RAIRO. RECHERCHE OPÉRATIONNELLE

J. ERSCHLER
G. FONTAN
F. ROUBELLAT

Potentiels sur un graphe non conjonctif et analyse d'un problème d'ordonnancement à moyens limites

RAIRO. Recherche opérationnelle, tome 13, nº 4 (1979), p. 363-378
<http://www.numdam.org/item?id=RO_1979__13_4_363_0>

R.A.I.R.O. Recherche opérationnelle/Operations Research
(vol. 13, n° 4, novembre 1979, p. 363 à 378)

POTENTIELS SUR UN GRAPHE NON CONJONCTIF ET ANALYSE D'UN PROBLÈME D'ORDONNANCEMENT A MOYENS LIMITÉS (*)

par J. ERSCHLER, G. FONTAN et F. ROUBELLAT [1]

Résumé. — *Cet article traite du problème d'ordonnancement de projets en présence de limitations de moyens et de durées allouées. La modélisation du problème s'effectue à l'aide d'un graphe potentiels-tâches non conjonctif. Les conflits pour l'utilisation des moyens introduisent un aspect combinatoire (ou séquentiel) dans le problème, cet aspect apparaissant dans les groupes d'arcs non conjonctifs du graphe. Une méthode d'analyse s'appuyant sur la transformation du graphe est proposée. Elle permet de caractériser sur le plan temporel (marges) et séquentiel (contraintes de séquence portant sur des tâches en conflit) l'ensemble des ordonnancements admissibles. Ces informations, comparables à celles qui sont obtenues par les méthodes à chemin critique en l'absence de limitation sur les moyens, sont destinées à jouer un rôle d'aide à la décision pour la conception et la conduite de l'ordonnancement.*

Abstract. — *This paper deals with the multiprojects scheduling problem with limited resources and duration. A non conjunctive potentials-activities graph is used as a model. Conflicts associated with activities using the same resource give the problem its combinatorial (or sequential) aspect, which is modelled by using non conjunctive groups of arcs in the graph. An analysis method, based on a transformation of this graph, is proposed. It makes possible to characterise the set of admissible schedules in a time aspect (margins) as well as in a sequential aspect (sequencing relations between conflicting activities). This information, comparable with the one which is obtained when using the critical path methods for problems without resource limitation, can be viewed as a decision aid tool for the design and control of the activities scheduling.*

1. INTRODUCTION

Les méthodes à chemin critique tiennent dans le domaine de l'ordonnancement une place fondamentale, tant d'un point de vue théorique que pratique ([1, 6, 9]). Ceci semble dû au fait que ces méthodes ne se limitent pas à la recherche d'un ordonnancement qui minimise la durée totale d'exécution. En effet, elles permettent également de caractériser, à travers les notions de dates limites et de marges, l'ensemble des ordonnancements compatibles avec cette durée totale.

Ainsi ce n'est pas tant l'optimisation d'un critère (durée totale) que la caractérisation de l'ensemble des solutions admissibles en présence d'un ensemble de contraintes (parmi lesquelles une durée totale allouée, qui peut être

(*) Reçu en juillet 1978.
[1] Laboratoire d'automatique et d'analyse des systèmes du Centre national de la Recherche scientifique, Toulouse.

prise minimale ou non) qui constitue l'intérêt principal de ces méthodes. Ceci s'explique par le fait que les modèles utilisés dans ce domaine ne représentent que certains aspects de la réalité (les plus objectifs et les plus faciles à modéliser); dans ces conditions, il est assez irréaliste de proposer une solution qualifiée d'optimale et qui, pour le problème réel, peut s'avérer peu intéressante voire inapplicable. Par contre, la prise en compte des objectifs à travers des contraintes et la caractérisation de l'ensemble des solutions admissibles compte tenu de ces contraintes, permet de mettre en évidence les degrés de liberté dans la façon de résoudre le problème et de faire apparaître éventuellement les points critiques.

Dans cette optique, les méthodes à chemin critique citées précédemment apportent des éléments de réponse satisfaisants pour l'ordonnancement de tâches en l'absence de limitations sur la quantité de moyens disponibles. La présence de telles limitations introduit un aspect combinatoire lié aux conflits intervenant entre tâches utilisant un même moyen. Les notions de marges et de dates limites ne suffisent plus à caractériser l'ensemble des ordonnancements admissibles. Les méthodes proposées pour traiter ces problèmes se limitent à la recherche d'une solution soit optimale, soit présumée satisfaisante vis-à-vis d'un ou plusieurs critères ([2, 8]).

Nous nous intéressons dans cet article à la caractérisation de l'ensemble des ordonnancements admissibles pour une certaine classe de problèmes avec limitations sur les moyens. Les caractéristiques ainsi obtenues sont destinées à jouer un rôle d'aide à la décision pour la résolution du problème.

2. DÉFINITION DU PROBLÈME

Il s'agit de guider l'exécution de n projets; chaque projet i est constitué de g_i tâches.

Une tâche est notée (i, j) où i est le numéro du projet auquel elle appartient et j son numéro au sein du projet. Elle ne peut être interrompue et est caractérisée par :

- sa durée p_{ij};
- l'ensemble K_{ij} des moyens nécessaires à son exécution;
- les quantités $q_{ij}^k (k \in K_{ij})$ de moyens à mettre en œuvre pour son exécution;
- sa date de début t_{ij}.

Les caractéristiques p_{ij}, q_{ij}^k, K_{ij} sont supposées connues, p_{ij} et q_{ij}^k supposées constantes (>0); t_{ij} est la seule caractéristique inconnue.

L'exécution des tâches est soumise aux contraintes suivantes :

1° *Contraintes internes de cohérence technologique*. Ces contraintes expriment les interactions entre les tâches des projets. Elles sont supposées exprimables par une conjonction d'inégalités de potentiels [9] portant sur les dates de début de ces tâches, soit :

$$t_{vw} - t_{ij} \geqq a_{ij}^{vw},$$

où $a_{ij}^{vw} = \text{Cte}$.

On suppose, par ailleurs, que chaque projet possède une tâche initiale $(i, 1)$ et une tâche finale (i, g_i), réelles ou fictives, et telles que

$$\left.\begin{array}{r} t_{ij} \geqq t_{i1} \\ t_{ig_i} + p_{ig_i} \geqq t_{ij} + p_{ij} \end{array}\right\} \forall\, i, j.$$

2° *Contraintes externes de dates limites.* Ces contraintes imposent à chaque projet i une date de début au plus tôt r_i et une date de fin au plus tard d_i. L'introduction d'une tâche fictive (0, 0) dont la date de début est prise pour origine des temps permet d'exprimer ces contraintes par une conjonction d'inégalités de potentiels de la forme

$$t_{i1} - t_{00} \geqq r_i,$$

$$t_{00} - t_{ig_i} \geqq p_{ig_i} - d_i.$$

3° *Contraintes externes de limitation de cumul des moyens.* Chaque moyen k est supposé disponible en quantité limitée q^k constante dans le temps.

Une solution à ce problème est appelée ordonnancement et est entièrement définie par l'ensemble T tel que

$$T = \{ t_{ij} / i = 1, \ldots, n;\ j = 1, \ldots, g_i \}.$$

Un ordonnancement est dit admissible lorsqu'il satisfait à l'ensemble des contraintes ci-dessus.

3. MODÉLISATION DES CONTRAINTES DE LIMITATION DU CUMUL DES MOYENS

Soit I un ensemble de tâches dont la réalisation nécessite l'utilisation d'un moyen k, et tel que

$$\sum_{(i,j) \in I} q_{ij}^k > q^k.$$

Les tâches constituant l'ensemble I ne peuvent être exécutées simultanément, c'est-à-dire que deux tâches au moins parmi celles-ci doivent être exécutées sur des intervalles de temps disjoints. Ceci peut s'exprimer en disant qu'une inégalité de potentiels au moins parmi celles de l'ensemble $H(I)$ suivant doit être satisfaite

$$H(I) = \{ t_{ij} - t_{vw} \geqq p_{vw} / (i, j), (v, w) \in I \}.$$

Pour exprimer l'ensemble de ces conditions sans redondance, on peut se limiter à des ensembles I minimaux notés I_c et appelés « ensembles critiques de tâches »

[7]; ces ensembles peuvent être définis ainsi : $\exists\, k$ tel que $\sum_{(i,j)\in I_c} q_{ij}^k > q^k$ et $\nexists\, k'$ et $I' \subset I_c$ tels que $\sum_{(i,j)\in I'} q_{ij}^{k'} > q^{k'}$. Le symbole $\subset$ est retenu pour l'inclusion stricte, l'inclusion au sens large étant notée $\subseteqq$.

Soit $\mathscr{I}_c$ l'ensemble des ensembles critiques de tâches associés au problème défini en 2.

Les contraintes de limitation du cumul des moyens sont modélisées par un ensemble d'ensembles d'inégalités de potentiels $\mathscr{H}^0 = \{ H^0(I_c)/I_c \in \mathscr{I}_c \}$, une inégalité au moins devant être satisfaite dans chaque ensemble $H^0(I_c)$.

4. GRAPHE POTENTIELS-TACHES NON CONJONCTIF ASSOCIÉ AU PROBLÈME

Compte tenu de ce qui a été montré précédemment, le problème défini en 2 est modélisable par un graphe potentiels-tâches non conjonctif [9] $G^0(X, U^0, \mathscr{F}^0)$ où :

– X est l'ensemble des sommets

$$X = \{ (0, 0), (i, j), i = 1, \ldots, n; j = 1, \ldots, g_i \};$$

– U^0 est l'ensemble des arcs : un arc $[(i, j), (v, w)]$ appartient à U^0 dès qu'il existe, dans la définition du problème présentée aux paragraphes 2 et 3, une contrainte faisant intervenir l'inégalité de potentiels $t_{ij} - t_{vw} \geqq a_{ij}^{vw}$;

– $\mathscr{F}^0$ est l'ensemble des groupes d'arcs non conjonctifs : un groupe d'arcs non conjonctif $F^0(I_c)$, associé à chaque ensemble $H^0(I_c)$, est défini par : $[(i, j), (v, w)] \in F^0(I_c)$ si $[t_{vw} - t_{ij} \geqq p_{ij}] \in H^0(I_c)$. Donc $F^0(I_c) \subset U^0$.

A chaque arc du graphe est associée une longueur égale à la valeur du second membre de l'inégalité de potentiels qu'il représente.

A chaque sommet (i, j) de ce graphe, on associe un potentiel t_{ij} qui représente la date de début de la tâche (i, j).

Soient :

$$U_{NC}^0 = \bigcup_{F^0 \in \mathscr{F}^0} F^0,$$

$$U_C^0 = U^0 - U_{NC}^0,$$

U_{NC}^0 est la partie non conjonctive de U^0, U_C^0 est la partie conjonctive de U^0.

Un ensemble de potentiels T sur le graphe non conjonctif ainsi défini est un ensemble de valeurs

$$T = \{ t_{ij}/t_{00} = 0;\ i = 1, \ldots, n;\ j = 1, \ldots, g_i \}$$

telles que

$$\forall\, [(i, j), (v, w)] \in U_C^0 \quad \Rightarrow \quad t_{vw} - t_{ij} \geqq a_{ij}^{vw},$$

$$\forall\, F^0 \in \mathscr{F}^0, \quad \exists\, [(i, j), (v, w)] \in F^0 \quad \text{tel que} \quad t_{vw} - t_{ij} \geqq p_{ij}.$$

Un ensemble de potentiels sur le graphe G^0 correspond à un ordonnancement admissible pour le problème défini en 2.

REMARQUES : 1. Le graphe G^0, tel qu'il est défini, peut être un multigraphe. En effet, une contrainte de cohérence technologique peut faire intervenir une inégalité telle que

$$t_{vw}-t_{ij} \geqq a_{ij}^{vw}$$

et par ailleurs (i, j) et (v, w) peuvent appartenir à un même ensemble critique de tâches, ce qui fait intervenir l'inégalité de potentiels

$$t_{vw}-t_{ij} \geqq p_{ij}.$$

Si $a_{ij}^{vw} \geqq p_{ij}$, le groupe non conjonctif associé à l'ensemble critique contenant (i, j), (v, w) peut être supprimé.

Par contre, si $a_{ij}^{vw} < p_{ij}$, les deux arcs de longueurs a_{ij}^{vw} et p_{ij} reliant (i, j) à (v, w) doivent être conservés et on est alors en présence d'un multigraphe, ou plus précisément d'un 2-graphe (multigraphe tel qu'il y ait au plus deux arcs reliant dans un sens deux sommets), tel que, lorsqu'il y a deux arcs dans un sens entre deux sommets, l'un appartient à la partie conjonctive du graphe et l'autre à la partie non conjonctive du graphe. Par la suite, nous parlerons simplement de graphe, les développements restant valables dans le cas plus général d'un 2-graphe, la distinction entre deux arcs relatifs à un même couple de sommets se faisant alors à travers les aspects conjonctifs et non conjonctifs.

2. Par la suite, lorsque nous parlons de graphe sans préciser, il s'agit d'un graphe non conjonctif défini par un triplet $(X, U, \mathscr{F})$. Dans le cas particulier où $\mathscr{F}=\emptyset$, il sera précisé qu'il s'agit d'un graphe conjonctif avec la notation $G_c(X, U)$.

5. CARACTÉRISTIQUES TEMPORELLES. CARACTÉRISTIQUES SÉQUENTIELLES

Un ordonnancement admissible est entièrement caractérisé par l'ensemble T. Cependant l'admissibilité implique la résolution des conflits pour l'utilisation des moyens. Une telle résolution s'effectue en satisfaisant au moins une inégalité de potentiels dans chaque ensemble $H^0(I_C)$. Ceci se traduit au niveau du graphe par la prise en considération d'au moins un arc dans chaque groupe non conjonctif $F^0(I_C)$.

Ceci amène à définir, pour un graphe tel que $G^0(X, U^0, \mathscr{F}^0)$, la notion de système minimal représentatif R^0 [9] où R^0 est un ensemble d'arcs tel que $\forall F^0 \in \mathscr{F}^0$, $F^0 \cap R^0 \neq \emptyset$ et $\nexists R^{0\prime} \subset R^0$ tel que $\forall F^0 \in \mathscr{F}^0$, $F^0 \cap R^{0\prime} \neq \emptyset$.

Donc un système représentatif R^0 est minimal si et seulement si pour tout arc u de R^0, il existe $F^0 \in \mathscr{F}^0$ tel que $F^0 \cap R^0 = \{u\}$.

Un système minimal représentatif correspond, pour notre problème, à une résolution sans redondance de l'ensemble des conflits représentés par $\mathscr{F}^0$. Or cette résolution s'effectue en ordonnant entre elles certaines tâches. R^0 définit ainsi une « séquence », ou constitue une caractéristique séquentielle pour le problème d'ordonnancement.

Supposons maintenant qu'il existe un ensemble de potentiels sur le graphe conjonctif $G_C^0(X, U_C^0)$ et, considérons le graphe conjonctif $G_C^0(X, U_C^0 \cup R^0)$. S'il existe un ensemble de potentiels sur ce graphe, le système minimal représentatif R^0 est dit compatible et la séquence associée est dite admissible. L'ensemble $\mathscr{T}(R^0)$ des ensembles de potentiels sur le graphe représente un ensemble d'ordonnancements admissibles ayant même caractéristique séquentielle. A ces ordonnancements, on peut associer des caractéristiques temporelles correspondant aux dates limites définies par les ensembles de potentiels minimum $\Lambda(R^0)$ et maximum $\Lambda'(R^0)$ sur le graphe $G_C^0(X, U_C^0 \cup R^0)$ tels que

$$\Lambda(R^0) = \{\lambda_{00} = 0,\ \lambda_{ij}/i=1, \ldots, n;\ j=1, \ldots, g_i\},$$
$$\Lambda'(R^0) = \{\lambda'_{00} = 0,\ \lambda'_{ij}/i=1, \ldots, n;\ j=1, \ldots, g_i\}$$

et

$$\forall\, T = \{t_{00} = 0,\ t_{ij}/i=1, \ldots, n;\ j=1, \ldots, g_i\} \in \mathscr{T}(R^0) \quad \Rightarrow \quad \lambda_{ij} \leqq t_{ij} \leqq \lambda'_{ij},$$

λ_{ij} représente la date de début au plus tôt de la tâche (i, j) dans la séquence, λ'_{ij} représente la date de début au plus tard de la tâche (i, j) dans la séquence.

6. CARACTÉRISATION DES SÉQUENCES ADMISSIBLES

Pour les ordonnancements admissibles associés à une même séquence admissible, on peut aisément définir des caractéristiques temporelles représentées par des dates limites qui correspondent aux ensembles de potentiels minimum et maximum sur un graphe conjonctif. La caractérisation des ordonnancements admissibles nécessite donc avant tout la caractérisation des séquences admissibles. Or ces séquences admissibles ne sont pas explicitement représentées dans le graphe $G^0(X, U^0, \mathscr{F}^0)$. En effet, sur ce graphe, tout système minimal représentatif n'est pas compatible. Les contraintes de dates limites en particulier restreignent les possibilités de résolution des conflits. Il convient donc, par un traitement approprié du graphe $G^0(X, U^0, \mathscr{F}^0)$ d'expliciter les possibilités réelles de résolution des conflits, c'est-à-dire celles qui sont compatibles avec l'ensemble des contraintes.

6.1. Système minimal représentatif compatible

Comme nous l'avons vu en 5, lorsqu'il existe un ensemble de potentiels sur $G_C^0(X, U_C^0)$, un système minimal représentatif R^0 est compatible s'il existe un ensemble de potentiels sur $G_C^0(X, U_C^0 \cup R^0)$. Or il existe un ensemble de potentiels sur un graphe conjonctif si et seulement s'il n'existe pas de circuit de longueur positive dans ce graphe [9].

Ainsi, plus généralement, nous dirons qu'un système minimal représentatif R^0 est compatible lorsqu'il n'existe pas, dans $G_C^0(X, U_C^0 \cup R^0)$, de circuit de longueur positive contenant au moins un arc de R^0. Ceci permet de définir un système minimal représentatif compatible même lorsqu'il n'existe pas d'ensemble de potentiels sur $G_C^0(X, U_C^0)$.

6.2. Système incompatible minimal

Nous appelons système incompatible minimal r^0 un ensemble d'arcs tels que :

– $\exists$ un système minimal représentatif tel que $r^0 \subseteqq R^0$, $r^0 \neq \emptyset$;

– $\exists$ dans le graphe conjonctif $G_C^0(X, U_C^0 \cup r^0)$ un circuit de longueur positive contenant r^0;

– $\nexists\, r'^0 \subset r^0$ tel que $\exists$ dans $G_C^0(X, U_C^0 \cup r'^0)$ un circuit de longueur positive contenant r'^0.

r^0 représente une résolution partielle et minimale des conflits pour l'utilisation des moyens, qui entraîne à elle seule l'incompatibilité.

6.3. Groupes non conjonctifs associés à un système incompatible minimal

Considérons un système incompatible minimal r^0 associé au graphe $G^0(X, U^0, \mathscr{F}^0)$. Soit u un arc de r^0, $J(u)$ l'ensemble des indices des groupes d'arcs non conjonctifs qui contiennent u et $\mathscr{F}^0(u)$ l'ensemble des groupes d'arcs non conjonctifs contenant u :

$$\mathscr{F}^0(u) = \{F_i^0(u) / i \in J(u)\}.$$

L'interdiction de la conjonction des arcs de r^0 implique l'obligation de prendre au moins un arc appartenant à la réunion $F_{c_j}(\bar{r}^0)$ des compléments des arcs $u \in r^0$ par rapport à un des groupes non conjonctifs auxquels ils appartiennent. On peut écrire :

$$F_{cj}(\bar{r}^0) = \bigcup_{u \in r^0} (F_i^0(u) - u) \qquad \text{avec} \quad i \in c_j,$$

où c_j est la combinaison des indices i intervenant dans $F_{c_j}(\bar{r}^0)$. Si $\mathscr{C}(r^0)$ est l'ensemble de ces combinaisons d'indices c_j obtenues en prenant pour chaque

$u \in r^0$ un élément de $J(u)$, on a

$$\mathscr{F}(\bar{r}^0) = \{ F_{c_j}(\bar{r}^0) / c_j \in \mathscr{C}(r^0) \}.$$

6.4. Transformation d'un graphe non conjonctif

Les différentes notions présentées dans les paragraphes précédents sont définies sur le graphe $G^0(X, U^0, \mathscr{F}^0)$. Ces notions restent valables pour tout graphe non conjonctif $G(X, U, \mathscr{F})$ et en particulier, dans ce qui suit, pour les graphes $G^i(X, U^i, \mathscr{F}^i)$ obtenus par transformation du graphe $G^0(X, U^0, \mathscr{F}^0)$.

Soit Γ la transformation définie sur l'ensemble des graphes non conjonctifs $G(X, U, \mathscr{F})$ et qui associe à tout graphe $G^i(X, U^i, \mathscr{F}^i)$ un graphe

$$\Gamma(G^i(X, U^i, \mathscr{F}^i)) = G^{i+1}(X, U^{i+1}, \mathscr{F}^{i+1}).$$

G^{i+1} est obtenu, à partir de G^i :

– en introduisant, pour tout système incompatible minimal r^i de G^i l'ensemble des groupes d'arcs non conjonctifs $\mathscr{F}(\bar{r}^i)$ défini en 6.3;

– en supprimant tout groupe non conjonctif qui inclut un autre groupe non conjonctif ou un arc de la partie conjonctive.

Lorsqu'un groupe non conjonctif nouveau se réduit à un seul arc, il est considéré comme appartenant à la partie conjonctive du graphe.

La transformation Γ possède les propriétés suivantes :

1° elle conserve l'ensemble des ensembles de potentiels. En effet, l'introduction de nouveaux groupes découle logiquement d'incompatibilités existant dans le graphe initial et les simplifications par inclusion ne modifient pas l'ensemble des systèmes minimaux représentatifs;

2° pour tout graphe initial $G^0(X, U^0, \mathscr{F}^0)$, il existe n fini tel que :

$$\Gamma^{n+1}[G^0(X, U^0, \mathscr{F}^0)] = \Gamma^n[G^0(X, U^0, \mathscr{F}^0)].$$

L'ensemble U^0 étant fini, l'ensemble des parties de U^0 est également fini. L'ensemble des groupes non conjonctifs qu'il est possible de générer est donc fini. De plus, lorsqu'un groupe non conjonctif est supprimé par inclusion, il ne peut réapparaître dans une application ultérieure de la transformation. On peut donc affirmer qu'après un nombre fini n d'applications de Γ, il n'est plus possible d'introduire de nouveau groupe non conjonctif;

3° si $G^i(X, U^i, \mathscr{F}^i) = \Gamma[G^{i-1}(X, U^{i-1}, \mathscr{F}^{i-1})]$, alors : $U^i \subseteqq U^{i-1}$.

En effet, les groupes non conjonctifs qui sont générés sont constitués d'arcs existant dans le graphe initial. Par ailleurs, certains arcs peuvent disparaître à la suite de simplifications par inclusion.

6.5. Graphe résolu

THÉORÈME : *A tout graphe $G^0(X, U^0, \mathscr{F}^0)$ il est possible d'associer un graphe $G^*(X, U^*, \mathscr{F}^*)$ tel que :*

– $U^* \subseteqq U^0$;

– *l'ensemble des ensembles de potentiels sur G^* est identique à l'ensemble des ensembles de potentiels sur G^0;*

– *tout système minimal représentatif de G^* est compatible. G^* est appelé « graphe résolu » associé à G^0.*

Démonstration : Considérons le graphe $G^n(X, U^n, \mathscr{F}^n)$ déduit de G^0 par n applications successives de la transformation Γ définie en 6.4 et tel que :

$$\Gamma[G^n(X, U^n, \mathscr{F}^n)] = G^n(X, U^n, \mathscr{F}^n).$$

Montrons que G^n est un graphe résolu associé à G^0. D'après les propriétés de la transformation Γ, on a :

– $U^n \subseteqq U^0$;

– l'ensemble des ensembles de potentiels sur G^n est identique à l'ensemble des ensembles de potentiels sur G^0.

Pour que tout système minimal représentatif de G^n soit compatible, il faut et il suffit qu'il n'existe pas dans G^n de système incompatible minimal. Montrons que de tels systèmes ne peuvent exister dans G^n.

Soit r^n un système incompatible minimal, inclus dans un système minimal représentatif R^n de G^n.

$\forall u \in r^n$, il existe au moins un groupe non conjonctif $F(u)$ contenant u et qui n'est représenté dans R^n que par u. Comme r^n est incompatible et que l'application de Γ à G^n ne permet pas d'introduire de nouveau groupe non conjonctif, on peut affirmer qu'il existe dans $\mathscr{F}^n$ un groupe non conjonctif $F(\bar{r}^n)$ tel que $F(\bar{r}^n) \subseteqq \bigcup_{u \in r^n} [F(u) - u]$. Ce groupe devant être représenté dans R^n, il existe donc un groupe $F(u)$ qui est représenté dans R^n par un arc différent de u, ce qui est en contradiction avec la définition de $F(u)$. Il ne peut donc exister de système incompatible minimal dans G^n. G^n est donc un graphe résolu associé à G^0 :

$$G^* = G^n.$$

COROLLAIRE : *Lorsqu'il n'existe pas d'ensemble de potentiels sur un graphe non conjonctif $G^0(X, U^0, \mathscr{F}^0)$, il existe un circuit de longueur positive dans la partie conjonctive du graphe résolu associé à G^0.*

Ceci est évident puisqu'il n'existe pas d'ensemble de potentiels ni de système incompatible minimal dans le graphe résolu associé.

6.6. Application à la caractérisation des séquences admissibles

Le graphe résolu obtenu ci-dessus exprime les conditions de séquence entre tâches imposées par la résolution des conflits pour l'utilisation des moyens, compte tenu de l'ensemble des contraintes du problème. Il caractérise donc bien l'ensemble des séquences admissibles. La recherche du graphe résolu peut se faire par des transformations du graphe plus élémentaires que Γ, en considérant à chaque pas un système incompatible minimal particulier. Dans cette optique, il est intéressant de faire intervenir en priorité des systèmes qui provoquent des simplifications de la structure du graphe (suppression d'arcs, enrichissement de la partie conjonctive). Ceci doit permettre d'alléger la procédure de détermination du graphe résolu. On peut noter que les conditions obtenues en cours de procédure constituent des conditions nécessaires d'admissibilité des séquences et qu'elles peuvent à ce titre présenter un intérêt.

Lorsqu'il n'existe pas d'ensemble de potentiels sur le graphe $G^0(X, U^0, \mathscr{F}^0)$, le graphe résolu est tel qu'il existe un circuit de longueur positive dans le graphe conjonctif $G_c^*(X, U_c^*)$. Le problème est alors infaisable. Cette infaisabilité peut cependant apparaître bien avant, pour un graphe intermédiaire $G^i(X, U^i, \mathscr{F}^i)$.

7. CARACTÉRISATION TEMPORELLE DES ORDONNANCEMENTS ADMISSIBLES. RECHERCHE DES SYSTÈMES INCOMPATIBLES MINIMAUX. PROCÉDURE ITÉRATIVE POUR LA CARACTÉRISATION DES ORDONNANCEMENTS ADMISSIBLES

Il n'est pas possible sur un graphe non conjonctif $G(X, U, \mathscr{F})$ de définir des ensembles de potentiels minimum et maximum. On peut tout au plus définir des ensembles de valeurs extrêmes prises par les potentiels pour l'ensemble des séquences admissibles. Ces valeurs ne sont pas simples à déterminer tant que les séquences admissibles sont inconnues. Il est assez facile, cependant, de déterminer un ensemble Δ de minorants de potentiels et un ensemble Δ' de majorants de potentiels tels que :

$$\Delta = \{ \delta_{00}, \delta_{ij}/\delta_{00}=0, \delta_{ij} \leqq \min_{T \in \mathscr{T}} t_{ij};\ i=1, \ldots, n;\ j=1, \ldots, g_i \},$$

$$\Delta' = \{ \delta'_{00}, \delta'_{ij}/\delta'_{00}=0, \delta'_{ij} \geqq \max_{T \in \mathscr{T}} t_{ij};\ i=1, \ldots, n;\ j=1, \ldots, g_i \},$$

où $\mathscr{T}$ est l'ensemble des ensembles de potentiels sur le graphe $G(X, U, \mathscr{F})$.

Les ensembles de potentiels minimum et maximum sur le graphe conjonctif $G_c(X, U_c)$ constituent des ensembles de minorants et de majorants de potentiels pour le graphe $G(X, U, \mathscr{F})$. Cette caractérisation temporelle approchée des ordonnancements admissibles peut être utilisée pour la recherche de systèmes incompatibles. En effet, considérons dans le graphe $G(X, U, \mathscr{F})$ un chemin $\mathscr{C}_{ij}^{vw}$ reliant le sommet (i, j) au sommet (v, w). Soient : L_{ij}^{vw}, la longueur du chemin $\mathscr{C}_{ij}^{vw}$; δ_{ij}, un minorant du potentiel t_{ij}; δ'_{vw}, un majorant du potentiel t_{vw}.

Alors, si $\delta'_{vw}-\delta_{ij}<L_{ij}^{vw}$, les arcs de $\mathscr{C}_{ij}^{vw}$ qui appartiennent à la partie non conjonctive de U constituent un système incompatible. Le système incompatible ainsi obtenu entraîne une transformation du graphe en introduisant des contraintes supplémentaires pour la résolution des conflits. Ces contraintes supplémentaires peuvent dans certains cas permettre d'affiner les valeurs des majorants et des minorants de potentiels (par exemple lorsqu'il y a enrichissement de la partie conjonctive du graphe). On peut ainsi concevoir une procédure itérative qui travaille par affinements successifs des caractéristiques temporelles et séquentielles des ordonnancements admissibles. L'affinement d'un type de caractéristique se répercute sur l'autre et vice versa, ce qui permet d'accélérer la procédure de recherche du graphe résolu, et plus concrètement des caractéristiques des ordonnancements admissibles.

8. ENSEMBLES CRITIQUES DE TACHES EN CONFLIT

Les tâches intervenant dans un même ensemble critique peuvent, compte tenu de leur localisation temporelle, ne jamais se trouver simultanément en cours d'exécution. Ainsi, ces tâches ne sont pas vraiment en conflit et il n'est pas utile, pour l'analyse du problème, de prendre en compte l'ensemble critique de tâches correspondant. Il peut alors en résulter une simplification importante dans l'analyse du problème.

8.1. Tâches relativement ordonnées

DÉFINITION : Deux tâches (i, j) (v, w) sont dites relativement ordonnées s'il existe dans le sous-graphe partiel conjonctif $G_c^\alpha(\{X-(0, 0)\}, U_c)$ soit un chemin reliant le sommet (i, j) au sommet (v, w) et de longueur $L_{ij}^{vw} \geqq p_{ij}$, soit un chemin reliant le sommet (v, w) au sommet (i, j) et de longueur $L_{vw}^{ij} \geqq p_{vw}$.

Deux tâches relativement ordonnées ne peuvent se trouver en conflit. Cette notion est indépendante des dates limites r_i et d_i.

8.2. Tâches absolument ordonnées

DÉFINITION : Deux tâches $(i, j)(v, w)$ sont dites absolument ordonnées s'il est possible de déterminer, sur le graphe $G^\alpha(X, U, \mathscr{F}^\alpha)$, des minorants de potentiels δ_{ij}, δ_{vw} et des majorants de potentiels δ'_{ij}, δ'_{vw} tels que

$$\delta_{ij} \geqq \delta'_{vw}+p_{vw} \qquad \text{ou} \qquad \delta_{vw} \geqq \delta'_{ij}+p_{ij}.$$

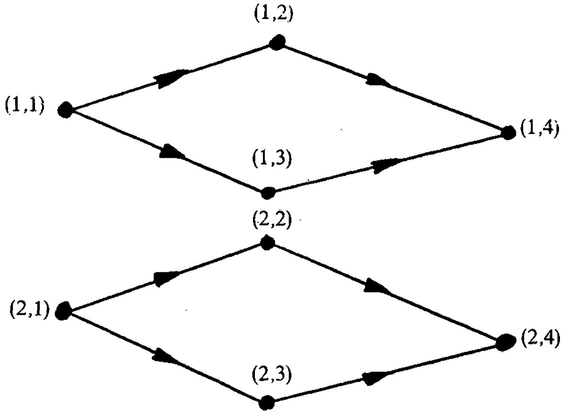
Deux tâches absolument ordonnées ne peuvent se trouver en conflit. Cette notion fait intervenir les dates limites r_i et d_i.

8.3. Ensemble critique de tâches en conflit

DÉFINITION : On appelle « ensemble critique de tâches en conflit » un ensemble critique de tâches tel qu'il n'existe pas deux tâches de cet ensemble qui soient relativement ou absolument ordonnées. L'analyse du problème peut s'effectuer à partir d'un graphe où seuls les groupes d'arcs non conjonctifs associés à des ensembles critiques de tâches en conflit sont considérés. Lorsque, par transformation, le graphe évolue, certaines tâches peuvent se trouver ordonnées entraînant ainsi la suppression de certains groupes d'arcs non conjonctifs.

9. EXEMPLE ILLUSTRATIF

On considère deux projets comportant chacun 4 tâches. Les contraintes de cohérence technologique sont représentées par les graphes potentiels-tâches suivants :



Les longueurs des arcs sont égales aux durées des tâches associées aux sommets initiaux (contraintes de succession stricte).

Les tâches nécessitent l'utilisation de 2 types de moyens k_1, k_2.

Les durées des tâches ainsi que les quantités de moyens nécessaires à leur réalisation sont indiquées dans le tableau de la figure 1.

Les moyens k_1 et k_2 sont disponibles en quantité limitée $q^{k_1}=8$ et $q^{k_2}=9$.

Les dates limites de réalisation des projets sont :

$$r_1=2, \qquad d_1=13,$$

$$r_2=0, \qquad d_2=12.$$

(*a*) *Définition de* $G^0(X, U^0, \mathscr{F}^0)$.

Il convient de déterminer les ensembles critiques de tâches en conflit. Pour cela, on calcule un premier ensemble de minorants et de majorants de potentiels,

(i, j)	p_{ij}	$q_{ij}^{k_1}$	$q_{ij}^{k_2}$
(1, 1)........	2	2	1
(1, 2)........	4	2	1
(1, 3)........	4	3	4
(1, 4)........	3	2	2
(2, 1)........	1	2	1
(2, 2)........	5	4	2
(2, 3)........	3	1	4
(2, 4)........	2	1	7

Figure 1

en déterminant les ensembles de potentiels minimum et maximum sur le graphe conjonctif $G_c^0(X, U_c^0)$ représenté sur la figure 2.

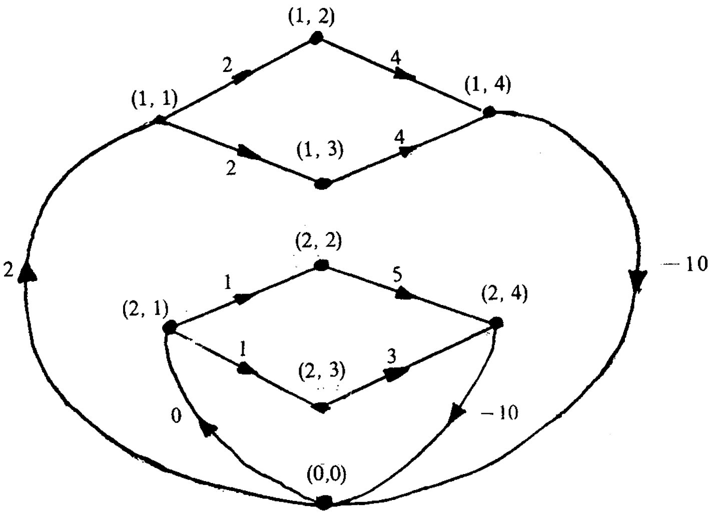


Figure 2

Les valeurs λ_{ij} et λ'_{ij} de ces potentiels minimum et maximum sont données par le tableau de la figure 3.

On trouve ainsi 3 ensembles de tâches critiques en conflit

$I_1 = \{(1, 2)(1, 3)(2, 2)\}$, $\quad I_2 = \{(1, 3)(2, 2)(2, 3)\}$, $\quad I_3 = \{(2, 4)(1, 3)\}$

La partie non conjonctive du graphe G^0 comprend donc 3 groupes d'arcs non conjonctifs F_1^0, F_2^0, F_3^0 représentés sur la figure 4.

(*b*) Recherche du graphe résolu.

Les minorants et majorants de potentiels obtenus en (*a*) permettent de trouver 6 systèmes incompatibles minimaux qui se réduisent à un seul arc, soit :

$$r_1^0 = [(1, 2)(1, 3)], \quad r_2^0 = [(1, 3)(1, 2)], \quad r_3^0 = [(1, 2)(2, 2)],$$
$$r_4^0 = [(1, 3)(2, 2)], \quad r_5^0 = [(1, 3)(2, 3)], \quad r_6^0 = [(2, 4)(1, 3)].$$

(i, j)	λ_{ij}^{0}	$\lambda_{ij}'^{0}$
(1, 1)...........	2	4
(1, 2)...........	4	6
(1, 3)...........	4	6
(1, 4)...........	8	10
(2, 1)...........	0	4
(2, 2)...........	1	5
(2, 3)...........	1	7
(2, 4)...........	6	10

Figure 3

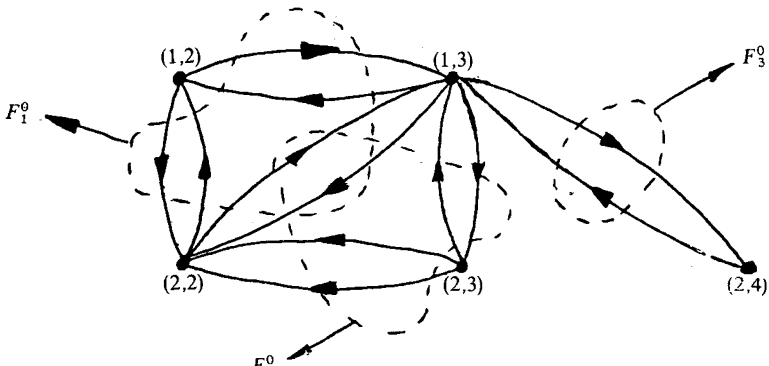


Figure 4

Ces systèmes incompatibles permettent de simplifier le graphe G^0 par suppression des arcs correspondants (ou introduction de groupes d'arcs non conjonctifs strictement inclus dans les précédents, ce qui est équivalent après simplification).

On obtient ainsi un nouveau graphe $G^1(X, U^1, \mathscr{F}^1)$ dont la partie conjonctive s'est enrichie de l'arc [(1, 3) (2, 4)] et dont la partie non conjonctive, qui comprend deux groupes F_1^1 et F_2^1, est représentée sur la figure 5.

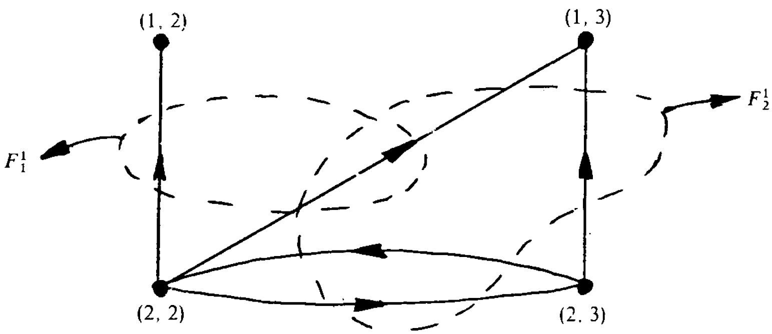


Figure 5

Il est alors possible d'affiner les valeurs des minorants et majorants de potentiels en prenant en compte l'arc [(1, 3) (2, 4)] et le groupe non conjonctif F_1^1. Les nouvelles valeurs λ_{ij}^1, $\lambda_{ij}'^1$ sont données dans le tableau de la figure 6.

(i, j)	λ_{ij}^1	$\lambda_{ij}'^1$
(1, 1)...........	2	4
(1, 2)...........	4	6
(1, 3)...........	4	6
(1, 4)...........	8	10
(2, 1)...........	0	0
(2, 2)...........	1	1
(2, 3)...........	1	7
(2, 4)...........	8	10

Figure 6

Ce nouvel ensemble de minorants et de majorants de potentiels permet de trouver un nouveau système incompatible minimal se réduisant à un arc :

$$r_1^1 = [(2, 3)\ (2, 2)].$$

On obtient un nouveau graphe $G^2(X, U^2, \mathscr{F}^2)$ dont la partie conjonctive est inchangée et dont la partie non conjonctive est représentée sur la figure 7.

Il n'est alors plus possible de modifier les valeurs des minorants et des majorants de potentiels, ni de trouver d'autre système incompatible. On peut donc écrire :

$$G^2(X, U^2, \mathscr{F}^2) = G^*(X, U^*, \mathscr{F}^*).$$

Les minorants et majorants de potentiels obtenus sont les valeurs limites des potentiels sur l'ensemble des séquences admissibles.

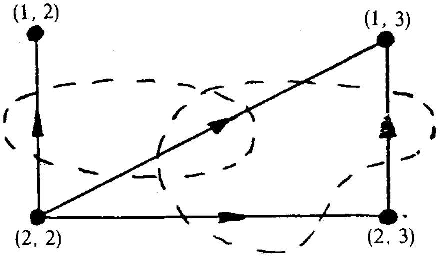


Figure 7

Il y a 3 séquences admissibles S_1, S_2, S_3 définies par :

$$S_1=[(2, 2), (1, 3)],$$
$$S_2=[(2, 2)(1, 2)], [(2, 2)(2, 3)],$$
$$S_3=[(2, 2)(1, 2)], [(2, 3)(1, 3)]$$

10. CONCLUSION

Les résultats présentés dans cet article permettent d'analyser le problème d'ordonnancement de projets avec limitation de ressources et de temps alloué. La caractérisation des ordonnancements admissibles met en évidence les degrés de liberté disponibles pour l'ordonnancement des tâches, compte tenu de ces limitations. Ces informations sont destinées à jouer un rôle d'aide à la décision pour la conception et la conduite de l'ordonnancement ([3, 4]).

Ces résultats, de caractère assez général, peuvent conduire à la définition de procédures d'analyse plus structurées pour des problèmes particuliers comme le problème d'ordonnancement d'atelier dans lequel les contraintes de moyens sont telles que tout ensemble critique de tâches est constitué de deux tâches (contraintes disjonctives) ([3, 5]).

BIBLIOGRAPHIE

1. A. BATTERSBY, *Méthodes modernes d'ordonnancement*, Dunod, Paris, 1967.
2. M. DIBON, *Ordonnancement et potentiel : la méthode M.P.M.*, Herman, Paris, 1969.
3. J. ERSCHLER, *Analyse sous contraintes et aide à la décision pour certains problèmes d'ordonnancement*, Thèse de Doctorat ès-Sciences, Université Paul-Sabatier, Toulouse, novembre 1976.
4. J. ERSCHLER, F. ROUBELLAT et J. P. VERNHES, *A Decision Making Process for the Real Time Control of a Production Unit*, Int. J. Produc. Res., vol. 14, n° 2, mars 1976.
5. J. ERSCHLER, F. ROUBELLAT et J. P. VERNHES, *Finding Some Essential Characteristics of the Feasible Solutions for a Scheduling Problem*, Operat. Res., vol. 24, n° 4, juillet-août 1976.
6. A. KAUFMANN et G. DESBAZEILLE, *La méthode du chemin critique*, Dunod, Paris, 1966.
7. I. NABESCHIMA, *Algorithms and Reliable Heuristic Programs for Multi-Project Scheduling with Resource Constraints and Related Parallel Scheduling*, University of Electrocommunications, Chofu, Tokio, Japon, 1973.
8. A. A. PRITSKER, L. J. WATTERS et P. M. WOLFE, *Multiproject Scheduling with Limited Resource : a Zero-One Programming Approach*, Manag. Sc., vol. 16, n° 1, septembre 1969.
9. B. ROY, *Algèbre moderne et théorie des graphes*, tome II, chap. VIII, Problèmes d'ordonnancement, Dunod, Paris, 1970.