$  et  $A_j$  (émis et/ou reçu) : on a  $t_{ij} = 0$ .

$k_i$  : coût de la liaison  $A_i A_1$  ( $A_1$  nœud central du réseau Colisée placé à Paris) par unité de trafic : tarif Colisée linéaire par tranche en fonction de la distance  $A_i A_1$ .

$f$  : coût supposé fixe d'un commutateur (il dépend en fait linéairement du nombre de lignes entrantes et sortantes, mais le nombre de lignes total sera globalement invariant quelle que soit la configuration).

Le réseau est décrit : par une matrice  $(x_{ij})$  ( $x_{ij} = 1$  ou  $0$  suivant que  $A_j$  est relié ou non à  $A_i$  où est placé un commutateur) et un vecteur  $(y_i)$  ( $y_i = 1$  si  $\sum_{j=1}^N x_{ij} > 0$  c'est-à-dire si un commutateur est placé en  $A_i$ ,  $y_i = 0$  dans le cas contraire).

Les contraintes sont :

$$\forall j \quad \sum_{i=1, N} x_{ij} = 1 \quad (1)$$

car chaque installation terminale n'est reliée qu'à un seul commutateur.

$$\forall i \quad \sum_{j=1, N} x_{ij} \leq N y_i \quad (\text{si } y_i = 0, \text{ alors } x_{ij} = 0) \quad (2)$$

Le coût du réseau se décompose en trois termes :

. le coût du réseau aval (régional) :

$$C = \sum_{\substack{i=1, N \\ j=1, N}} c_{ij} x_{ij}$$

. le coût du réseau amont (Colisée) :

$$K = \sum_{i=1,N} y_i k_i t_i$$

$t_i$  étant le trafic émis et/ou reçu de la région  $i$ , obtenu en sommant les trafics des installations terminales appartenant à la région  $i$ , auquel il faut soustraire le trafic intérieur à la région  $i$ , qui lui ne passe pas Colisée.

$$t_i = \sum_{\substack{j=1,N \\ k=1,N}} x_{ij} t_{jk} - \sum_{\substack{j=1,N \\ k=1,N \\ i=1,N}} x_{ij} x_{ik} t_{jk}$$

. enfin, le coût des centres de transit :

$$F = f \sum_{i=1,N} y_i$$

Il s'agit de minimiser le coût total  $Z$  sous les contraintes (1) et (2)

$$Z = C + K + F$$

$$Z = \sum_{\substack{i=1,N \\ j=1,N}} c_{ij} x_{ij} + \sum_{\substack{i=1,N \\ j=1,N \\ k=1,N}} k_i t_{jk} x_{ij} (1 - x_{ik}) + f \sum_{i=1,N} y_i$$

## DISCUSSION

Le problème de placement que nous avons étudié apparaît très spécifique. Il est différent en effet de celui étudié par Bahl et Tang [13] (dans lequel il n'y a pas de termes quadratiques dans la formulation en nombres entiers), différent aussi de ceux pour lequel ont été développés CENTRAC [14] et EPICURE [15] (placement de centraux téléphoniques urbains). Les méthodes utilisées pour ces derniers problèmes sont exclusivement des heuristiques.

Compte tenu du coût élevé du réseau (plus de 1 MF par mois) et donc de l'intérêt d'une très bonne optimisation, nous avons développé un algorithme mathématique spécifique de ce problème, visant à obtenir une solution très proche de la solution optimale et une borne inférieure (proche) pour celle-ci, et dans certain cas de prouver l'optimalité de cette solution.

## II. DÉCOMPOSITION DU PROBLÈME

Étant donnée la taille et la structure du problème, il est nécessaire d'exploiter celle-ci en le décomposant en une succession de problèmes quadratiques en  $x$ , pour différents points  $y$  énumérés implicitement.

En effet pour 100 installations terminales, où peuvent aussi être installés les commutateurs, il y a 10 000 variables  $x$  et 100 variables  $y$  bivalentes. La résolution directe de ce problème serait largement au-delà de la capacité des codes actuels.

Nous décomposons en :

$$P \left\{ \begin{array}{l} \text{Problème « maître »} \\ \text{Problème « esclave » } (P_{\bar{y}}) \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} Z = \text{Min}_{\bar{y}} \{ Z_{\bar{y}} \} \quad y \in \{0, 1\} \\ \left\{ \begin{array}{l} Z_{\bar{y}} = f' \bar{y} + \text{Min}_x \{ c'x + x'Qx \} \\ Bx \geq b - D\bar{y}, \quad x \in \{0, 1\} \end{array} \right. \end{array} \right.$$

Le problème  $(P_{\bar{y}})$  consiste à trouver pour un emplacement donné des commutateurs l'affectation optimale des installations terminales.

Notre schéma consiste à :

1) Transformer  $(P_{\bar{y}})$  (variables bivalentes; non convexe) en un problème quadratique convexe en variables continues  $(P'_{\bar{y}})$  admettant les mêmes solutions entières que  $(P_{\bar{y}})$ .

2) Pouvoir ainsi utiliser la dualité non linéaire (Huard [5]) pour générer par la résolution de  $(P'_{\bar{y}})$  des contraintes permettant de guider l'énumération des  $y$ , comme le font Lemke et Spielberg [8] pour la programmation linéaire mixte et Spielberg [12] pour le cas particulier du problème d'implantation d'usines.

Le schéma de décomposition est l'inverse de celui de Rosen (9) pour le partitionnement des programmes non linéaires convexes en  $x$  et linéaires en  $y$  tels  $(P')$ . Alors que Rosen considère un problème esclave en  $y$ , nous faisons le contraire, ce qui oblige à utiliser la dualité non linéaire pour établir les contraintes générées par la résolution de  $(P'_{\bar{y}})$ .

### 1. Problème « esclave » en $x$

Pour un  $\bar{y}$  donné le problème  $(P_{\bar{y}})$  peut se reformuler :

$$(I) \left\{ \begin{array}{l} Z = \text{Min}_x \{ c'x + x'Qx \} \\ Ax = 1, \quad x \in \{0, 1\} \end{array} \right.$$

$(Ax = 1)$  représentent les contraintes  $\sum_{i \in I} x_{ij} = 1$

$$I = \{ 0 \leq i \leq N \mid y_i = 1 \}$$

où  $A$  est une matrice de choix multiples).

REMARQUE : Cependant on peut toujours, nous nous référons à Hammer (3), se ramener au cas où  $Q$  est positive semi-définie (PSD), parce que  $x^2 = x$  pour

$x=0,1$ ). Plus précisément, quels que soient  $c$  et  $Q$ , il existe  $c_1$  et  $Q_1$  tels que :

$$c'x + x'Qx = c'_1x + x'Q_1x$$

pour tout  $x$  à coordonnées entières 0 ou 1 et avec  $Q_1$  PSD. Ainsi la fonctionnelle du problème  $I$  s'écrit aussi :

$$F(x) = c'_1x + x'Q_1x = \sum_{i,j} c_{ij}x_{ij} + \frac{1}{2} \sum_{i,j,k} k_it_{jk}(x_{ij} - x_{ik})^2$$

( $Q_1$  est PSD car les coefficients  $k_i$  et  $t_{jk}$  sont  $\geq 0$ ).

Le problème (I) est donc équivalent au problème (III) :

$$(III) \begin{cases} Z = \text{Min}_x \{ c'_1x + x'Q_1x \} \\ Ax = 1, \quad x \in \{0, 1\} \end{cases}$$

La fonctionnelle n'étant pas linéaire, la solution optimale du problème :

$$(IV) \begin{cases} \tilde{Z} = \text{Min}_x \{ c'_1x + x'Q_1x \} \\ Ax = 1, \quad x \geq 0 \end{cases}$$

n'est pas nécessairement entière. Par contre il est possible de trouver la solution optimale de ce problème convexe.

Néanmoins si la solution n'est pas entière, elle se trouve sur une face du polyèdre des contraintes  $Ax = 1$ ; la restriction de la fonctionnelle à cette face est une fonction qui est stationnaire en ce point et prendra donc une valeur peu différente de  $\tilde{Z}$  aux points extrêmes de cette face, qui sont entiers. En particulier, la valeur  $\tilde{Z}$  de la fonctionnelle au point obtenu en arrondissant à 1 pour un  $i$  donné le  $x_{ij}$  continu le plus grand et à 0 les autres, donnera une « bonne » borne supérieure de  $Z$  ( $\tilde{Z} \leq Z \leq \tilde{Z}$ ).

Le tableau ci-dessous compare, pour différents exemples numériques ( $n = 2$ ;  $N = 3, 4, 5$ ), la solution du problème (IV) (nous avons utilisé l'algorithme de Lemke [7]) et la solution optimale de (III) obtenue par énumération. On remarquera que pour tous ces exemples, la solution optimale est trouvée en arrondissant la solution du problème continu. Le problème traité ici est très proche du problème quadratique d'affectation [2] pour lequel notre algorithme devrait donner d'excellentes solutions sous-optimales et très rapidement (la comparaison pour les problèmes tests de [2] reste à faire).

	Solution du problème quadratique (IV)	Solution optimale de (III)
N = 3	$\tilde{Z} = 193,75$ $x_{1i} = \quad 0 \quad 0,81 \quad 1$ $x_{2i} = \quad 1 \quad 0,19 \quad 0$	$Z = 194$ $x_{1i} = \quad 0 \quad 1 \quad 1$ $x_{2i} = \quad 1 \quad 0 \quad 0$
	$\tilde{Z} = 319,98$ $x_{1i} = \quad 1 \quad 0,988 \quad 1$ $x_{2i} = \quad 0 \quad 0,012 \quad 0$	$Z = 320$ $x_{1i} = \quad 1 \quad 1 \quad 1$ $x_{2i} = \quad 0 \quad 0 \quad 0$
	$\tilde{Z} = 261,2$ $x_{1i} = \quad 0,37 \quad 1 \quad 1$ $x_{2i} = \quad 0,63 \quad 0 \quad 0$	$Z = 276$ $x_{1i} = \quad 0 \quad 1 \quad 1$ $x_{2i} = \quad 1 \quad 0 \quad 0$
N = 4	$\tilde{Z} = 399$ $x_{1i} = \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0$ $x_{2i} = \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1$	$Z = 399$ $x_{1i} = \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0$ $x_{2i} = \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1$
	$\tilde{Z} = 325,7$ $x_{1i} = \quad 0 \quad 0,18 \quad 0,98 \quad 0$ $x_{2i} = \quad 1 \quad 0,82 \quad 0,02 \quad 0$	$Z = 329$ $x_{1i} = \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad 0$ $x_{2i} = \quad 1 \quad 1 \quad 0 \quad 0$
N = 5	$\tilde{Z} = 161,3$ $x_{1i} = \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 0,85 \quad 0,05$ $x_{2i} = \quad 0 \quad 1 \quad 1 \quad 0,15 \quad 0,95$	$Z = 162$ $x_{1i} = \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad 0$ $x_{2i} = \quad 0 \quad 1 \quad 1 \quad 0 \quad 1$
	$\tilde{Z} = 446$ $x_{1i} = \quad 0,25 \quad 0 \quad 0,30 \quad 0,23 \quad 0$ $x_{2i} = \quad 0,75 \quad 1 \quad 0,70 \quad 0,77 \quad 1$	$Z = 467$ $x_{1i} = \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0$ $x_{2i} = \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1$

## 2. Programme « maître » en $y$

Écrivons le problème (P) sous la forme :

$$(V) \begin{cases} Z = \text{Min} \{ F(x) + f'y \} \\ Bx + Dy \geq b, \quad x \in \{0, 1\}, y \in \{0, 1\} \end{cases}$$

où  $F$  est la fonction convexe :  $F(x) = c'_1 x + x'Q_1 x$  et soit (VI) le problème moins contraint

$$(VI) \begin{cases} \tilde{Z} = \text{Min} \{ F(x) + f'y \} \\ Bx + Dy \geq b \end{cases} \quad y \in \{0, 1\}$$

(On supposera que les contraintes  $0 \leq x_{ij} \leq 1$  sont contenues dans  $Bx + Dy \geq b$  pour simplifier les expressions ultérieures.)

Soient  $(\tilde{x}, \tilde{y})$  la meilleure solution entière de (V) trouvée et  $\tilde{Z}$  la valeur correspondante de la fonctionnelle.

THÉORÈME 1 : Pour qu'un  $y$  puisse améliorer la valeur de la fonctionnelle, il faut que :

$$f'y + F(x) + \lambda'(b - Dy - Bx) \leq \check{Z}$$

pour tout couple  $(x, \lambda)$  vérifiant  $\nabla F(x) - \lambda'B = 0$ .

Preuve : Soit en effet  $(x_0, \lambda_0, y_0)$  tel que

$$\begin{cases} \nabla F(x_0) - \lambda'_0 B = 0 \\ f'y_0 + F(x_0) + \lambda'_0(b - Dy_0 - Bx_0) > \check{Z} \end{cases}$$

Réolvons

$$(P'_{y_0}) \begin{cases} Z_{y_0} = f'y_0 + \text{Min}_x \{ F(x) \} \\ Bx + Dy_0 \geq b \end{cases}$$

Comme  $F$  est convexe, ce problème est équivalent à son dual (cf. Huard [5])

$$\begin{cases} Z_{y_0} = f'y_0 + \text{Max}_{x, \lambda} \{ F(x) + \lambda'(b - Dy_0 - Bx) \} \\ \nabla F(x) - \lambda'B = 0 \end{cases}$$

dont nous notons  $(x_{y_0}, \lambda_{y_0})$  la solution optimale. On a alors :

$$\begin{aligned} Z_{y_0} &= f'y_0 + F(x_{y_0}) + \lambda'_{y_0}(b - Dy_0 - Bx_{y_0}) \\ Z_{y_0} &\geq f'y_0 + F(x_0) + \lambda'_0(b - Dy_0 - Bx_0) > \check{Z} \end{aligned}$$

Soit encore, puisqu'à l'optimum  $\lambda'_{y_0}(b - Dy_0 - Bx_{y_0}) = 0$

$$f'y_0 + F(x_{y_0}) > \check{Z}$$

Cette paire  $(y_0, x_{y_0})$  ne peut donc améliorer  $\check{Z}$ .

A fortiori avec  $x$  entier (problème plus contraint donc  $F(x) \geq F(x_{y_0})$  on ne peut améliorer  $\check{Z}$ . C. Q. F. D.

Soit alors  $\{I\}$  un ensemble de couples  $(x_i, \lambda_i)$  vérifiant :

$$\nabla F(x_i) - \lambda'_i B = 0$$

et  $Y_I$  l'ensemble des  $y$  satisfaisant les contraintes :

$$f'y + F(x_i) + \lambda'_i(b - Dy - Bx) \leq \check{Z}, \quad (x_i, \lambda_i) \in \{I\}$$

Le théorème 1 nous permet d'affirmer que  $y^*$  solution optimale de (V) appartient à tout ensemble  $Y_I$ . L'idée est alors de construire une suite de  $Y_I$  « filtrant » de plus en plus l'ensemble des  $y$  susceptibles d'être optimaux, en se basant sur le théorème 2 suivant :

THÉORÈME 2 : Soit  $(x_y, \lambda_y, Z_y)$  la solution optimale de  $(P'_y)$  pour un  $y$  appartenant à  $Y_I$ . Si  $Z_y > Z$  alors on peut affirmer que le couple  $(x_y, \lambda_y)$  ne figurait pas dans l'ensemble  $\{I\}$  des  $(x_i, \lambda_i)$ .



*Preuve* : En effet si c'était le cas, on aurait pour cet  $y$  à la fois

$$Z_y = f'y + F(x_y) + \lambda_y(b - Dy - Bx) \leq \check{Z} \quad \text{et} \quad Z_y > \check{Z}$$

ce qui est impossible.

Ces théorèmes permettent de construire l'algorithme suivant.

### III. ALGORITHME DE RÉOLUTION

On initialise l'algorithme avec un  $\check{Z}$  aussi bas que possible trouvé par une méthode heuristique, par exemple celle développée au paragraphe V.

On explore implicitement les  $y$  satisfaisant aux contraintes  $\{I\}$  déjà générées.

Pour chaque nouvel  $y$  on résout le problème  $(P'_y)$ . Deux cas peuvent alors se présenter :

- a)  $Z_y > \check{Z}$  alors (théorème 2) on ajoute la contrainte  $(x_y, \lambda_y)$  à l'ensemble  $\{I\}$
- b)  $Z_y \leq \check{Z}$  on arrondit  $x_y$  à  $\bar{x}_y$  entier. Soit  $\bar{Z}_y$  la valeur de la fonctionnelle correspondant à  $\bar{x}_y$ 
  - si  $\bar{Z}_y \leq \check{Z}$  on remplace  $\check{Z}$  par  $\bar{Z}_y$  dans les contraintes  $\{I\}$  et on note  $\check{x} = \bar{x}_y$ ,  $\check{y} = y$  la meilleure solution entière trouvée,
  - si  $\bar{Z}_y > \check{Z}$ ,  $\check{Z}$  reste la meilleure solution obtenue pour le problème (VI).

A la fin de l'exploration on aura obtenu :

- . Une bonne solution entière  $(\check{x}, \check{y}, \check{Z})$  du problème (V).
- . Une borne inférieure  $\check{Z}$  de la solution optimale.

En particulier si  $\check{Z}$  arrondi à l'entier supérieur est égal à  $\check{Z}$ , on pourra conclure à l'optimalité (les coefficients de la fonctionnelle sont supposés entiers).

L'efficacité potentielle de l'algorithme tient à ce que la solution du problème continu est probablement très proche pour ce type de problème de la solution du problème entier

### IV. APPLICATION DE L'ALGORITHME AU PLACEMENT DE COMMUTEURS

*Formulation de  $(P'_y)$*

Le problème en  $x$  ( $x$  continu) pour un  $\bar{y}$  fixé, s'écrit

$$(VII) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Min}_x \{ F(x) \} + f'\bar{y} \\ \sum_{i=1}^N x_{ij} = 1 \\ \sum_{j=1}^N x_{ij} \leq N\bar{y}_i \quad (C) \end{array} \right.$$

$$f' = [f, f, \dots, f]$$

$$F(x) = \sum_{i,j=1}^N c_{ij}x_{ij} + \frac{1}{2} \sum_{i,j,k=1}^N k_{ijk}(x_{ij} - x_{ik})^2$$

Le problème dual correspondant se formule :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Max}_{x,u,\mu,\lambda} \{ F(x) - \sum_{i,j} u_{ij}x_{ij} - \sum_i \mu_i(N\bar{y}_i - \sum_j x_{ij}) + \sum_j \lambda_j(1 - \sum_i x_{ij}) \} \\ u_{ij} \geq 0 \quad \mu_i \geq 0 \quad x_{ij} \geq 0 \\ \frac{\partial F}{\partial x_{ij}} - u_{ij} + \mu_i - \lambda_j = 0 \quad (KT) \end{array} \right.$$

La solution optimale de (VII) est obtenue en résolvant par un programme quadratique quelconque (par exemple celui de Lemke [7])

$$(VIII) \left\{ \begin{array}{l} \text{Min}_{(x_{ij})_{i \in K}} \{ F(x) \} \\ \sum_i x_{ij} = 1, \quad x_{ij} = 0 \text{ pour } i \notin K, \quad x_{ij} \geq 0 \text{ pour } i \in K, \end{array} \right.$$

$K$  étant l'ensemble des indices pour lesquels  $\bar{y}_i = 1$ . En effet  $\bar{y}_i = 0 \Rightarrow x_{ij} = 0$ .

#### Calcul des multiplicateurs de Kuhn-Tucker

— Si  $i \in K$  alors le programme de résolution de (VIII) donne aussi les multiplicateurs  $\lambda_j$  et  $u_{ij}$ . D'autre part  $\mu_i = 0$  puisque les contraintes (C) ne sont pas actives.

— Si  $i \notin K$  on calcule les multiplicateurs (comme Spielberg [12]) en remarquant que :  $\frac{\partial F}{\partial x_{ij}} = c_{ij}$  pour  $i \notin K$  et comme (KT)  $\Rightarrow \mu_i \geq \lambda_j - \frac{\partial F}{\partial x_{ij}}$ , on a donc puisque  $\mu_i \geq 0$

$$\mu_i = \text{Max}_j \{ 0, \lambda_j - c_{ij} \}$$

#### Interprétation économique des multiplicateurs

L'interprétation économique de ces multiplicateurs est la suivante :

.  $(\lambda_j - c_{ij})$  représente la diminution de coût (positive ou négative) quand on connecte  $j$  au commutateur  $i$  ;

.  $\mu_i$  est la plus forte diminution de coût, pour une installation terminale donnée, quand on « ouvre » le commutateur  $i$ .

En particulier si  $\forall j c_{ij} > \lambda_j$  on aura  $\mu_i = 0$ . Ceci correspond au cas d'un commutateur fermé dont le coût de raccordement à toutes les installations terminales est très cher ; la contrainte de filtre correspondante éliminera toute branche pour laquelle  $y_i = 1$ .

*Contraintes générées*

La contrainte générée, par la résolution de (VII) pour  $\bar{y}$  s'écrira

$$f' y + F(x_{\bar{y}}) + \lambda'_{\bar{y}}(b - Bx_{\bar{y}} - Dy) \leq \check{Z}$$

où encore puisque  $\lambda'_{\bar{y}}(b - Bx_{\bar{y}} - D\bar{y}) = 0$

$$f' y + Z_{\bar{y}} - f' \bar{y} + \lambda'_{\bar{y}} D(y - \bar{y}) \leq \check{Z}$$

soit :

$$\sum_i f y_i - \sum N \mu_i y_i \leq \check{Z} - Z_{\bar{y}} + \sum_i f \bar{y}_i$$

$N\mu_i$  est une borne supérieure de la diminution de coût quand on ouvre le commutateur  $i$ , qui n'est pas très bonne. Pour ce type de problème, les contraintes générées risquent donc d'être peu efficaces pour éliminer les  $y$ . Néanmoins si on les utilise pour chercher à chaque itération un  $y$  donnant une faible valeur à leur membre de gauche, l'interprétation économique des  $\mu_i$  indique qu'on obtiendra ainsi rapidement une bonne solution  $y$ .

*Exemple numérique*

Les données sont celles de l'exemple 1, page 26 : 5 installations terminales et 3 emplacements possibles pour les commutateurs

$$[c_{ij}] = \begin{bmatrix} 0 & 10\,000 & 70 & 20 & 80 \\ 10\,000 & 0 & 30 & 60 & 40 \\ 70 & 410 & 710 & 380 & 210 \end{bmatrix} \quad \begin{aligned} k &= [1,5 \quad 0,5 \quad 0,6] \\ f' &= [40 \quad 40 \quad 40] \end{aligned}$$

La solution optimale a été trouvée en 2 résolutions de programme quadratique (les contraintes générées sont efficaces pour guider la recherche). Mais il a fallu 3 résolutions supplémentaires pour prouver l'optimalité.

**V. OBTENTION HEURISTIQUE D'UNE SOLUTION INITIALE**

L'algorithme présenté sera d'autant plus efficace (pour le problème pratique présenté, comme pour des problèmes de la même forme qui sont assez courants) qu'on aura une meilleure solution de départ  $\check{Z}$ .

Nous avons, pour le problème présenté, utilisé une heuristique basée sur celle de Johnson ([6] et [4]) pour les problèmes de classification.

L'exploitant sur le problème réel, l'amélioration par rapport à la meilleure solution manuelle, a déjà été de 8,7 % sur le coût des lignes, soit en valeur absolue, une réduction de coût de 1,3 MF par an.

**CONCLUSION**

L'algorithme développé n'a pu être complètement programmé et expérimenté sur le problème dont il avait l'origine. La solution heuristique a eu, en effet, des

$y$	Solution $x_j$ continu	$\bar{x}_j$ entier par arrondi	$\bar{Z}$	$\check{Z}$	$\mu$	Contrainte générée
0 0 0	—	—	$\infty$	$\infty$		On branche sur $y_1$ , car c'est celui qui minimise
1 0 0	$x_{1i} = 1$ $x_{2i} = 0$ $x_{3i} = 0$	$x_{1i} = 1$ $x_{2i} = 0$ $x_{3i} = 0$	10 210	10 210	0 10 000 9 590	$40 y_1 - 49 960 y_2 - 47 910 y_3 + 10 170$ (I) On branche sur $y_2$ qui minimise le membre de gauche
1 1 0	$x_{1i} = 1$ $x_{2i} = 0$ $x_{3i} = 0$	$x_{1i} = 1$ $x_{2i} = 0$ $x_{3i} = 0$	241,3	241,3	0 0 2	$40 y_1 + 40 y_2 + 30 y_3 + 161,3 < 242$ (II) On ne peut brancher sur $y_3$ qui violerait la contrainte (II)
1 0 1	$x_{1i} = 1$ $x_{2i} = 0$ $x_{3i} = 0$	$x_{1i} = 1$ $x_{2i} = 0$ $x_{3i} = 0$	<u>241,3</u>	<u>242</u>	0 434 0	$40 y_1 - 2 130 y_2 + 40 y_3 + 622 < 242$ On ne peut brancher sur $y_1$ qui violerait (II)
0 1 0	$x_{1i} = 1$ $x_{2i} = 1$ $x_{3i} = 0$	$x_{1i} = 1$ $x_{2i} = 1$ $x_{3i} = 0$	241,3	242	10 000 0 9 930	$-49 960 y_1 + 40 y_2 - 49 610 y_3 + 10 130 < 242$
0 1 1	$x_{1i} = 1$ $x_{2i} = 1$ $x_{3i} = 0$	$x_{1i} = 1$ $x_{2i} = 1$ $x_{3i} = 0$	241,3	242		$-460 y_1 + 40 y_2 + 40 y_3 + 227,5 < 242$
Solution entière sous-optimale : $\check{Z} = 242, \bar{y} = 110$ .						
Solution continue optimale : $\bar{Z} = 241,3$ .						

résultats suffisamment intéressants pour ne pas justifier l'investissement dans une méthode numérique originale, ne garantissant pas un progrès substantiel. Nous n'avons pu donc en valider sur des problèmes de très petite taille, qu'une maquette écrite en APL.

L'expérimentation complète, avec des algorithmes « industriels » et leur comparaison avec d'autres méthodes, reste à faire.

Cette voie paraît intéressante, compte tenu :

- de la généralité de la forme mathématique du problème formulé,
- des résultats satisfaisants des algorithmes de localisation d'usines (Salkin et Spielberg [11]), dont notre méthode n'est au fond, que l'extension au cas quadratique non convexe, sans que celle-ci apparaisse particulièrement pénalisante ni génératrice d'itérations supplémentaires.

Compte tenu de la relative pauvreté en schémas algorithmiques nouveaux pour ce type de problème, il nous est apparu utile de présenter celui-ci, malgré des résultats et comparaisons numériques avec d'autres méthodes, très incomplets.

## REFERENCES

### 1. Programmation

1. J. F. BENDERS, Partitioning procedures for solving mixed variables programming problems, *Numerische Mathematik*, vol. 4, 1962, p. 238-252.
2. R. GILMORE, Optimal and suboptimal algorithms for the quadratic assignment problem, *S.I.A.M.*, vol. 10, 1962, p. 305-313.
3. P. L. HAMMER et A. A. LUBIN, Some remarks on quadratic programming with 0-1 variables, *R.A.I.R.O.*, vol. 3, septembre 1970, p. 67-79.
4. A. HENRY-LABORDÈRE, *Analyse de données, applications et méthodes*, Masson, 1977.
5. P. HUARD, Programme Dual, dans *Mathématique des programmes économiques*, p. 13-17, Dunod, 1964.
6. S. C. JOHNSON, Hierarchical clustering schemes, *Psychometrika*, vol. 32, n° 3, septembre 1967.
7. C. E. LEMKE, Bimatrix equilibrium points and mathematical programming, *Management science*, vol. 11, n° 7, mai 1965.
8. C. E. LEMKE et K. SPIELBERG, Direct Search Algorithms for zero-one and mixed integer programming problems, *J. O.R.S.A.*, vol. 15, n° 5, 1967.
9. J. B. ROSEN, Convex partition programming, dans *Recent advances in mathematical programming*, Graves et Wolfe ed., McGraw-Hill, 1963, p. 159-176.
10. I. G. ROSENBERG, 0-1 optimisation and non linear programming, *R.A.I.R.O.*, vol. 2, octobre 1972, p. 95-97.
11. H. SALKIN et K. SPIELBERG, Enumerative methods for integer and mixed integer programming IBM, *N. Y. Scientific Center*, Rep. n° 20-29, mars 1968.
12. K. SPIELBERG, Algorithms for the simple plant location problem with some side conditions, *Operations Res.*, 17, janvier 1969, p. 85-111.

## 2. Placement de commutateurs

13. L. R. BAHL et D. T. TANG, Optimization of concentrators locations in Tele-processing networks, *Symposium on computer communications networks*, Polytechnic institute of Brooklyn, 4-6 avril, 1972.
14. P. BERNARD, J. J. DAMLAMIAN, G. GLANDIER et J. P. MAURY, CENTRAC : Programme d'optimisation de la structure des réseaux téléphoniques urbains, *Écho des Recherches* (C.N.E.T.), n° 53, juin 1968.
15. J. L. DEBIESE, Le programme ÉPICURE II, *Écho des Recherches* (C.N.E.T.), n° 82, octobre 1975.