RAIRO. RECHERCHE OPÉRATIONNELLE

R. BADARD

Symétrie dans le coeur d'une économie aléatoire

RAIRO. Recherche opérationnelle, tome 17, nº 3 (1983), p. 261-283

<http://www.numdam.org/item?id=RO_1983__17_3_261_0>

R.A.I.R.O. Recherche opérationnelle/Operations Research
(vol. 17, n° 3, août 1983, p. 261 à 283)

SYMÉTRIE DANS LE COEUR D'UNE ÉCONOMIE ALÉATOIRE (*)

par R. BADARD (¹)

Résumé. — *Nous étudions une économie aléatoire dans laquelle chaque agent peut se trouver dans divers états économiques. Nous mettons en évidence certaines solutions symétriques du cœur et construisons une économie agrégée en vue de faciliter la détermination du cœur. Nous montrons que dans le cas de la concurrence parfaite, obtenue en multipliant à l'infini le nombre des agents de chaque type, le cœur symétrique de l'économie s'obtient exactement à partir de l'économie agrégée. De même dans ce cas le cœur symétrique s'identifie aux équilibres de Walras symétriques, concept utilisé par Malinvaud dans le cadre d'une économie avec risques individuels.*

Mots clés : Économie aléatoire; cœur; équilibre de Walras.

Abstract. — *We study a stochastic economy in which every agent can be in some economical states. We build some symmetrical solutions of the core and an aggregated economy. We show, in the case of perfect concurrence obtained by multiplying to infinity the number of the agents of every type, that the symmetrical core of the economy can be exactly obtained from the aggregated economy. In this case, the symmetrical core is exactly the set of the symmetrical Walras equilibria, concept which has been applied by Malinvaud to individual risks economy.*

Keywords: Stochastic economy; core; Walras equilibrium.

Notre travail s'inscrit dans le cadre d'une économie aléatoire dans laquelle se tiennent des marchés qui doivent traiter de tous les échanges présents et à venir, ceux-ci étant contingents à un ensemble d'événements aléatoires. Cette approche décrite dans [1, 2] peut être aménagée et rendue plus réalisable en prenant en compe les structures d'informations des agents et l'organisation d'une série de marchés dans le temps, comme le préconise Radner dans [7]. Il est évident que l'obtention de solutions nécessiterait le traitement d'une masse d'information incompatible avec les moyens de calcul actuels. Il est cependant des cas où, par le jeu des grands nombres, des agrégations remarquables peuvent être envisagées. Malinvaud [5, 6] a montré comment un équilibre pouvait, dans le cas de risques individuels, se concevoir avec un mécanisme d'assurance particulièrement efficace lorsque les agents économiques sont en grand nombre et se répartissent dans un nombre limité de classes. Hildenbrandt [4] a montré comment dans une économie avec un grand nombre d'agents, dont les préférences sont aléatoires, il se peut que résulte un

(*) Reçu février 1982.
(¹) Département informatique, Batiment n° 502, I.N.S.A. Lyon, 69621 Villeurbanne Cedex.

état social quasi certain. Cependant son approche est fort différente puisque il étudie la correspondance des équilibres en fonction de l'état de la nature.

Pour notre part nous nous sommes inspirés de la technique utilisée par Malinvaud mais avec des buts différents.

Nous nous efforçons de reconnaître dans une économie aléatoire un certain nombre de symétries simplificatrices dans le cœur et l'ensemble des équilibres, ceci en regroupant les agents en des classes « d'agents stochastiquement semblables » et les états de la nature en des « états sociaux agrégés ».

Ceci nous amène à construire une économie agrégée, beaucoup plus simple à traiter, et l'on montre alors comment le cœur symétrique de l'économie réduite permet de reconstituer une partie du cœur symétrique de l'économie aléatoire initiale. Ceci permet également de trouver des conditions pour que le cœur symétrique soit non vide.

On constate que lorsque les agents économiques sont en nombre fini il est pratiquement exclu d'avoir égalité entre l'ensemble des allocations symétriques dont l'image est dans le cœur symétrique de l'économie réduite, et le cœur symétrique proprement dit. Par contre, on montre que dans le cas d'une économie de concurrence parfaite obtenue en multipliant à l'infini le nombre des agents de chaque type, à la manière utilisée par Debreu et Scarf [3], le cœur symétrique de l'économie aléatoire correspond et s'obtient complètement à partir du cœur symétrique de l'économie réduite associée.

Dans le cadre de la concurrence parfaite nous comparons alors le cœur symétrique et les équilibres de Walras symétriques, et nous montrons qu'ils se correspondent.

I. RAPPELS CONCERNANT LES ÉCONOMIES ALÉATOIRES DE ARROW-DEBREU

Soit $B=\{1, 2, \ldots, m\}$ un ensemble fini d'états avec des probabilités $p(b) \geqq 0$, $\sum_{b=1}^{m} p(b)=1$, et un ensemble fini $A=\{1, 2, \ldots, n\}$ d'agents économiques.

Tout agent $a \in A$ est décrit par la donnée de :

– Une correspondance de consommations admissibles $X_a : B \lessdot R^l$, où R^l est l'espace réel à l dimensions).

– Des ressources $e_a : B \rightarrow R^l$.

– Une correspondance de production $Y_a : B \lessdot R^l$.

– Des préférences décrites par des fonctions d'utilité $u_a : B \rightarrow U$, où U est un ensemble de fonctions d'utilité (applications de R^l dans R), et l'on suppose que chaque agent raisonnera en espérance d'utilité c'est-à-dire en utilisant $\sum_b u_a(b)\,p(b)$.

Pour mettre en évidence des symétries nous adopterons la présentation suivante, dans laquelle on répertorie les états économiques individuels.

DÉFINITION 1.1 : Soit un ensemble $I=\{1, 2, \ldots, h\}$ d'états économiques dans lesquels peuvent se trouver les agents.

A tout $i \in I$ sont associés :

– Un ensemble $X_i \subset R^l$ (des consommations admissibles).

– Un point $e_i \in R^l$ (les ressources initiales).

– Un ensemble $Y_i \subset R^l$ (traduisant les possibilités de production, le savoir-faire...).

– Une utilité $u_i : R^l \to R$.

L'économie aléatoire ε est décrite par une application $i : A \times B \to I$ qui associe à tout état $b \in B$ et agent $a \in A$ l'état économique individuel dans lequel se trouve l'agent a.

On a donc $X_a(b) = X_{i(a,b)}$, $Y_a(b) = Y_{i(a,b)}, \ldots$

DÉFINITION 1.2 : Une S allocation, où S est un ensemble non vide de A, est une application $x : S \times B \to R^l$ qui vérifie : pour tout $a \in S$ et $b \in B$ $x(a, b) \in X_{i(a,b)}$ (les consommations sont admissibles) $\sum_{a \in S} x(a, b) \in \sum_{a \in S} (e_{i(a,b)} + Y_{i(a,b)})$ pour tout $b \in B$ (compatibilité entre les consommations, les ressources et le savoir faire des agents de S).

Lorsque $S = A$ on parle simplement d'allocation.

En vue de définir le cœur de l'économie on définit ce qu'est le blocage et un optimum de Paréto.

DÉFINITION 1.3 : Une S-allocation y bloque une allocation x si elle assure une espérance d'utilité plus grande à tous les agents de S, en d'autres termes si :

$$\sum_{b \in B} u_{i(a,b)}(y(a, b)) \,.\, p(b) > \sum_{b \in B} u_{i(a,b)}(x(a, b)) \,.\, p(b), \qquad \forall\, a \in S.$$

DÉFINITION 1.4 : Une allocation x est dite être un optimum de Paréto si il n'existe pas d'allocation y qui permette d'augmenter le contentement de certains agents sans diminuer celui des autres, formellement y vérifierait :

$$\sum_{b \in B} u_{i(a,b)}(y(a, b)) \,.\, p(b) \geqq \sum_{b \in B} u_{i(a,b)}(x(a, b))\, p(b),$$

ceci pour tout $a \in A$ avec au moins une inégalité stricte.

DÉFINITION 1.5 : Le cœur de l'économie ε est constitué des allocations qui sont optimales de Paréto et ne sont bloquées par aucune S-allocation.

II. SYMÉTRIE DANS LE COEUR DE ε

Traitons tout d'abord un exemple simple.

Exemple : Supposons que l'on ait deux états économiques individuels, chacun étant défini par un ensemble de production, un ensemble de consommations admissibles, une fonction d'utilité et des ressources.

Soit $\{ Y_1, X_1, u_1, e_1 \}$ et $\{ Y_2, X_2, u_2, e_2 \}$ ces deux états. Considérons alors une économie aléatoire constituée de 5 agents et de 9 « états de la nature », en donnant pour tout couple (agent-état) l'état économique individuel de l'agent en question, ceci sous la forme du tableau suivant :

		États de la nature								
		b_1	b_2	b_3	b_4	b_5	b_6	b_7	b_8	b_9
Agents	1	1	1	2	2	1	2	2	2	2
	2	1	2	1	2	2	1	2	2	2
	3	1	2	2	1	2	2	1	2	2
	4	2	1	1	1	2	2	2	1	2
	5	2	2	2	2	1	1	1	2	1
		α_1	$\frac{1}{6}\alpha_2$	$\frac{1}{6}\alpha_2$	$\frac{1}{6}\alpha_2$	$\frac{1}{6}\alpha_2$	$\frac{1}{6}\alpha_2$	$\frac{1}{6}\alpha_2$	$\frac{1}{2}\alpha_3$	$\frac{1}{2}\alpha_3$

Probabilités des états de la nature,
avec $\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3=1$ et α_1, α_2, α_3 positifs.

DÉFINITION 2.1 : Considérons des partitions $\{B_1 B_2 \ldots B_k \ldots\}$ et $\{A_1 A_2 \ldots A_j \ldots\}$ de B et A. Définissons $\eta_{ij}(b)$ et $p_{ik}(a)$ comme :

— $\eta_{ij}(b)$ est la proportion des agents de la classe A_j qui sont dans l'état individuel i pour l'état de la nature b;

— $p_{ik}(a)$ est la probabilité que l'agent a se trouve dans l'état individuel i conditionnellement au fait que l'état de la nature soit dans B_k.

Nous dirons que les B_k définissent des états sociaux agrégés et les A_j des classes d'agents stochastiquement semblables si et seulement si :

— $\forall\, b_1, b_2 \in B_k \Rightarrow \eta_{ij}(b_1)=\eta_{ij}(b_2)=\eta_{ijk}$;

— $\forall\, a_1, a_2 \in A_j \Rightarrow p_{ik}(a_1)=p_{ik}(a_2)=p_{ijk}$.

Nous noterons N_j l'effectif de la classe A_j et p_k la probabilité de l'état agrégé B_k.

On vérifie aisément que l'on a $p_{ijk}=\eta_{ijk}$.

Si nous reprenons l'exemple précédent on distingue 2 classes d'agents stochastiquement semblables et 3 états économiques agrégés. Les classes d'agents sont : $A_1=\{1,2,3\}$ et $A_2=\{4,5\}$ et les états économiques agrégés $B_1=\{1\}$, $B_2=\{2,3,4,5,6,7\}$ et $B_3=\{8,9\}$. En effet, dans B_1 les agents de A_1 sont tous dans l'état 1 et ceux de A_2 dans l'état 2.

Pour B_2 1/3 des agents de A_1 sont dans l'état 1 et 2/3 dans l'état 2, et 1/2 des agents de A_2 sont dans l'état 1, et 1/2 des agents de A_2 sont dans l'état 2.

Pour B_3, tous les agents de A_1 sont dans l'état 2, 1/2 des agents de A_2 sont dans l'état 1 et donc l'autre moitié se trouve dans l'état 2.

On vérifie aisément que les agents d'une même classe ont les mêmes probabilités de se trouver dans les divers états économiques individuels et ceci à l'intérieur de tout état social agrégé, par exemple pour B_2 les agents de A_1 ont une probabilité de $1/3.\alpha_2$ d'être dans l'état 1 et une probabilité de $2/3.\alpha_2$ d'être dans l'état 2.

L'approche de Malinvaud [5, 6] consiste à se définir *a priori* des classes d'agents semblables, disons les A_j avec effectifs N_j, et de considérer que ceux-ci ont des probabilités p_{ij} de se trouver dans l'état individuel i, ceci de façon indépendante. Si le nombre d'états individuels est e la situation est modélisée par une économie aléatoire à $\prod_j e^{N_j}$ états de la nature et un calcul élémentaire montre que dans ce cas le nombre d'états sociaux agrégés est $\prod_j C_{N_j+e-1}^{e-1}$.

Par exemple soit $A_1=\{a_1\,a_2\}$ et $A_2=\{a_3\}$, $I=\{1,2\}$ on obtient alors :

	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5	b_6	b_7	b_8
a_1.	1	1	2	2	1	1	2	2
a_2.	1	2	1	2	1	2	1	2
a_3.	1	1	1	1	2	2	2	2

Les états sociaux agrégés étant : $B_1=\{b_1\}$, $B_2=\{b_2\,b_3\}$, $B_3=\{b_4\}$, $B_5=\{b_6\,b_7\}$ et $B_6=\{b_8\}$.

Cette approche, plus particulière, s'explique par le fait qu'un de ses buts est l'étude asymptotique des équilibres symétriques, lorsque les effectifs de chaque classe tendent vers l'infini, justifiant un mécanisme simple d'assurance couvrant les risques individuels.

DÉFINITION 2.2 : Une allocation ou une S-allocation x est dite symétrique si pour tout j tel que $S \cap A_j \neq \emptyset$ et tout k on a :

$$\forall a \in S \cap A_j \quad \text{et} \quad b \in B_k, \qquad x(a, b) = x(i(a, b)).$$

Elle est complètement décrite par la donnée de S et des quantités x_{ijk} (c'est une fonction de la classe A_j de l'état social agrégé B_k et de l'état économique individuel i), nous la noterons $\{x_{ijk}\}$.

Pour une allocation symétrique il est clair que la consommation totale dans un état de la nature b ne dépend que de l'état social agrégé B_k auquel appartient b. En effet soit $b \in B_k$ la consommation totale est :

$$\sum_j N_j \sum_{i \in I} (x_{ijk} \cdot \eta_{ijk}) = \sum_j N_j \sum_{i \in I} (x_{ijk} \cdot p_{ijk}).$$

Le contentement associé à l'allocation symétrique $\{x_{ijk}\}$ ne dépend que de la classe d'agents, celui-ci est exprimé pour tout $a \in A_j$ par : $\sum_k (\sum_i u_i(x_{ijk}) \cdot p_{ijk}) \cdot p_k$. Ces remarques nous suggèrent la construction d'une économie agrégée.

III. ÉCONOMIE AGRÉGÉE $\bar{\varepsilon}$ ASSOCIÉE A ε

C'est une économie aléatoire $\bar{\varepsilon}$ constituée du même nombre d'agents regroupés en des classes d'agents identiques (qui correspondent aux classes d'agents stochastiquement semblables) et ayant pour états sociaux les états sociaux agrégés de ε.

Nous noterons encore A_j les classes d'agents et B_k les états sociaux agrégés. Aux agents de A_j dans l'état social B_k sont associés :

– Un ensemble de consommations admissibles $\overline{X}_{jk} = \sum_{i \in I} X_i \cdot p_{ijk}$.

– Des ressources $\bar{e}_{jk} = \sum_{i \in I} e_i \cdot p_{ijk}$.

– Un ensemble de production $\overline{Y}_{jk} = \sum_{i \in I} Y_i \cdot p_{ijk}$.

LEMME 3.1 : *Il est clair qu'à toute allocation symétrique de* ε, *décrite par les* x_{ijk}, *il correspond une allocation symétrique de* $\bar{\varepsilon}$ *décrite par les :*

$$\bar{x}_{jk} = \sum_{i \in I} x_{ijk} \cdot p_{ijk}.$$

Preuve : Si $\{x_{ijk}\}$ est une allocation on a :

$$x_{ijk} \in X_i \qquad \text{donc} \quad \sum_{i \in I} x_{ijk} p_{ijk} \in \sum_{i \in I} X_i . p_{ijk} \quad \Rightarrow \quad \bar{x}_{jk} \in \bar{X}_{jk},$$

$$\sum_j N_j \sum_{i \in I} x_{ijk} . p_{ijk} \in \sum_j N_j \sum_{i \in I} (e_i + Y_i) . p_{ijk} \quad \Rightarrow \quad \sum_j N_j \bar{x}_{jk} \in \sum_j N_j (\bar{e}_{jk} + \bar{Y}_{jk}).$$

Ceci prouve que $\{\bar{x}_{jk}\}$ est une allocation symétrique de $\bar{\varepsilon}$.

On peut remarquer que en raison de la symétrie de l'allocation $\{x_{ijk}\}$ on évite toute ambiguïté (qui apparaîtrait dans le cas non symétrique) liée au fait que si un ensemble $X \subset R^l$ n'est pas convexe alors $\alpha X + \beta X \neq (\alpha + \beta) X$.

En effet dans le calcul de la consommation totale si deux agents de A_j dans le même état individuel i consommaient des quantités différentes alors la sommation de ces quantités appartiendrait à $X_i + X_i$ que l'on ne peut confondre avec $2 X_i$ si X_i n'est pas convexe.

Pour agréger les préférences le problème est plus délicat car connaissant $\{\bar{x}_{jk}\}$ il n'est pas possible de déduire une allocation symétrique $\{x_{ijk}\}$ et d'utiliser l'espérance d'utilité correspondante. On peut par contre associer à $\bar{x}_{jk}$ diverses quantités x_i telles que :

$$\sum_{i \in I} x_i . p_{ijk} = \bar{x}_{jk}, \; x_i \in X_i$$

et chercher celles qui assurent une espérance d'utilité conditionnelle à B_k maximale. Il est clair que ceci permet d'associer à $\{\bar{x}_{jk}\}$ les allocations symétriques correspondantes $\{x_{ijk}\}$ de ε et en fait de considérer celles qui assurent une espérance d'utilité maximale (si elles existent).

Les utilités agrégées $\bar{u}_{jk}$ de $\bar{\varepsilon}$ seront donc définies par :

$$\bar{u}_{jk}(\bar{x}_{jk}) = \max \left\{ \sum_{i \in I} u_i(x_i)\, p_{ijk} \,\middle|\, x_i \in X_i, \sum_{i \in I} x_i . p_{ijk} = \bar{x}_{jk} \right\}$$

dans la mesure où il existe un élément maximal.

Premier groupe d'hypothèses

Dans la suite nous supposerons que l'économie ε vérifie les hypothèses classiques suivantes (R^l étant muni de la topologie classique) :

H1 Les ensembles X_i sont fermés, convexes, non vides et il existe un point m de R^l tel que $m + R^l_+ \supset X_i$, ($R^l_+ = \{ x \in R^l \mid x_i \geqq 0$ pour tout $i \in \{1, \ldots, l\}\}$.

H2 Les ensembles Y_i sont fermés, convexes, non vides et $Y_i \cap R^l_+ = \{0\}$. Il existe un cône semi-positif qui contient les cônes asymptotiques des Y_i, (un cône C est dit semi-positif si pour tout point x_1 et tout point x_2 de C, $x_1+x_2=0 \Rightarrow x_1=x_2=0$).

H3 Les fonctions d'utilité u_i sont continues.

Nous allons donner les propriétés induites par ces hypothèses sur l'économie agrégée. Ces propriétés sont assez longues à établir mais ne présentent pas de grandes difficultés aussi la preuve sera-t-elle fournie en annexe.

PROPOSITION 3.1 : *L'économie agrégée $\bar{\varepsilon}$ vérifie les hypothèses précédentes, et en particulier l'utilité $\bar{u}_{jk}$ existe et est continue.*

IV. EXISTENCE ET COMPARAISON DES COEURS SYMÉTRIQUES DE ε ET $\bar{\varepsilon}$

Le cœur symétrique est l'ensemble des allocations du cœur de l'économie ε qui sont symétriques, nous le noterons $\mathscr{C}_0$, et de même $\overline{\mathscr{C}}_0$ aura la même signification en ce qui concerne $\bar{\varepsilon}$.

Nous appellerons cœur réduit symétrique l'ensemble $\mathscr{C}_1$ des allocations symétriques de l'économie aléatoire de départ qui sont l'image inverse d'une allocation symétrique du cœur $\overline{\mathscr{C}}_0$ de l'économie réduite, en d'autres termes $\{x_{ijk}\}\in\mathscr{C}_1$ si et seulement si $\{\sum_i x_{ijk}.p_{ijk}\}$ appartient à $\overline{\mathscr{C}}_0$ et $\sum_i u_i(x_{ijk})\,p_{ijk}=\bar{u}_{jk}(\sum_i x_{ijk}p_{ijk})$.

Comme nous l'avons vu il y a le même nombre d'agents économiques dans ε et $\bar{\varepsilon}$ et les classes d'agents stochastiquement semblables de ε correspondent aux classes d'agents identiques de $\bar{\varepsilon}$, aussi confondrons nous certaines notations. Ainsi parlant de l'agent a il s'agira, sauf précision particulière, aussi bien d'un agent de ε que de son correspondant dans $\bar{\varepsilon}$.

Nous allons successivement montrer que l'obtention du cœur $\overline{\mathscr{C}}_0$ de $\bar{\varepsilon}$ ne nécessite que la considération des allocations symétriques de $\bar{\varepsilon}$, puis que dans l'économie initiale nous pouvons construire simplement $\mathscr{C}_1$ et que celui-ci est un sous-ensemble, en général strict, de $\mathscr{C}_0$.

Ces résultats montrent l'intérêt d'une telle agrégation, lorsqu'elle existe, pour construire un sous-ensemble du cœur de l'économie initiale.

1. Résultats concernant le cœur $\overline{\mathscr{C}}_0$

Donnons deux lemmes qui montrent clairement pourquoi on peut se restreindre aux allocations symétriques de l'économie réduite. Les preuves, constructives, sont données en annexe.

LEMME 4.1 : *Une allocation symétrique de l'économie réduite, bloquée par une S allocation est bloquée par une S allocation symétrique si les espérances d'utilité* $\sum_k \bar{u}_{jk} p_k$ *sont faiblement quasi-concaves, c'est-à-dire si :*

$$\sum_k \bar{u}_{jk}(x_k)\, p_k \geqq \sum_k \bar{u}_{jk}(y_k)\, p_k \quad \Rightarrow \quad \textit{pour tout } \alpha \in [01]$$

et

$$z_k = \alpha\, x_k + (1-\alpha)\, y_k$$

on a :

$$\sum_k \bar{u}_{jk}(z_k)\, p_k \geqq \sum_k \bar{u}_{jk}(y_k)\, p_k.$$

LEMME 4.2 : *Une allocation symétrique de l'économie réduite non optimum de Paréto, est également non optimum de Paréto dans l'ensemble des allocations symétriques si les espérances d'utilité* $\sum_k \bar{u}_{jk} . p_k$ *sont quasi concaves, c'est-à-dire si :*

$$\sum_k \bar{u}_{jk}(x_k)\, p_k > \sum_k \bar{u}_{jk}(y_k\, p_k \quad \Rightarrow \quad \textit{pour tout } \alpha \in]0, 1[$$

et

$$z_k = \alpha\, x_k + (1-\alpha)\, y_k$$

on a :

$$\sum_k \bar{u}_{jk}(z_k)\, p_k > \sum_k \bar{u}_{jk}(y_k) . p_k.$$

Ces deux lemmes montrent que pour la recherche des éléments de $\overline{\mathscr{C}}_0$ on peut se contenter de raisonnements dans l'ensemble des allocations symétriques, si pour tout j les espérances d'utilité $\sum_k \bar{u}_{jk} . p_k$ sont quasi concaves. En particulier si les fonctions $\bar{u}_{jk}$ sont concaves alors les espérances $\sum_k \bar{u}_{jk} . p_k$ le sont également et par conséquent sont quasi concaves.

PROPOSITION 4.1 : *On considère une économie aléatoire dans laquelle l'ensemble des états économiques individuels vérifie les hypothèses* H1, H2, H3 *et l'hypothèse* H4 *suivante :*

H4 *Les fonctions d'utilité* u_i *sont concaves. Alors le cœur et le cœur symétrique de l'économie réduite correspondante sont non vides.*

Preuve : Il est connu que la non vacuité du cœur d'une économie est assurée si on ajoute aux hypothèses H1, H2, H3 (vérifiées par l'économie réduite elle-même) des hypothèses de concavité des utilités.

Pour le cœur symétrique $\overline{\mathscr{C}}_0$ il est clair que les mêmes hypothèses assurent la non vacuité, puisque d'après les lemmes précédents on peut se restreindre aux allocations et S allocations symétriques. On peut alors vérifier que le jeu de marché associé à l'économie réduite est compensé, et ainsi appliquer le théorème de Scarf.

Il nous faut montrer que les espérances d'utilité $\sum u_{jk} . p_k$ sont concaves ce qui est trivial si l'on prouve que les $\bar{u}_{jk}$ le sont.

Pour ce faire considérons deux points x et y de $\overline{X}_{jk}$, et $\alpha \in [0, 1]$, on a :

$$\bar{u}_{jk}(x) = \max \left\{ \sum_i u_i(x_i)\, p_{ijk} \,\middle|\, x_i \in X_i \quad \text{et} \quad \sum_i x_i p_{ijk} = x \right\} = \sum_i u_i(x_i^+)\, p_{ijk},$$

et de même pour y, on a $\bar{u}_{jk}(y) = \sum_i u_i(y_i^+)\, p_{ijk}$.

Or $\alpha\, x_i^+ + (1-\alpha)\, y_i^+ \in X_i$ en raison de la convexité de X_i, on a aussi :

$$\sum_i (\alpha\, x_i^+ + (1-\alpha)\, y_i^+)\, p_{ijk} = \alpha\, x + (1-\alpha)\, y,$$

ce dont on déduit que :

$$\begin{aligned} \bar{u}_{jk}(\alpha\, x + (1-\alpha)\, y) &\geqq \sum_i u_i(\alpha\, x_i^+ + (1-\alpha)\, y_i^+)\, p_{ijk} \\ &\geqq \sum_i (\alpha\, u_i(x_i^+) + (1-\alpha)\, u_i(y_i^+))\, p_{ijk} = \alpha\, \bar{u}_{jk}(x) + (1-\alpha)\, \bar{u}_{jk}(y). \end{aligned}$$

2. Résultats concernant les cœurs $\mathscr{C}_0$ et $\mathscr{C}_1$

Nous supposerons par la suite que ε vérifie les hypothèses H1, H2, H3, H4. Nous allons établir un lien entre les cœurs symétriques de l'économie initiale et de l'économie réduite, ceci en montrant que l'image $\mathscr{C}_1$ de $\overline{\mathscr{C}}_0$ est un sous-ensemble de $\mathscr{C}_0$. Nous en déduirons des conditions de non-vacuité de $\mathscr{C}_0$.

LEMME 4.3 : *Soit* $\{x_{ijk}\}$ *une allocation symétrique de l'économie* ε, *telle que :*

$$\sum_i u_i(x_{ijk})\, p_{ijk} = \bar{u}_{jk}\left(\sum_i x_{ijk} p_{ijk}\right),$$

alors si $\{x_{ijk}\}$ *n'est pas optimum de Paréto il lui correspond une allocation symétrique* $\{\bar{x}_{jk}\} = \{\sum_i x_{ijk} p_{ijk}\}$ *dans l'économie réduite qui n'est pas optimum de Paréto. De plus* $\{x_{ijk}\}$ *n'est pas optimum de Paréto même si l'on se restreint à l'ensemble des allocations symétriques de* ε.

LEMME 4.4 : *Soit* $\{x_{ijk}\}$ *une allocation symétrique de l'économie* ε, *telle que :*

$$\sum_i u_i(x_{ijk})\, p_{ijk} = \bar{u}_{jk}\Big(\sum_i x_{ijk}\, p_{ijk}\Big),$$

alors si $\{x_{ijk}\}$ *est bloquée par une S-allocation il lui correspond une allocation symétrique, décrite par les* $\bar{x}_{jk} = \sum_i x_{ijk}\, p_{ijk}$, *de l'économie réduite qui est bloquée par une S-allocation symétrique. Par contre on ne peut prétendre en général que* $\{x_{ijk}\}$ *est bloquée par une S-allocation symétrique de* ε *(une S-allocation y telle que les quantités* $y(a, b)$ *ne dépendent que de* i, j, k*).*

Les preuves de ces deux lemmes sont données en annexe. Leur principe consiste en une symétrisation des allocations blocantes. Toutefois cette construction, pour le lemme 4.4, n'est qu'imparfaite, on montre simplement que ce procédé fournit une « pseudo-allocation » à laquelle correspond dans l'économie réduite des allocations symétriques (en fait la contrainte entre emplois et ressources n'est vérifiée qu'en moyenne sur les états sociaux agrégés).

A partir de ces deux lemmes on montre aisément une proposition de comparaison des cœurs $\mathscr{C}_0$ et $\mathscr{C}_1$ de l'économie de départ, proposition qui permet d'assurer la non-vacuité de ces cœurs symétriques.

PROPOSITION 4.2 : *Sous les hypothèses* H1 *à* H4 *on montre que* $\mathscr{C}_1$ *est inclus dans* $\mathscr{C}_0$ *et par conséquent que ces ensembles sont non vides.*

Démonstration : Notons que $\mathscr{C}_1$ est assez facile à obtenir puisque il s'obtient à partir de $\overline{\mathscr{C}}_0$, ce qui permet de raisonner uniquement sur les allocations symétriques de l'économie agregée, qui elle même est plus simple que l'économie de départ.

Considérons une allocation symétrique $\{\bar{x}_{jk}\}$ du cœur symétrique $\overline{\mathscr{C}}_0$ de l'économie agrégée, et soit $\{x_{ijk}\}$ une allocation symétrique telle que :

$$\bar{u}_{jk}(\bar{x}_{jk}) = \sum_i u_i(x_{ijk})\, p_{ijk},$$

par définition elle appartient à $\mathscr{C}_1$. Montrons qu'elle appartient aussi à $\mathscr{C}_0$, pour ce faire supposons qu'elle ne soit pas optimum de Paréto, alors le lemme 4.3 permettrait d'affirmer que $\{\bar{x}_{jk}\}$ n'appartient pas à $\overline{\mathscr{C}}_0$ ce qui est contraire à l'hypothèse.

De même si l'on suppose que $\{x_{ijk}\}$ est bloquée par une S-allocation, le lemme 4.4 permet d'affirmer que $\{\bar{x}_{jk}\}$ est elle-même bloquée par une S-allocation, ce qui est encore contraire à l'hypothèse. On conclut que $\{x_{ijk}\}$ est une allocation symétrique du cœur. Enfin comme avec les hypothèses de la proposition on peut affirmer que $\overline{\mathscr{C}}_0$ est non vide, on peut en déduire que $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_0$ sont eux-mêmes non vide.

V. TENDANCE VERS UNE ÉCONOMIE DE CONCURRENCE PARFAITE

Nous avons montré que $\mathscr{C}_1 \subset \mathscr{C}_0$, car dans le lemme 4.4 nous avions noté que $\{x_{ijk}\}$ peut être bloquée sans que ce le soit par une S-allocation symétrique. Pour que l'on puisse prétendre à l'égalité, il faudrait que se donnant le nombre d'agents de la classe A_j qui interviennent dans une coalition, il soit possible de trouver un même nombre d'agents de cette classe de façon que la répartition de ces agents dans les états économiques individuels, dépende uniquement de l'état économique agrégé. Ceci est une condition forte qui est réalisée si tout agent de A_j est supposé composé d'un continuum d'individus identiques. Aussi adopterons-nous une technique analogue à celle développée par Debreu et Scarf dans [3] qui consiste à multiplier le nombre d'agents en considérant que chaque agent de l'économie est constitué de n individus identiques.

Ainsi, lorsque n tend vers l'infini et qu'en fait tout se passe comme si chaque agent était composé d'une infinité d'agents identiques la condition précédente est vérifiée. En effet, si l'on se donne la proportion des agents d'une classe qui interviennent dans une coalition on peut considérer une coalition analogue dans laquelle cette même proportion est appliquée à tous les agents de la classe. Cette coalition est alors symétrisable, ce qui permet d'affirmer que les cœurs symétriques de ε et $\bar{\varepsilon}$ se correspondent exactement.

Pour plus de précision considérons les économies ε_n dans lesquelles chaque agent de l'économie initiale a été décomposé en n individus absolument identiques, il est normal de considérer que les ressources, les ensembles de production et de consommation deviennent e_i/n, Y_i/n et X_i/n. Les fonctions d'utilité, quant à elles, seront prises égales à $u_i(nx)$, enfin on associera à ε_n l'économie réduite $\bar{\varepsilon}_n$ comme ce fut fait précédemment. En raison des hypothèses de convexité des X_i, Y_i et de concavité des u_i on peut se contenter de raisonnements dans l'ensemble des allocations et des S-allocations qui traitent de la même façon les individus correspondant à un même agent initial. Dans ces conditions une coalition est définie par la donnée de nombres $s(a) \in \{0, 1/n, \ldots, k/n, \ldots, 1\}$ qui indiquent la proportion des n agents constituant l'agent initial a, qui interviennent dans cette coalition. On note $S = \{a \mid s(a) > 0\}$ le support de l'application s de l'ensemble des agents a dans l'ensemble $\{0, 1/n, \ldots, k/n, \ldots, 1\}$.

Une s-allocation est constituée de quantités $x(a, b)$ telles que chaque individu élémentaire qui compose a et intervient dans la coalition, reçoive les quantités $(1/n)\,x(a, b)$, dans ces conditions il est clair qu'une s-allocation est telle que :

$x(a, b) \in X_{i(a,b)}$, ceci pour tout b et tout a tel que $s(a) > 0$,

$$\sum_a s(a)\,x(a, b) \in \sum_a s(a)\,(e_{i(a,b)} + Y_{i(a,b)}),$$

ceci pour tout b.

Une s-allocation x bloque une allocation y si :

$$\sum_{b \in B} u_{i(a,b)}(x(a, b))\,p(b) > \sum_{b \in B} u_{i(a,b)}(y(a, b))\,p(b),$$

ceci pour tout a tel que $s(a) > 0$.

Les mêmes remarques peuvent être faites pour l'économie réduite correspondante.

Cette formulation élégante introduite par Debreu et Scarf permet de comparer les cœurs des diverses économies ε_n.

Le cœur symétrique $\mathscr{C}_0^n$ de ε_n n'est autre que l'ensemble des allocations symétriques $\{x_{ijk}\}$ qui sont optima de Paréto et qui ne sont bloquées par aucune s-allocation avec $s(a) \in \{0, 1/n, \ldots, k/n, \ldots, 1\}$, de même le cœur symétrique $\overline{\mathscr{C}}_0^n$ de $\bar{\varepsilon}_n$ n'est autre que l'ensemble des allocations symétriques $\{\bar{x}_{jk}\}$ qui sont optima de Paréto et qui ne sont bloquées par aucune s-allocation.

En raison des hypothèses de continuité et de convexité vérifiées par ε et $\bar{\varepsilon}$ on peut montrer comme dans [3] que $\mathscr{C}_0^n$ et $\overline{\mathscr{C}}_0^n$ sont des compacts non vides, ainsi que $\bigcap_n \mathscr{C}_0^n = \mathscr{C}_0^\infty$ et $\bigcap_n \overline{\mathscr{C}}_0^n = \overline{\mathscr{C}}_0^\infty$, $\mathscr{C}_0^\infty$ et $\overline{\mathscr{C}}_0^\infty$ étant l'ensemble des allocations symétriques de ε et $\bar{\varepsilon}$, respectivement, qui sont optima de Paréto et qui ne sont bloquées par aucune s-allocation, avec $s(a) \in [0\ 1]$.

On pourrait vérifier aisément que pour trouver $\mathscr{C}_0^\infty$ on peut se contenter de raisonner sur les s-allocations symétriques, c'est-à-dire que le blocage par une s-allocation, avec $s(a) \in [0, 1]$, d'une allocation symétrique implique son blocage par une s'-allocation symétrique. Ou bien, comme nous l'avons dit précédemment, que à l'infini toute allocation $\{\bar{x}_{jk}\}$ symétrique de l'économie réduite qui est bloquée par une s-allocation symétrique a son image dans l'économie de départ qui est bloquée par une s'-allocation symétrique (contrairement au cas évoqué dans le lemme 4.4). De ceci on déduit que $\mathscr{C}_1^\infty$, qui est l'image dans ε de $\overline{\mathscr{C}}_0^\infty$, coïncide avec $\mathscr{C}_0^\infty$, car s'il en était autrement, il existerait une allocation symétrique $\{x_{ijk}\}$ de $\mathscr{C}_0^\infty$ et qui n'appartiendrait pas à $\mathscr{C}_1^\infty$, or $\{\bar{x}_{jk}\}$ serait optimum de Paréto donc elle serait bloquée par une s-allocation symétrique, il en serait donc de même pour $\{x_{ijk}\}$ ce qui contredirait l'hypothèse.

On peut énoncer la proposition suivante :

PROPOSITION 5.1 : *On considère une économie aléatoire qui vérifie les hypothèses* H1, H2, H3, H4. *Les cœurs $\mathscr{C}_0^\infty$ et $\mathscr{C}_1^\infty$, définis comme précédemment, coïncident. Rappelons que l'image $\mathscr{C}_1^\infty$ de $\overline{\mathscr{C}}_0^\infty$ dans l'économie de départ s'obtient en associant à une allocation symétrique $\{\bar{x}_{jk}\}$ de $\overline{\mathscr{C}}_0^\infty$, les allocations symétriques $\{x_{ijk}\}$ de façon que :*

$$x_{ijk}\in X_i,\quad \sum_i x_{ijk}\,p_{ijk}=\bar{x}_{jk},\qquad \sum_i u_i(x_{ijk})\,p_{ijk}=\bar{u}_{jk}(\bar{x}_{jk}).$$

Si on ajoute les hypothèses suivantes à l'économie :

$$Y_k^T=\sum_j N_j\sum_i Y_i\,p_{ijk}\supset -R_+^l$$

$$\Big(\sum_i X_i\,p_{ijk}\Big)\cap\Big(\sum_i e_i\,p_{ijk}+\widehat{\mathring{A}Y_k^T}\neq\varnothing,$$

avec AY_k^T le cône asymptotique de Y_k^T, les fonctions d'utilité u_i ne possèdent pas de maximum sur X_i, alors dans ces conditions les équilibres économiques symétriques W et $\overline{W}$ de l'économie et de l'économie réduite se correspondent et l'on a les égalités $\mathscr{C}_0^\infty=\mathscr{C}_1^\infty=W$ et $\overline{\mathscr{C}}_0^\infty=\overline{W}$.

Preuve : Elle se déduit immédiatement des raisonnements précédents et du théorème d'équivalence de Debreu et Scarf. En fait le théorème de la concurrence parfaite et la correspondance que nous allons établir entre W et $\overline{W}$ sont suffisants pour la preuve de la dernière partie. Indiquons rapidement comment les équilibres économiques symétriques W et $\overline{W}$ de l'économie de départ et de l'économie réduite se correspondent par le même mécanisme que celui utilisé pour construire $\mathscr{C}_1$ à partir de $\overline{\mathscr{C}}_0$. Un système de prix symétriques est un système de prix qui ne dépend que de l'état économique agrégé, nous le noterons $q=\{q_1, q_2, \ldots, q_k, \ldots\}$. Le budget d'un agent est alors :

$$\sum_k\sum_{b\in B_k}\max\langle q_k\,|\,Y_{i(a,b)}+e_{i(a,b)}\rangle=w(a,q),$$

ce qui avec les hypothèses de convexité et pour $a \in A_j$ peut s'écrire :

$$w(a, q) = \sum_k \max < q_k \,|\, \sum_i (Y_i + e_i)\, p_{ijk} > = w_j(q) \quad (\langle x \,|\, y \rangle \text{ le produit scalaire}).$$

L'ensemble budgétaire de l'agent a de la classe A_j, est l'ensemble des plans de consommation de cet agent qui sont tels que :

$$x(a, b) \in X_{i(a,b)} \qquad \text{et} \qquad \sum_k \sum_{b \in B_k} \langle q_k \,|\, x(a, b) \rangle \leqq w_j(q).$$

Cependant comme l'agent a cherche des éléments maximaux dans son domaine budgétaire, on peut assurer, s'il en existe, qu'il en existe toujours un au moins qui est un plan symétrique, c'est-à-dire un plan qui ne dépend que de l'état économique individuel et de l'état économique agrégé, ceci en raison des hypothèses de convexité des X_i et de concavité des u_i. Ceci se montre en symétrisant les plans de consommation comme cela a été fait dans le lemme 4.3.

Si l'on raisonne sur les plans de consommation symétriques, que l'on note encore $\{x_{ijk}\}$, alors les contraintes budgétaires deviennent :

$$\sum_k \langle q_k \,|\, \sum_i x_{ijk} p_{ijk} \rangle = \sum_k \langle q_k \,|\, \bar{x}_{jk} \rangle \leqq w_j(q).$$

Il est alors naturel, comme nous l'avons fait précédemment, de considérer l'économie réduite composée de N_j agents identiques de type j, avec pour ressources, ensembles de productions et de consommations, et ce dans l'état économique agrégé B_k, respectivement les quantités $\bar{e}_{jk}$ et les ensembles $\bar{Y}_{jk}$, de même les utilités sont $\bar{u}_{jk}$.

Dans ces conditions on montre facilement que si les plans de consommation symétriques $\{\bar{x}_{jk}\}$ de l'économie réduite sont maximaux dans les ensembles budgétaires, donc vérifient $\bar{x}_{jk} \in \bar{X}_{jk}$ et $\sum_k \langle q_k \,|\, \bar{x}_{jk} \rangle \leqq w_j(q)$, alors les plans de consommation symétriques $\{x_{ijk}\}$ de l'économie de départ qui sont maximaux dans les ensembles budgétaires correspondant sont tels que :

$$\sum_i x_{ijk} p_{ijk} = \bar{x}_{jk} \qquad \text{et} \qquad \sum_i u_i(x_{ijk})\, p_{ijk} = \bar{u}_{jk}(\bar{x}_{jk})$$

avec évidemment :

$$x_{ijk} \in X_i \qquad \text{et} \qquad \sum_k \langle q_k \,|\, \sum_i x_{ijk} p_{ijk} \rangle \leqq w_j(q).$$

Enfin la demande totale doit être compatible avec les ressources et les productions, soit dans le cas symétrique :

$$\sum_j N_j \sum_i x_{ijk} p_{ijk} \in \sum_j N_j \sum_i (Y_i + e_i) p_{ijk},$$

soit encore :

$$\sum_j N_j \bar{x}_{jk} \in \sum_j N_j (\bar{Y}_{jk} + \bar{e}_{jk}).$$

Les hypothèses vérifiées par l'économie réduite permettent d'assurer l'existence d'équilibres économiques symétriques (il suffit de considérer cette économie comme constituée d'un seul individu par type, pour être ramené à un cas classique), et par conséquent les équilibres symétriques de l'économie de départ, qui se déduisent tous des précédents, forment un ensemble non vide.

VI. CONCLUSION

Nous avons montré comment il était possible de construire une agrégation fidèle, qui dans le cas de la concurrence parfaite permet de reconstruire exactement le cœur symétrique.

Il serait intéressant d'étudier une économie aléatoire dans laquelle on multiplierait le nombre des agents d'une même classe en considérant des agents avec une dépendance que très locale. En particulier, à la limite, par la loi des grands nombres il apparaîtrait sans doute la possibilité de faire de nombreuses simplifications (on sait que à la limite un mécanisme d'assurance permet de couvrir les risques individuels dans le cadre des équilibres de Walras).

BIBLIOGRAPHIE

1. K. J. Arrow, *Le rôle des valeurs boursières pour la répartition la meilleure des risques*, Econométrie, p. 41-48, Paris, C.N.R.S., 1953.
2. G. Debreu, *Théorie de la valeur*, Dunod, Paris, 1966.
3. G. Debreu, H. Scarf, *A Limit Theorem on the Core of an Economy*, International Economic Reviews, vol. 4, 1963, p. 235-246.
4. W. Hildenbrandt, *Random Preferences and Equilibrium Analysis*, *J. Economic Theory*, vol. 3, 1971, p. 414-429.
5. E. Malinvaud, *The Allocation of Individual Risks in Large Markets*, *J. Economic Theory*, vol. 4, 1972, p. 312-328.
6. E. Malinvaud, *Markets for an Exchange Economy with Individual Risks*, Econometrica, vol. 41, 1973, p. 383-410.
7. R. Radner, *Competitive Equilibrium under Uncertainty*, Econometrica, vol. 36, 1968, p. 31-58.

ANNEXES

PREUVE DE LA PROPOSITION 3.1

Les propriétés des ensembles $\overline{X}_{jk}$ et $\overline{Y}_{jk}$ sont immédiates à vérifier, par exemple la fermeture provient de ce que la somme de fermés dont les cônes asymptotiques sont positivement semi-indépendants est fermée [2]. Montrons maintenant l'existence et la continuité des fonctions d'utilité $\bar{u}_{jk}$. Dans :

$$\bar{u}_{jk}(\bar{x}_{jk}) = \max \{ \sum_i u_i(x_{ijk}) \, p_{ijk} \mid x_{ijk} \in X_i \quad \text{et} \quad \sum_i x_{ijk} \cdot p_{ijk} = \bar{x}_{jk} \}$$

seuls nous intéressent les i pour lesquels p_{ijk} est positif, donc on peut sans perte de généralité supposer $p_{ijk} > 0$. Comme les cônes asymptotiques des ensembles X_i sont inclus dans R^l_+, on peut affirmer que l'ensemble des $x_{ijk} \in X_i$ tels que $\sum_i x_{ijk} \cdot p_{ijk} = \bar{x}_{jk}$ est compact donc que le maximum existe.

D'ailleurs puisque $X_i \subset m + R^l_+$ on peut sans perte de généralité supposer (après translation) que les X_i sont inclus dans R^l_+.

Soit $D_{jk} : \overline{X}_{jk} \rightrightarrows \prod_{i \in I} X_i$ la correspondance définie par :

$$D_{jk}(y) = \{ (x_1, x_2, \ldots, x_h) \in \prod_{i \in I} X_i \mid \sum_{i \in I} x_i p_{ijk} = y \},$$

où $\prod_i X_i$ est muni de la topologie produit des topologies traces sur les X_i et $\overline{X}_{jk}$ est muni de la topologie trace. Il s'agit d'une correspondance fermée à valeurs compactes non vides (la vérification en est évidente). Montrons maintenant que D_{jk} est semi-continue-inférieure. Soient des points $x_i \in X_i$, $\sum_{i \in I} x_i p_{ijk} = z$ et des voisinages des x_i (relatifs aux X_i) de la forme :

$$S_i = \left\{ x \in X_i \mid x = \sum_{q=1}^{r_i} \alpha_q x_i^q, \, \alpha_q \geqq 0, \, \sum_{q=1}^{r_i} \alpha_q = 1 \right\}$$

(qui existent car les X_i sont convexes et localement convexes). Alors $\sum_{i \in I} S_i \, p_{ijk}$ est un voisinage de z.

$$\{ y \in \overline{X}_{jk} \mid D_{jk}(y) \cap \prod_{i \in I} S_i \neq \emptyset \} \supset \sum_{i \in I} S_i \, p_{ijk},$$

ce qui prouve la semi-continuité-inférieure. Montrons sur un exemple que si les X_i n'étaient pas convexes alors la semi-continuité inférieure pourrait ne pas avoir lieu.

Considérons dans R les ensembles $X_1=[01]$ et $X_2=\{0,1\}$, et $\overline{X}_{jk}=(1/2)(X_1+X_2)=[01]=X_1$. Soit le point $1/2 \in 1/2(X_1+X_2)$, on a $1/2=1/2(0+1)$, avec $0 \in X_1$ et $1 \in X_2$ ou $0 \in X_2$ et $1 \in X_1$, considérons alors le voisinage $V=(]1-\varepsilon, 1] \times \{0\})$ de $(1,0)$ dans $X_1 \times X_2$, ceci pour $\varepsilon \in]0,1[$. Si on recherche l'ensemble $\{z \in 1/2(X_1+X_2) \mid z=x+y$, avec $(x,y) \in V\}$, cet ensemble n'est autre que $](1-\varepsilon)/2, 1/2]$ ce qui n'est pas un voisinage de $1/2$ relativement à $1/2(X_1+X_2)$, et dans ce cas la semi-continuité-inférieure n'a pas lieu. Soit maintenant la correspondance U de $\overline{X}_{jk}$ dans R définie par :

$$U(y)=\{a \in R \mid a=\sum_i u_i(x_i)\, p_{ijk} \quad \text{avec} \quad (x_1, x_2, \ldots) \in D_{jk}(y)\},$$

il est immédiat que cette correspondance est fermée et semi-continue-inférieure à valeurs compactes non vides. On conclut de façon évidente que $\bar{u}_{jk}$, définie par $\bar{u}_{jk}(y)=\max\{U(y)\}$, est une application continue de $\overline{X}_{jk}$ dans R.

PREUVE DU LEMME 4.1

Soit $\{\bar{x}_{jk}\}$ une allocation symétrique de l'économie agrégée (elle ne dépend pas de l'argent mais simplement du type de l'agent) et on la suppose bloquée par une S-allocation.

Considérons la S-allocation y de l'économie agrégée, qui bloque $\{\bar{x}_{jk}\}$, on a donc : pour tout $a \in S \cap A_j$:

$$\sum_k \bar{u}_{jk}(y(a,k)) \cdot p_k > \sum_k \bar{u}_{jk}(\bar{x}_{jk}) \cdot p_k.$$

Construisons à partir des $y(a,k)$ une S-allocation symétrique, ceci en associant à tout j, tel que $S \cap A_j \neq \emptyset$, les quantités :

$$\bar{y}_{jk}=\frac{1}{|S \cap A_j|} \sum_{a \in S \cap A_j} y(a,k),$$

$|S \cap A_j|$ étant le nombre des agents de type j qui interviennent dans la coalition. Vérifions qu'il s'agit bien d'une S-allocation, d'abord pour tout état économique agrégé la somme des quantités consommées par les membres de la coalition n'a pas variée, enfin, pour tout a de $S \cap A_j$ on a $y(a,k) \in \overline{X}_{jk}$ donc on peut affirmer que :

$$\bar{y}_{jk} = \frac{1}{|S \cap A_j|} \sum_{a \in S \cap A_j} y(a, k) \in \bar{X}_{jk},$$

ceci en raison de la convexité de $\bar{X}_{jk}$.

On a :

$$\sum_k \bar{u}_{jk}\left(\frac{1}{|S \cap A_j|} \sum_{a \in S \cap A_j} y(a, k)\right) p_k \geqq \min_{a \in S \cap A_j} \left(\sum_k \bar{u}_{jk}(y(a, k)) p_k\right),$$

donc $\sum_k \bar{u}_{jk}(\bar{y}_{jk}) p_k > \sum_k \bar{u}_{jk}(\bar{x}_{jk}) p_k$, ce qui prouve que cette S-allocation symétrique bloque aussi l'allocation $\bar{x}_{jk}$.

PREUVE DU LEMME 4.2

Soit $\{\bar{x}_{jk}\}$ une allocation symétrique et soit y une allocation quelconque telle que l'on ait :

$$\sum_k \bar{u}_{jk}(y(a, k)) . p_k \geqq \sum_k \bar{u}_{jk}(\bar{x}_{jk}) . p_k,$$

ceci pour tout $a \in A_j$ et tout j, l'inégalité stricte ayant lieu pour un agent au moins.

Comme dans le lemme précédent on va symétriser l'allocation y, posons pour ce faire :

$$\bar{y}_{jk} = \frac{1}{N_j} \sum_{a \in A_j} y(a, k).$$

On vérifie comme précédemment que $\{\bar{y}_{jk}\}$ est une allocation symétrique.

Montrons que si u est une fonction d'utilité, de R^l dans R, continue et quasi concave, et si $y_1, \ldots, y_r$ sont des points tels que $u(y_i) \geqq u(x)$ avec au moins une inégalité stricte alors :

$$u\left(\sum_{i=1}^{r} \alpha_i y_i\right) > u(x) \qquad \text{si} \quad \alpha_i > 0 \quad \text{et} \quad \sum_{i=1}^{r} \alpha_i = 1.$$

Supposons que $u(y_r) > u(x)$ et soit :

$$z = \sum_{i=1}^{r-1} \beta_i y_i \qquad \text{avec} \quad \sum_{i=1}^{r-1} \beta_i = 1 \quad \text{et} \quad \beta_i \geqq 0,$$

on a $u(z) \geqq u(x)$ (car u étant continue et quasi concave elle est faiblement quasi concave [2], p. 64). Soit $w = \beta z + (1-\beta) y_r$ avec $\beta \in]01]$, on a deux cas :

si $u(z) \geqq u(y_r)$, alors $u(w) \geqq u(y_r) > u(x)$;

si $u(y_r) > u(z)$, alors $u(w) > u(z) \geqq u(x)$, et l'on conclut que $u(w) > u(x)$. Par conséquent si dans A_j il y a un agent au moins pour lequel l'inégalité est stricte on en déduit que $\sum_k \bar{u}_{jk}(\bar{y}_{jk}) p_k > \sum_k \bar{u}_{jk}(\bar{x}_{jk}) p_k$.

Si par contre il n'y a pas d'inégalité stricte alors d'après la quasi-concavité faible on a :

$$\sum_k \bar{u}_{jk}(\bar{y}_{jk}) \cdot p_k \geqq \sum_k \bar{u}_{jk}(\bar{x}_{jk}) p_k.$$

Ceci prouve que $\{x_{jk}\}$ n'est pas optimum de Paréto dans l'ensemble des allocations symétriques de $\bar{\varepsilon}$.

PREUVE DU LEMME 4.3

Constatons d'abord que une allocation symétrique $\{x_{ijk}\}$ qui n'est pas telle que :

$$\sum_i u_i(x_{ijk}) p_{ijk} = \bar{u}_{jk}\left(\sum_i x_{ijk} p_{ijk}\right)$$

n'est certainement pas optimum de Paréto puisque on peut trouver x'_{ijk} de façon que :

$$\sum_i x_{ijk} p_{ijk} = \sum_i x'_{ijk} p_{ijk}$$

et que :

$$\sum_i u_i(x'_{ijk}) p_{ijk} > \sum_i u_i(x_{ijk}) p_{ijk}.$$

Soit $\{x_{ijk}\}$ une allocation qui vérifie les conditions de l'énoncé, et soit y une allocation quelconque telle que l'on ait :

$$\sum_b u_{i(a,b)}((y(a,b)) p(b) \geqq \sum_k \sum_i u_i(x_{ijk}) p_{ijk} p_k,$$

ceci pour tout $a \in A_j$ et tout j et telle que de plus il y ait au moins un a pour lequel l'inégalité soit stricte. Définissons alors les quantités y_{ijk} par :

$$y_{ijk} = \frac{1}{N_j p_k p_{ijk}} \sum_{b \in B_k} \sum_{a \in A_j} y(a,b) l^i(a,b) p(b),$$

avec $l^i(a, b)$ qui vaut 1 si l'agent a pour l'état de la nature b se trouve dans l'état économique individuel i, et 0 sinon. Montrons que les y_{ijk} définissent une allocation symétrique. D'abord, en raison de la convexité des X_i, il est clair que $y_{ijk} \in X_i$, d'autre part la consommation totale dans l'état agrégé B_k est :

$$\sum_j N_j \sum_i y_{ijk}\, \eta_{ijk} = \sum_j N_j \sum_i y_{ijk}\, p_{ijk}$$

$$= \frac{1}{p_k} \sum_{b \in B_k} \sum_a y(a, b)\, p(b) \in \frac{1}{p_k} \sum_{b \in B_k} \sum_a (Y_{i(a,b)} + e_{i(a,b)})\, p(b)$$

$$= \frac{1}{p_k} \sum_j \sum_{a \in A_j} \sum_{b \in B_k} (Y_{i(a,b)} + e_{i(a,b)})\, p(b)$$

$$= \frac{1}{p_k} \sum_j \sum_{a \in A_j} \sum_i (Y_i + e_i)\, p_{ijk}\, p_k = \sum_j N_j \sum_i (Y_i + e_i)\, p_{ijk}$$

$$= \sum_j N_j (\bar{Y}_{jk} + \bar{e}_{jk}),$$

il s'agit donc d'une allocation.

D'après la concavité des u_i on peut écrire :

$$N_j \sum_i u_i(y_{ijk})\, p_{ijk}\, p_k \geqq \sum_{a \in A_j} \sum_{b \in B_k} u_{i(a,b)}(y(a, b))\, p(b)$$

ce dont on déduit :

$$\sum_k \sum_i u_i(y_{ijk})\, p_{ijk}\, p_k \geqq \frac{1}{N_j} \sum_{a \in A_j} \sum_{b \in B} u_{i(a,b)}(y(a, b))\, p(b) \geqq \sum_k \sum_i u_i(x_{ijk})\, p_{ijk}\, p_k,$$

cette dernière inégalité étant stricte pour une classe A_j au moins.

Ceci signifie que $\{x_{ijk}\}$ n'est pas optimal de Paréto même si on raisonne uniquement dans l'ensemble des allocations symétriques.

Si l'on considère les images dans l'économie réduite, c'est-à-dire les allocations symétriques :

$$\{\bar{x}_{jk}\} = \{\sum_i x_{ijk}\, p_{ijk}\} \quad \text{et} \quad \{\bar{y}_{jk}\} = \{\sum_i y_{ijk}\, p_{ijk}\}$$

on peut écrire :

$$\sum_k \bar{u}_{jk}(\bar{y}_{jk})\, p_k \geqq \sum_k \sum_i u_i(y_{ijk})\, p_{ijk}\, p_k \geqq \sum_k \sum_i u_i(x_{ijk}) . p_{ijk}\, p_k = \sum_k \bar{u}_{jk}(\bar{x}_{jk})\, p_k$$

ce qui prouve, puisque la deuxième inégalité est stricte pour au moins un j, que $\{\bar{x}_{jk}\}$ n'est pas optimal de Paréto dans l'économie réduite.

PREUVE DU LEMME 4.4

Soit y la S-allocation qui bloque $\{x_{ijk}\}$ on a donc :

$$\sum_{b\in B} u_{i(a,b)}(y(a,b))\,p(b)$$

$$>\sum_k \sum_i u_i(x_{ijk})\,p_{ijk}\,p_k \qquad \text{pour} \quad a\in A_j \cap S\neq 0.$$

Comme dans le lemme précédent on définit les quantités y_{ijk}•(pour j tel que $S\cap A_j\neq\emptyset$) par :

$$y_{ijk}=\frac{1}{|S\cap A_j|\cdot p_k\cdot p_{ijk}}\sum_{b\in B_k}\sum_{a\in S\cap A_j} y(a,b)\,l^i(a,b)\,p(b).$$

Ces quantités attribuées aux agents de S ne constituent pas en général une S-allocation symétrique, ceci parce que à l'intérieur d'un même état économique agrégé la répartition des agents de $S\cap A_j$ dans les états économiques individuels n'est pas constante.

En raison de la convexité des X_i il est clair que $y_{ijk}\in X_i$.

La compatibilité entre la consommation et les ressources et productions des agents de S, si on leur attribuait les quantités y_{ijk}, ne serait pas respectée, cependant si l'on moyenne sur les états économiques agrégés on a :

$$\sum_j |S\cap A_j|\sum_i y_{ijk}\,p_{ijk}=\sum_j |S\cap A_j|\,\bar{y}_{jk}=\sum_j \frac{1}{p_k}\sum_{a\in S\cap A_j}\sum_{b\in B_k} y(a,b)\,p(b)$$

qui est un élément de :

$$\sum_i \sum_{a\in S\cap A_j}\sum_{b\in B_k}(Y_{i(a,b)}+e_{i(a,b)})\,p(b)\frac{1}{p_k}$$

$$=\sum_j\sum_{a\in S\cap A_j}(\bar{Y}_{jk}+\bar{e}_{jk})=\sum_j |S\cap A_j|(\bar{Y}_{jk}+\bar{e}_{jk}),$$

ce qui prouve que les quantités $\bar{y}_{jk}$ attribuées à $|S\cap A_j|$ agents de type j constituent une S-allocation symétrique.

Comme dans le lemme précédent, on peut écrire, en raison de la concavité des u_i :

$$|S \cap A_j| \sum_i u_i(y_{ijk})\, p_{ijk}\, p_k \geqq \sum_{a \in S \cap A_j} \sum_{b \in B_k} u_{i(a,b)}(y(a,b))\, p(b)$$

ce dont on déduit que pour tout j tel que $S \cap A_j \neq \emptyset$ on a :

$$\sum_k \bar{u}_{jk}(\bar{y}_{jk})\, p_k > \sum_k \sum_i u_i(y_{ijk})\, p_{ijk}\, p_k$$

$$\geqq \frac{1}{|S \cap A_j|} \sum_{a \in S \cap A_j} \sum_b u_{i(a,b)}(y(a,b))\, p(b)$$

$$> \sum_k \sum_i u_i(x_{ijk})\, p_{ijk}\, p_k = \sum_k \bar{u}_{jk}(\bar{x}_{jk})\, p_k,$$

ce qui prouve que l'allocation $\{\bar{x}_{jk}\}$ de l'économie réduite est bloquée.