

Y. CHERRUAULT

I. KARPOUZAS

**Une méthode de réduction des variables appliquée
au contrôle optimal de systèmes gouvernés par
des équations différentielles**

RAIRO. Recherche opérationnelle, tome 21, n° 1 (1987), p. 51-64

http://www.numdam.org/item?id=RO_1987__21_1_51_0

© AFCET, 1987, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « RAIRO. Recherche opérationnelle » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

UNE MÉTHODE DE RÉDUCTION DES VARIABLES APPLIQUÉE AU CONTRÔLE OPTIMAL DE SYSTÈMES GOUVERNÉS PAR DES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES (*)

par Y. CHERRUAULT ⁽¹⁾ et I. KARPOUZAS ⁽¹⁾

Résumé. – Nous proposons une méthode numérique pour la résolution de problèmes de contrôle optimal issus en particulier de la biologie. Cette technique est basée sur une transformation réductrice (appelée Aliénor) permettant de ramener des problèmes d'optimisation dépendant de n variables à la recherche de l'optimum d'une fonction d'une seule variable.

Mots clés : Contrôle optimal; réduction de variables; technique Aliénor; optimisation de systèmes différentiels.

Abstract. – We give a numerical method for solving optimal control problems arising for instance in biology. This technique uses a reducing transformation (called Alienor) allowing to bring back a n variables optimization problem to an optimization problem depending on a single parameter.

Keywords : Optimal control; reduction of variables; Alienor technique, optimisation of differential systems.

1. INTRODUCTION

Nous avons développé dans de nombreux travaux publiés [1, 2, 5] une méthode originale pour résoudre de façon approchée et par un algorithme numérique des problèmes d'optimisation.

Cette technique a l'avantage de ne pas nécessiter d'autre propriété que la continuité de la fonction à optimiser. Elle permet de plus de calculer le (ou les) optimum globaux et éventuellement de rechercher tous les extrémum dans un domaine borné [5]. On peut également utiliser l'idée de base de la transformation réductrice Aliénor [2] pour résoudre

– des équations fonctionnelles comme par exemple des équations aux dérivées partielles ou intégrales dépendant de plusieurs variables [4], [9].

(*) Reçu juin 1986.

⁽¹⁾ Université Paris-VI, MEDIMAT, 15, rue de l'École de Médecine, 75270 Paris Cedex 06.

— des problèmes d'identification [2] dans des systèmes d'équations différentielles, aux dérivées partielles ou intégrales.

Pour donner une idée simple de cette méthode, considérons le problème d'optimisation suivant :

$$\text{Min}_{x, y} f(x, y) \quad (1.1)$$

où f est une fonction continue dans R^2 .

On fait d'abord un changement de variables (coordonnées polaires) :

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta, \quad \theta \geq 0. \quad (1.2)$$

Puis on relie les variables x et y de (1.2) au moyen de la spirale d'Archimède :

$$r = a \theta \quad (1.3)$$

où a est un paramètre destiné à tendre vers 0 mais dont le choix en fonction du nombre de variables est fixé par des règles empiriques élaborées par A. Guillez [5].

Cette transformation (Aliénor) se généralise sans peine à un nombre quelconque de variables. On obtient une structure d'arbre [14] qui ramène n variables x_1, \dots, x_n à la seule variable $\theta \geq 0$ et qui entraîne donc une simplification considérable des problèmes à traiter (on devrait plutôt dire que l'on aboutit à une décomposition des difficultés).

La transformation (1.2) est la transformation directe qui exprime les x_i , variables de départ en fonction de la variable finale $\theta \geq 0$. La transformation inverse, facile à obtenir dans tous les cas, permet d'exprimer θ en fonction des variables initiales. Dans notre cas (2 variables) on a :

$$\theta = \frac{1}{a} (x^2 + y^2)^{1/2} \quad (1.4)$$

Quant au problème de départ (1.1), il est ramené au problème approché :

$$\text{Min}_{\theta} \{ f(a \theta \cos \theta, a \theta \sin \theta) = G(\theta) \} \quad (1.5)$$

qui est un problème de minimisation d'une fonction G de la seule variable θ . Or il est clair que la littérature propose de nombreuses et excellentes méthodes pour la recherche des extrémum des fonctions d'une seule variable. Parmi ces

méthodes nombreuses sont celles qui n'utilisent que la continuité de la fonction à l'exclusion des dérivées.

De nombreux problèmes issus de la biologie et de la médecine (échanges gazeux, identification dans les compartiments, écoulements, . . .) ont été résolus grâce à l'utilisation de cette transformation réductrice [5, 9, 2, 4].

2. RÉOLUTION NUMÉRIQUE DE PROBLÈMES DE CONTRÔLE OPTIMAL

Soit à résoudre le problème d'optimisation

$$\text{Min}_{u(t)} \int_0^T g(x_1(t), \dots, x_n(t), u(t)) dt \quad (2.1)$$

sous la contrainte : x_1, \dots, x_n, u sont solutions du système différentiel non linéaire :

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= f_1(x_1, \dots, x_n, u, t) \\ &\vdots \\ \dot{x}_n &= f_n(x_1, \dots, x_n, u, t) \end{aligned} \quad (2.2)$$

$x_1(0) = \alpha_i$ conditions initiales fixées.

Dans la pratique (2.2) correspond, par exemple, au modèle (supposé identifié) d'un système biologique.

Nous ne reviendrons pas sur la théorie générale des problèmes de contrôle optimal. Nous renvoyons pour cela à des ouvrages spécialisés [11]. Notre objectif étant seulement de proposer des méthodes numériques pour la recherche d'un contrôle optimal vérifiant (2.1) et (2.2). Nous supposons pour cela qu'il existe des contrôles admissibles. Dans un premier temps nous utiliserons la transformation réductrice Aliénor pour réduire les n variables x_1, x_2, \dots, x_n à la variable θ . Le problème d'optimisation (2.1) devient

$$\text{Min}_u \int_0^T G(\theta, u) dt \quad (2.3)$$

où G s'obtient aisément à partir de g et des formules de transformation directes.

On résout d'abord numériquement le problème

$$\text{Min}_u G(\theta, u) \quad (2.4)$$

qui nous donnera une fonction optimale

$$u^* = u^*(\theta). \quad (2.5)$$

La formule de transformation inverse nous donnera

$$\theta = h(x_1, \dots, x_n) \quad (2.6)$$

et donc permettra d'exprimer u^* en fonction de x_1, \dots, x_n .

On reporte ensuite cette expression de u^* dans le système différentiel (2.2) qui dépend alors uniquement des variables x_1, \dots, x_n . On peut le résoudre par une méthode numérique de type Runge-Kutta d'ordre 4 par exemple [7]. On obtient les états optimaux

$$x_1^*(t), \dots, x_n^*(t) \quad (2.7)$$

que l'on reporte dans (2.5). On en déduit par conséquent le contrôle optimal (approché) u^* que l'on cherchait.

Remarque 1 : Dans le problème précédent nous avons considéré un contrôle optimal scalaire. S'il devenait vectoriel $\mathbf{u}(t) = (u_1(t), \dots, u_m(t))$ on pourrait, grâce à la transformation réductrice, se ramener à une seule variable de contrôle $\lambda(t)$. On aurait à résoudre un système comme précédemment :

$$\underset{\lambda}{\text{Min}} G(\theta, \lambda). \quad (2.8)$$

La théorie qui vient d'être développée peut alors s'adapter sans difficulté.

Remarque 2 : La transformation réductrice est basée, dans ce qui précède, sur la spirale d'Archimède $r = a\theta$. On peut, bien entendu, prendre des relations plus générales telles que :

$$r = h(\theta), \quad \theta \geq 0.$$

de sorte que la courbe de R^2 correspondante permette d'approcher n'importe quel point du plan. Par exemple h pourrait être une fonction sinusoïdale ou toute autre fonction bien adaptée au problème étudié.

3. APPLICATION NUMÉRIQUE

Soit le problème de contrôle suivant :

$$\underset{u(t)}{\text{Min}} \int_0^{24} [2u^2 + (2z^2 - y^2 - 9 + zy^2 - 2zy)u]$$

$$+ z^4 + z^3 y^2 - 2 z^3 y - 4 z^2 - y^2 z^2 - z y^4 \\ + 2 y^3 z + 4 y^2 - 5 z^2 - 5 z y^2 + 10 y z + 20]^2 dt \quad (3.1)$$

sachant que u, y, z , vérifient le système différentiel non linéaire ci-dessous :

$$\dot{y} = -3 y^2 + z^2 + y^2 z - 2 y z + u \\ \dot{z} = 2 z^2 + y + 2 y z - 10 z + u \quad (3.2) \\ y(0) = z(0) = 0,1.$$

La transformation Aliénor a été utilisée pour réduire y et z à θ puis à l'aide d'une fonction RANDOM 15 valeurs au hasard ont été choisies pour θ dans l'intervalle $[0, 40]$. Il est facile de voir que le problème d'optimisation (3.1) admet deux solutions réelles par rapport à u . Ces solutions sont fonctions de y et z . En reportant ces expressions dans le système (3.2) on peut obtenir une très bonne approximation de la solution exacte du système contrôlé. C'est cette solution que nous allons pouvoir comparer à la solution calculée à l'aide de la méthode précédente. Cette solution calculée est obtenue en cherchant u sous la forme d'un polynôme de degré n par rapport à θ

$$u(y, z) = U(\theta) = \sum_{i=0}^n \alpha_i \theta^i \quad (\alpha_i \text{ à identifier}). \quad 33$$

En fait, pour la première solution u , on a pris $n=6$ et pour la seconde $n=8$. Puis la résolution du système (3.2) pour ces fonctions u dépendant de y, z nous donne les y^* et z^* optimales. On obtient alors le u^* optimal par :

$$u^*(y, z) = U\left(\frac{1}{a} \sqrt{y^2 + z^2}\right) \quad (3.4)$$

On lira les résultats numériques dans les tableaux et les pages qui suivent : (tableaux 1 et 2, fig. 2, fig. 3).

4. RÉOLUTION D'UN SECOND PROBLÈME DE CONTRÔLE

Il s'agit de minimiser, par rapport à $u(t)$, le critère suivant :

$$\int_0^\infty \left(\sum_{\alpha=1}^{10} \left[\left(e^{-x_1 \alpha/10} - e^{-u \alpha/10} \right) - x_2 \left(e^{-\alpha/10} - e^{-\alpha} \right)^2 \right] \right) dt \quad (4.1)$$

TABLEAU I

Temps en heures	0,1	0,5	1	2	4	6	9	12	15	24
$y_{opt.}$	0,111	0,154	0,209	0,397	0,351	0,357	0,357	0,357	0,357	0,357
$z_{opt.}$	0,055	0,034	0,046	0,069	0,084	0,86	0,86	0,86	0,86	0,86
$u_{opt.}$	0,148	0,189	0,255	0,358	0,42	0,426	0,426	0,426	0,426	0,426

TABLEAU II

Temps en heures	0,1	0,5	1	2	4	6	9	12	15	24
$y_{opt.}$	0,146	0,409	0,728	0,873	0,881	0,881	0,881	0,881	0,881	0,881
$z_{opt.}$	0,08	0,161	0,335	0,463	0,474	0,474	0,474	0,474	0,474	0,474
$u_{opt.}$	0,558	1,36	2,2	2,55	2,57	2,57	2,57	2,57	2,57	2,57

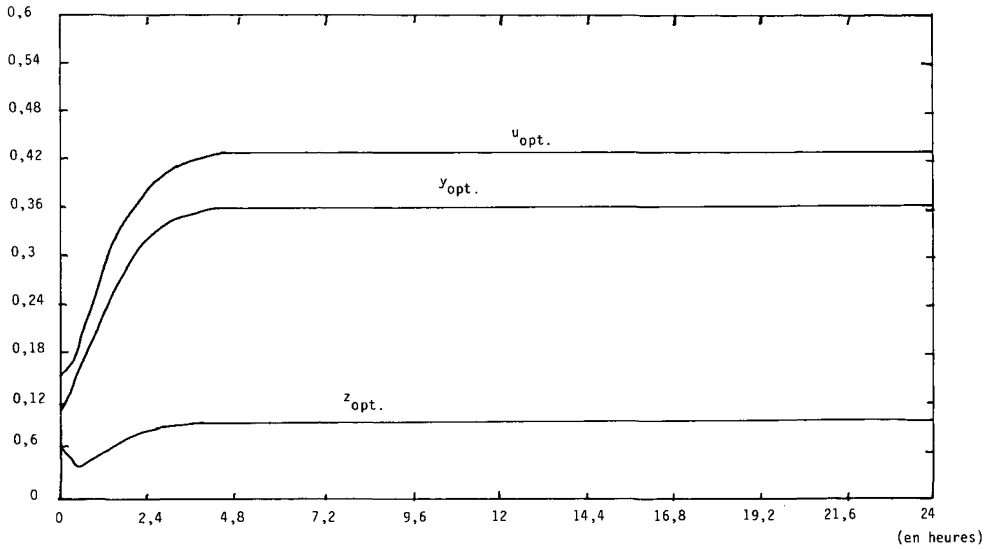


Figure 2. — Évolution, au cours du temps, de u , y , z de (3.1), (3.2) (tableau I).

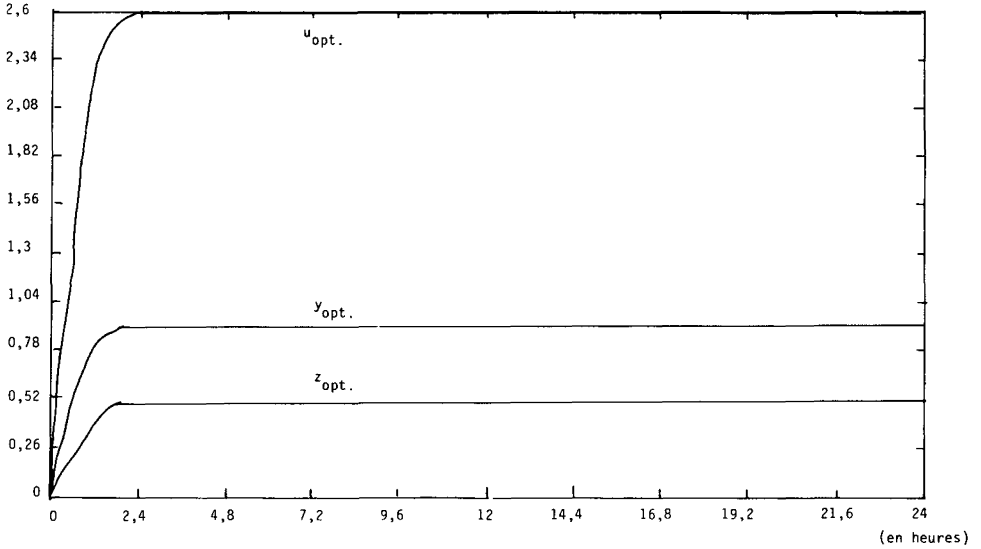


Figure 3. — Évolution de u, y, z correspondant au tableau II.

sachant que x_1, x_2, u sont solutions du système différentiel

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -3x_1^2 + x_2^2 + x_2x_1^2 - 2x_1x_2 + u \\ \dot{x}_2 &= 2x_2^2 + x_1 + 2x_1x_2 - 10x_2 + u \\ x_1(0) &= x_2(0) = 0,1. \end{aligned} \quad (4.2)$$

Pour trouver numériquement le contrôle optimal $u(t)$, nous avons d'abord transformé x_1 et x_2 par les relations

$$x_1 = a \theta \cos \theta, \quad x_2 = a \theta \sin \theta; \quad \theta = \frac{1}{a} \sqrt{x_1^2 + x_2^2}. \quad (4.3)$$

Puis, à l'aide d'une fonction RANDOM, on a choisi au hasard 15 valeurs $\theta_i (i=1, \dots, 15)$ de la variable θ . Pour ces valeurs θ_i , le minimum du critère (4.1) a été calculé ce qui donne des valeurs $U(\theta_i)$. La fonction U est alors approchée par un polynôme du 8^e degré

$$U(\theta) = \sum_{j=0}^8 \beta_j \theta^j. \quad (4.4)$$

On passe alors à $u(x_1, x_2)$ grâce à la relation

$$u(x_1, x_2) = U(\sqrt{x_1^2 + x_2^2}/a). \quad (4.5)$$

En reportant (4.5) dans le système différentiel (4.2) on peut par une méthode de Runge et Kutta [7], trouver la solution approchée optimale x_1^* et x_2^* . La solution optimale est alors donnée par $u(x_1^*, x_2^*)$.

Le tableau III donne les fonctions x_1^* , x_2^* et $u(x_1^*, x_2^*)$ au cours du temps.

TABLEAU III

Temps en heures	0,1	0,5	1	2	4	6	9	12	15	24
$x_{1, \text{opt.}}$	0,1	0,1	0,101	0,102	0,103	0,104	0,104	0,104	0,104	0,104
$x_{2, \text{opt.}}$	0,048	0,015	0,014	0,014	0,014	0,014	0,014	0,014	0,014	0,014
$u_{\text{opt.}}$	0,036	0,034	0,034	0,034	0,035	0,035	0,035	0,035	0,035	0,035

5. UN SYSTÈME DE CROISSANCE BACTÉRIENNE

Dans un article récent [8] consacré à la modélisation d'une population bactérienne les auteurs utilisent des techniques de contrôle adaptif [10] pour optimiser le processus biologique. Les méthodes *simples* basées sur le paragraphe 2 peuvent être utilisées pour définir un contrôle optimal.

Considérons le modèle différentiel proposé par les auteurs [8]

$$\begin{aligned} \dot{X} &= [\mu(X, S) - U] X \\ \dot{S} &= -k_1 \mu(X, S) X + U(V - S), \quad k_1 \text{ constante fixée} \end{aligned} \quad (5.1)$$

où X et S sont des variables d'état (concentrations) correspondant respectivement à la biomasse et au substrat. V est l'entrée de substrat. U est le contrôle (concentration d'acide acétique dans le cas d'un processus de digestion anaérobie). Quant à $\mu(X, S)$ elle peut avoir plusieurs formes selon la loi choisie. Dans les essais nous avons choisi la loi de Monod

$$\mu(X, S) = (\mu^* S)/(K_M + S) \quad (5.2)$$

Les conditions initiales associées à (5.1) sont

$$X(0) = X_0, \quad S(0) = S_0 \quad (5.3)$$

Un problème de contrôle optimal envisageable est le suivant

$$\text{Min} \int_0^{184} (S - S^*) dt \quad (5.4)$$

où S^* est une valeur fixée (jugée souhaitable pour le procédé).

En pratique nous avons choisi [8] :

$$\begin{aligned} \mu^* &= 0,4, & V &= 2, & K_m &= 0,4, & k_1 &= 0,3636, \\ S^* &= 0,2, & S_0 &= 0,13, & X_0 &= 0,069. \end{aligned}$$

Le problème de contrôle optimal (5.4) sous les contraintes (5.1), (5.3) peut être simplement résolu si l'on remarque que l'optimum absolu de (5.4) est réalisé pour

$$S = S^* \quad \text{pour tout } t > 0. \quad (5.5)$$

En reportant dans la seconde équation (5.1) on obtient :

$$(S^* - S_0) \delta_{(0)} = -k_1 \mu(X, S^*) + U(V - S^*) \quad (5.6)$$

où $\delta_{(0)}$ est la masse de Dirac en $t=0$, [13].

On en tire U en fonction de X par la relation

$$U = ((S^* - S_0)/(V - S^*)) \delta_{(0)} + k_1 \mu(X, S^*) X / (V - S^*) \quad (5.7)$$

qui donne par conséquent une expression analytique du contrôle optimal. Il ne reste plus alors qu'à reporter cette expression de U dans la 1^{ère} équation différentielle de (5.1). La résolution numérique de cette équation non linéaire nous donnera le X^* optimal d'où le U^* optimal grâce à (5.7) où l'on fait $X = X^*$. En pratique la masse de Dirac $\delta_{(0)}$ est approchée [3] par une fonction continue $\rho_\epsilon(t)$ telle que sur la figure 1 dont le support tend vers 0 et dont l'intégrale $\int \rho_\epsilon(t) dt$ vaut +1.

La courbe de la figure 4 montre l'évolution de X^* , de U^* et de Y^* taux optimal de production du produit de réaction donné par la formule

$$Y = k_2 \mu(X, S) X \quad \text{où } k_2 \text{ est une constante fixée.} \quad (5.8)$$

Cet exemple illustre qu'il est parfois très facile d'obtenir le contrôle optimal d'un système. Il n'est pas nécessaire d'utiliser des techniques sophistiquées

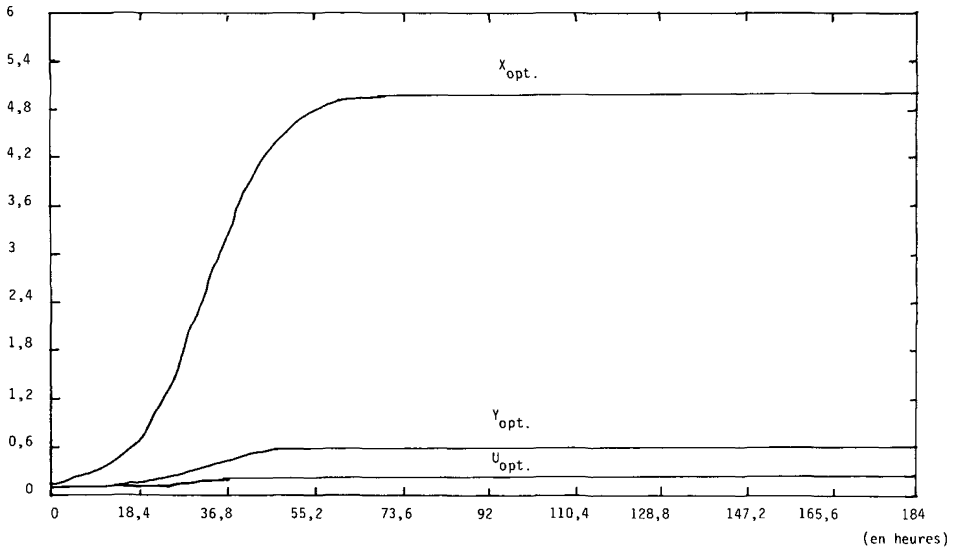


Figure 4. — Évolution de X , Y et U optimaux.

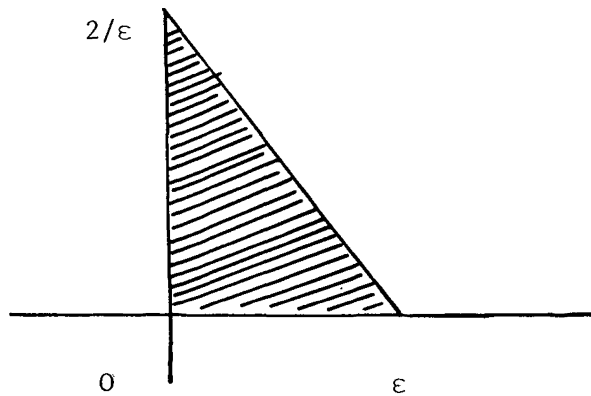


Figure 1

mais il suffit d'utiliser la relation (2.3) qui dans le cas présent donne immédiatement la relation d'optimum global du critère soit

$$S = S^*.$$

Nous allons voir que cette technique est également valable dans l'exemple suivant.

6. CONTRÔLE DANS UN SYSTÈME HORMONAL

Dans son travail de thèse [15] et des travaux ultérieurs [6] B. Weil a proposé un modèle « ago-antagoniste » qui régit l'évolution des concentrations de deux hormones jouant un rôle fondamental dans l'évolution des cancers. Par des méthodes sophistiquées il en déduit des thérapeutiques optimales basées sur la résolution d'un problème de contrôle optimal. Soit x, y les concentrations des deux hormones et X, Y les apports d'hormones exogènes de même nature (respectivement) que x et y . On a le système différentiel non linéaire suivant :

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \alpha_0 u + \alpha_1 u^2 + \alpha_2 u^3 + \alpha_3 v + \alpha_4 v^2 + \alpha_5 v^3 + \dot{X} \\ \dot{y} &= \alpha'_0 u + \alpha'_1 u^2 + \alpha'_2 u^3 + \alpha'_3 v + \alpha'_4 v^2 + \alpha'_5 v^3 + \dot{Y} \\ x(0) &= 0,524, \quad y(0) = 0,31\end{aligned}\quad (6.1)$$

avec

$$u = x - y, \quad v = x + y - m, \quad m = 2. \quad (6.2)$$

L'objectif à réaliser consiste à rétablir un « équilibre hormonal » dans un organisme malade au moyen des variables de contrôle exogènes X et Y . Autrement dit il faut réaliser :

$$\begin{aligned}x + X &= y + Y \\ x + X + y + Y &= m\end{aligned}\quad (6.3)$$

ce qui nous donne :

$$X = (m - 2x)/2, \quad Y = (m - 2y)/2. \quad (6.4)$$

Remarque : on pourrait introduire le problème de contrôle

$$\text{Min} \left(\int_0^T (x + X - y - Y)^2 dt + \int_0^T (x + X + y + Y - m)^2 dt \right) \quad (6.5)$$

dont le minimum absolu est réalisé pour (6.3) ou (6.4).

De (6.4) on tire

$$\dot{X} = -\dot{x}, \quad \dot{Y} = -\dot{y} \quad (6.6)$$

d'où en reportant dans (6.1) le système différentiel ne dépendant plus que des variables x et y :

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \frac{1}{2}(\alpha_0 u + \dots + \alpha_5 v^3) \\ \dot{y} &= \frac{1}{2}(\alpha'_0 u + \dots + \alpha'_5 v^3)\end{aligned}\quad (6.7)$$

$$x(0) = 0,524, \quad y(0) = 0,31.$$

u et v dépendant uniquement de x et y sont définis par (6.2).

Les résultats numériques sont représentés par les courbes de la figure 5 où l'on a pris

$$\begin{aligned}\alpha_0 &= -0,05, & \alpha_1 &= -0,267, & \alpha_2 &= -0,641, \\ \alpha_3 &= 0,16, & \alpha_4 &= 0,102, & \alpha_5 &= -0,485 \\ \alpha'_0 &= -0,161, & \alpha'_1 &= 0,545, & \alpha'_2 &= 0,496, \\ \alpha'_3 &= -0,062, & \alpha'_4 &= -0,296, & \alpha'_5 &= 0,538.\end{aligned}$$

Ces valeurs proviennent de la thèse de F. Santi [12].

Le système différentiel (6.7) a été résolu par une méthode de Runge-Kutta d'ordre 4. La figure 5 présente les valeurs optimales des variables d'état x , y et des contrôles X , Y sur un intervalle de 24 h.

Remarque: On pourrait aussi, comme le propose B. Weil [15], introduire les contrôles X et Y de la façon suivante :

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \alpha_0(x + X - y - Y) + \dots + \alpha_5(x + X + y + Y - m)^3 \\ \dot{y} &= \alpha'_0(x + X - y - Y) + \dots + \alpha'_5(x + X + y + Y - m)^3 \\ x(0) &= \alpha, \quad y(0) = \beta.\end{aligned}\quad (6.8)$$

ce qui revient à remplacer x par $x + X$ et y par $y + Y$ dans les seconds membres de (6.1) et à supprimer les termes en \dot{X} et \dot{Y} .

Si l'on souhaite réaliser (6.3) ou (6.5) alors (6.8) implique

$$\dot{x} = \dot{y} = 0 \text{ soit } x(t) = \alpha, \quad y(t) = \beta. \quad (6.9)$$

Le contrôle optimal est alors donné par les relations [dédites de (6.4)] :

$$X = (m - 2\alpha)/2 \quad \text{et} \quad Y = (m - 2\beta)/2. \quad (6.10)$$

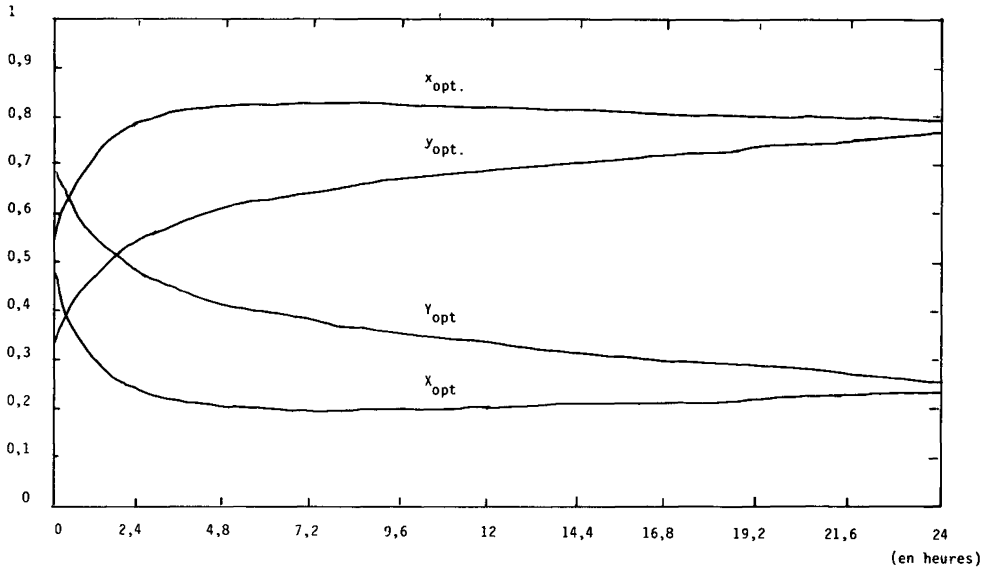


Figure 5. — Évolution de x et y optimaux et des contrôles X et Y .

Un autre problème, également facile à traiter, consisterait à résoudre :

$$\text{Min}_{x, Y} \left(\int_0^T \left(x - \frac{m}{2} \right)^2 dt + \int_0^T \left(y - \frac{m}{2} \right)^2 dt \right) \quad (6.11)$$

correspondant aux relations :

$$x = y, \quad x + y - m = 0. \quad (6.12)$$

La solution s'obtiendrait en faisant $x = y = m/2$ dans le système (6.8). Les X et Y optimaux sont là aussi des constantes auxquelles on doit ajouter des masses de Dirac en $t = 0$.

7. CONCLUSIONS

Nous avons proposé une méthode de résolution numérique des problèmes de contrôle optimal basée sur l'utilisation d'une transformation réductrice (Aliénor). Cette technique nous ramène toujours à des problèmes d'optimisation à une seule variable. De plus, nous évitons les difficultés des méthodes

classiques (programmation dynamique, . . .) qui nécessitent beaucoup d'espace mémoire. Enfin nous avons montré que dans certains cas la solution s'obtenait très simplement en calculant directement la valeur du contrôle (en fonction des variables d'état) qui minimise le critère additif. Les techniques proposées se sont révélées très efficaces et utiles pour résoudre des problèmes de contrôle associés à des processus biologiques.

BIBLIOGRAPHIE

1. Y. CHERRUAULT, *Biomathématiques*, P.U.F., Collect. Que sais-je? 1983.
2. Y. CHERRUAULT, *Mathematical Modelling in Biomedicine*, Optimal Control of biomedical systems, Reidel, 1986.
3. Y. CHERRUAULT, *Approximation d'opérateurs linéaires et applications*, Dunod, Paris, 1968.
4. Y. CHERRUAULT, I. KARPOUZAS et A. GUILLEZ, *Une nouvelle méthode numérique pour la résolution d'équations aux dérivées partielles issues de la biologie*, Biosciences, vol. 4, n° 4, juillet-août 1985.
5. Y. CHERRUAULT et A. GUILLEZ, *L'obtention de tous les minima des fonctions de plusieurs variables et du minimum absolu*, Electronique, Techniques et Industries, n° 24, 1^{er} oct. 1985.
6. D. CLAUDE et B. WEIL, *Découplage et immersion d'un modèle neuro-endocrinien*, C.R. Acad. Sc., Paris, 1984.
7. M. CROUZEIX et A. MIGNOT, *Analyse numérique des équations différentielles*, Masson, Paris, 1984.
8. D. DOCHAIN et G. BASTIN, *Adaptive Identification and Control Algorithms for Nonlinear Bacterial Growth Systems*, Automatica, vol. 20, n° 5, 1984.
9. I. KARPOUZAS, Y. CHERRUAULT et A. CHOUROU, *Méthode de résolution numérique d'équations liées à des écoulements de fluides biologiques*, Biosciences, vol. 5, n° 2, mars-avril, 1986.
10. Y. D. LANDAU, *Adaptive Control*, M. Dekker, 1979.
11. J.-L. LIONS, *Contrôle optimal de systèmes gouvernés par des équations aux dérivées partielles*, Dunod, Gauthier-Villars, Paris, 1968.
12. F. SANTI, *Identification du modèle de régulation des couples ago-antagonistes dans le cadre du système endocrinien surrénal-posthypophysaire*, Thèse de 3^e cycle, Paris-VI, juin 1982.
13. L. SCHWARTZ, *Théorie des distributions*, Hermann, 1966.
14. B. SOME, *Identification, contrôle optimal et optimisation dans les systèmes d'équations différentielles compartimentales*, Thèse de 3^e cycle, Paris-VI, juin 1984.
15. E. B. WEIL, *Formalisation et contrôle du système endocrinien surrénal-posthypophysaire par le modèle mathématique de la régulation des couples ago-antagonistes*, Thèse d'État, Paris-VI, 1979.