RAIRO. RECHERCHE OPÉRATIONNELLE

Problèmes plaisans et délectables

RAIRO. Recherche opérationnelle, tome 14, nº 1 (1980), p. 95-96
<http://www.numdam.org/item?id=RO_1980__14_1_95_0>

Problèmes plaisans et délectables

Solution du problème paru dans

R.A.I.R.O., Recherche opérationnelle, vol. 12, n° 4, novembre 1978, p. 400.

Il s'agit de montrer, par des méthodes élémentaires, que

$$s_n = 1 + 1/2 + 1/3 + \ldots + 1/n$$

n'est jamais un entier dès que n est supérieur à 1. Et l'intérêt de ce problème vient du fait qu'il recèle un piège : si presque tous nos correspondants ont su l'éviter, la plupart de ceux qui, croyant avoir trouvé une solution « évidente », nous l'ont communiquée oralement s'y sont bel et bien laissé prendre.

Pour attaquer le problème, il paraît naturel de raisonner par récurrence. Calculons donc

$$s_2 = 3/2; \qquad s_3 = 11/6; \qquad s_4 = 25/12; \qquad s_5 = 137/60 \ldots$$

On constate que ces fractions ont *un numérateur impair et un dénominateur pair*. Et il suffit évidemment de montrer que cette particularité est vraie pour tout n (supérieur à 1) pour établir le résultat cherché. Essayons donc.

Si la propriété est vraie pour $n = 2\,m$, un calcul élémentaire l'étend à s_{n+1} : il n'est même pas utile de simplifier la fraction trouvée. Mais si on veut passer d'un nombre impair $n = 2\,m - 1$ au nombre pair suivant, on met $s_{2\,m}$ sous la forme du quotient de deux entiers pairs, et la méthode à suivre n'est pas évidente. Celles qui ont été proposées ont en fait une structure commune qui, si on l'utilise bien, permet d'*éviter* le raisonnement par récurrence.

Supposons en effet qu'on puisse trouver un entier p tel que :

$$p \leqq n < 2\,p; \tag{1}$$

$$\text{si } i \neq p \quad \text{et} \quad 1 \leqq i \leqq n, \text{ alors : } p \text{ ne divise pas } i. \tag{2}$$

Il est clair que (2) entraîne $n < 2\,p$. Soit m le plus petit multiple commun des entiers qui vérifient l'hypothèse de (2) : une propriété élémentaire montre que *m n'est pas divisible par p*. Or par simple réduction au même dénominateur, la différence : $s_n - 1/p$ se met sous la forme : a/m, où a est un entier positif quelconque. Par suite :

$$s_n = (a.p + m)/(m.p). \tag{3}$$

La méthode correcte consiste à choisir p égal à la plus grande puissance de 2, disons : 2^k, qui soit au plus égale à n (d'où $k \geqq 1$ puisque $n \geqq 2$). Alors (1) est vérifié par définition, et (2) s'en déduit. On voit aisément que m se met sous la forme : $b.2^{k-1}$, avec b *impair*; (3) s'écrit donc

$$s_n = (2\,a+b)/(b.2^k), \tag{4}$$

où le numérateur est impair, puisque b l'est, et le dénominateur pair, puisque $k \geqq 1$. Ceci établit donc le résultat cherché, d'une façon brève et parfaitement élémentaire.

D'autant plus élémentaire qu'en effet, *cette méthode n'utilise pas le raisonnement par récurrence :* elle est à la portée d'un élève de l'enseignement primaire! L'auteur du problème doit avouer qu'il n'avait pas trouvé cette élégante solution, due à M. J. Moreau de Saint-Martin.

Bien entendu, si on tient à raisonner par récurrence, on peut y parvenir. Mais on est alors conduit à associer à chaque entier positif x le plus grand entier h tel que x soit divisible par 2^h. (Autrement dit, h est l'exposant de 2 dans la décomposition de x en facteurs premiers.) La plupart des solutions reçues étudient quelques propriétés simples de la fonction $h(x)$ et en déduisent le résultat cherché par diverses méthodes dont la substance se ramène évidemment à démontrer la relation (4). Mais les calculs sont un peu longs, la voie à parcourir paraît bien sinueuse...

Une seconde méthode peut alors venir à l'esprit, qui consiste à choisir pour p un nombre premier (dépendant de n) : puisqu'il ne divise pas m, il ne divise pas non plus $a.p+m$; la valeur de s_n donnée par (3) n'est donc pas entière, élémentaire mon cher ami.

Ici encore, il est inutile de raisonner par récurrence : il suffit de trouver p premier, inférieur ou égal à n, et vérifiant (2). Oui, bien sûr, cela entraîne l'inégalité (1) : $p \leqq n < 2\,p$. Mais ne suffit-il pas pour cela de définir p comme le plus grand nombre premier au plus égal à n ? Voyons, c'est intuitivement évident...

Évident, peut-être, et vrai sans aucun doute. Car ce résultat, qui s'énonce aussi : « entre un nombre premier p et son double $2\,p$, on peut toujours trouver un *autre* nombre premier », est un théorème célèbre — mais pas du tout élémentaire — de théorie des nombres!

En plus de J. Moreau de Saint-Martin, déjà cité, nous avons reçu d'intéressantes réponses de MM. G. Caplain, D. Ceugniet, C. Devimeux et G. Raulin (Paris et environs), B. Fichet (Marseille), P. Jullien (Grenoble), M. L. Juncosa (Santa Monica, Californie), et de deux autres correspondants dont la signature, hélas, nous est restée indéchiffrable.