REVUE DE STATISTIQUE APPLIQUÉE

E. VENTURA

La recherche opérationnelle (1)

Revue de statistique appliquée, tome 4, n° 1 (1956), p. 57-78
<http://www.numdam.org/item?id=RSA_1956__4_1_57_0>

LA RECHERCHE OPÉRATIONNELLE [1]

par

E. VENTURA

Ingénieur en chef des Mines
Rédacteur en chef des Annales des Mines

Dans l'article ci-après, l'auteur décrit brièvement en quoi consiste la Recherche Opérationnelle, ses méthodes, ses applications. Plusieurs exemples concrets illustrent l'exposé : choisis volontairement très simples, ils sont traités en évitant de faire appel au langage mathématique. Un exemple pratique d'étude de programme linéaire est traité en annexe.

Ce n'est que depuis très peu de temps que l'on parle en France de recherche opérationnelle. Cette technique nouvelle, puisque son développement date de la IIe guerre mondiale, est le fait des pays anglo-saxons. Elle a pris naissance en 1939 en Grande-Bretagne et s'est particulièrement développée après la guerre aux Etats-Unis. Son essor est dû surtout aux retentissants succès obtenus dans le domaine militaire, singulièrement dans celui de la marine et de l'aviation. Actuellement, la recherche opérationnelle a pris droit de cité aux Etats-Unis et en Grande-Bretagne, où l'on compte plusieurs grandes entreprises ayant leur service de recherche opérationnelle propre, des centres universitaires ou privés, indépendants, spécialisés.

En France, des conférences de vulgarisation ont été présentées, notamment devant la Société des Ingénieurs Civils de France, la C.E.G.O.S., etc. Un séminaire de recherche opérationnelle fonctionne sous la conduite éminente de G. GUILBAUD, à l'Institut de Statistique Henri-Poincaré de l'Université de Paris. Malgré le scepticisme de certains, bien compréhensible quand il s'agit d'une nouveauté, la recherche opérationnelle progresse rapidement, et nombreux sont les esprits tournés vers les techniques d'avenir, qui cherchent sincèrement à se documenter sur la recherche opérationnelle et se trouvent dans des dispositions favorables pour la mettre à l'épreuve de la réalité. C'est à eux, aux chefs d'entreprises clairvoyants que s'adresse M. VENTURA.

I

LA RECHERCHE OPÉRATIONNELLE, AUXILIAIRE DE LA DÉCISION RATIONNELLE

LA DÉCISION ET LE JUGEMENT

La vie est le siège d'actions émanant d'un certain nombre de cellules de décision. L'industrie, le commerce, l'armée, etc..., sont des systèmes dans lesquels interviennent des hommes et des machines. L'étude des relations des uns avec les autres, au sein du système étudié, est le propre de la recherche opérationnelle. Ces relations se traduisent par une suite de décisions. Ces dernières sont devenues aujourd'hui si nombreuses, elles dépendent de tant de facteurs plus ou moins bien connus, qu'il est pratiquement impossible qu'un chef d'entreprise importante puisse avoir la certitude d'agir dans tous les cas de la façon la plus rationnelle. S'il est des circonstances où l'on peut, sans dommage

---

(1) - Etude publiée dans le Bulletin de la Société d'Etudes et de Documentation économiques, industrielles et sociales (205 Boulevard St. Germain) 15 novembre 1955.

Reproduit avec l'autorisation de l'auteur et des éditeurs.

excessif, prendre une décision au sentiment, il en est d'autres où une seule décision importante inadéquate entraine la catastrophe. Plus l'entreprise ou l'organisation est vaste, plus une erreur de jugement au moment de la décision, peut s'avérer désastreuse.

La recherche opérationnelle est l'auxiliaire de ceux qui sont victimes de la complexité croissante des temps modernes et qui se rendent compte que les décisions que leurs fonctions les obligent à prendre ne reposent pas toujours sur une connaissance suffisamment approfondie des faits et des mécanismes qui les commandent.

RECHERCHE OPÉRATIONNELLE ET ORGANISATION DU TRAVAIL

L'organisation du travail est, certes, une nécessité vitale, devant la complexité des tâches. La recherche opérationnelle ne se confond pas avec elle, mais la complète, en utilisant l'information la plus totale, que l'on puisse obtenir, pour établir des **modèles** dans lesquels interviennent les éléments de l'action. Si certains éléments viennent à se modifier dans le temps, le modèle réagit ; il s'en suit diverses décisions possibles, dont on peut prévoir les effets, et tirer des conclusions sur l'organisation d'ensemble.

La recherche opérationnelle n'est en aucun cas un plan d'action. Elle ne fournit que les conclusions d'une analyse systématique, et peut aller jusqu'à formuler des recommandations.

La décision incombe, de toute manière, à l'exécutif, ainsi préalablement éclairé. Il est hautement souhaitable, d'ailleurs, que la recherche opérationnelle **soit totalement distincte de la gestion.** Le chercheur opérationnel est un **auxiliaire** du chef d'entreprise, auquel on demandera d'analyser un problème avec objectivité, sans passion, sans amour-propre, avec l'attitude d'esprit du savant désintéressé.

LIMITATIONS DE LA RECHERCHE OPÉRATIONNELLE

La recherche opérationnelle n'est pas une panacée. Elle ne peut **éliminer** tous les risques d'une décision. Elle peut les **réduire**, et surtout les **mettre en lumière**, de telle sorte que la décision soit toujours prise avec le maximum de connaissances. Elle n'éliminera jamais l'incertitude. Bien au contraire, s'adressant très souvent à des phénomènes aléatoires, elle sera, par la force des choses, amenée à fournir le type de solution que l'on peut attendre d'un problème où interviennent des grandeurs aléatoires : une solution qui, **en moyenne**, sera la meilleure, ou dont la **dispersion** sera la plus réduite, le tout exprimé, non pas sous forme de probabilité, mais sous forme d'alternatives chiffrées en argent.

DÉFINITION DE LA RECHERCHE OPÉRATIONNELLE

Cette présentation liminaire de la recherche opérationnelle risque d'irriter quelque peu, car nous n'avons pas encore défini la recherche opérationnelle ; nous n'en avons pas donné les caractéristiques précises. Nous avons plutôt dit ce qu'elle n'est pas.

Or, la première question que se pose le lecteur est évidemment : "Qu'est-ce que la recherche opérationnelle ? Par quoi se caractérise-t-elle ? A quoi sert-elle?" Plusieurs définitions ont été avancées. Aucune n'a été indiscutée. A la vérité, il semble bien qu'il soit encore difficile, pour un concept encore en pleine évolution, de répondre simplement à une telle question. Et pourtant, la recherche opérationnelle est un fait, un fait incontestable, qui se traduit par des manifestations concrètes : création de sociétés de recherche opérationnelle, revues spécialisées, langage commun à un certain nombre de spécialistes, etc...

L'une des meilleures définitions que nous connaissions est celle de M. Ellis A. JOHNSON, directeur du Operations Research Office à la John Hopkins University. Il écrit :

"La recherche opérationnelle est la prédiction et la comparaison de la valeur, l'efficacité et le coût, d'une série d'actions spécifiques possibles, qui mettent en jeu des systèmes hommes-machines en vue d'atteindre des objectifs donnés. A cette fin elle utilise un modèle d'action, déterminé par l'analyse logique et, quand cela s'avère possible, par des méthodes mathématiques".

La définition répond souvent à un besoin pour certains esprits cartésiens, mais, lorsqu'elle est fournie, elle déçoit en général car, une fois fournie avec la concision nécessaire à toute définition, on n'en sait pas beaucoup plus sur le sujet. C'est plutôt en traçant les contours, en fournissant des exemples concrets d'application de la recherche opérationnelle, en incitant le lecteur à avoir la curiosité de parcourir quelques numéros d'une revue spécialisée (1) qu'on parviendra, à notre avis, à la reconnaître comme une entité distincte, une branche de la connaissance humaine.

LA RECHERCHE OPÉRATIONNELLE EST UNE RECHERCHE

Tout d'abord, la recherche opérationnelle est une variété de **recherche.** Elle vise, **d'abord, à l'intelligence** d'une situation, d'un problème, en vue d'en tirer, **ultérieurement,** des principes rationnels d'action, se substituant à des recettes empiriques qui masquent l'ignorance dans laquelle on se trouve d'un phénomène. C'est, par conséquent, une science. Elle s'efforce, comme telle, de trouver les caractères permanents, réguliers, d'un phénomène, puis de relier ces caractères à d'autres sur lesquels on peut agir. Une équipe d'hommes, un ensemble de machines, une usine, une mine, dans lesquelles interviennent des hommes, des machines, forment un tout, une entité, dont on doit chercher les lois de comportement, les facteurs qui le conditionnent. La recherche opérationnelle se distingue d'une recherche appliquée à un domaine particulier (recherche sur les propriétés d'un acier, sur la résistance de l'air sur une voilure, etc...). C'est une recherche portant sur un **ensemble** d'hommes et de machines, devant concourir à un même but. C'est la recherche au stade de **l'action en commun,** au stade de **l'opération.**

Bien entendu, si le terme de recherche opérationnelle est nouveau, cela ne veut pas dire que le processus de pensée et les méthodes utilisés n'aient jamais été utilisés jusqu'à présent. De nombreux exemples d'applications de la recherche opérationnelle peuvent être fournis sans difficulté, dans diverses branches d'activité. Parmi les précurseurs, ceux qui ont fait de la recherche opérationnelle sans le savoir, on peut citer Archimède dans l'antiquité et Thomas Edison dans les temps plus modernes.

Cependant, le vocable de recherche opérationnelle aura rendu au moins ce service de mettre en évidence **l'unité** des démarches intellectuelles dans les disciplines les plus variées, leur similitude profonde, l'utilisation des mêmes concepts de base.

LA RECHERCHE OPÉRATIONNELLE ET LES DISCIPLINES CONNEXES

Nécessité du travail en équipe

Comme dans toute recherche, le but à atteindre est la connaissance, la compréhension des phénomènes. Toutes techniques de mesure, de calcul, de déduction, que les autres sciences peuvent fournir sont utilisées à une telle fin, pour autant qu'elles permettent de comprendre les phénomènes, et, de ce fait, de les prévoir, d'exercer un contrôle, une commande, sur eux. Le nombre de sciences différentes intervenant dans la recherche opérationnelle est tel que la solution idéale à l'étude d'un problème opérationnel exige la réunion d'une équipe de chercheurs de différentes spécialités, chacun d'eux apportant ses connaissances

---

(1) - Journal of the Operations Research Society of America, notamment.
- Management science
- Revue de Statistique Appliquée

à l'équipe. L'un des exemples les plus probants de l'efficacité de l' "équipe" a été fourni en Grande-Bretagne en 1940. Le Professeur P.M.S. Blackett de l'Université de Manchester, lauréat Nobel, fut chargé par le général Pile, commandant en chef de la défense anti-aérienne, d'étudier la mise en place et la coordination d'un réseau d'équipement radars, qui avaient donné de bons résultats dans les stations d'essais, et ne s'avéraient pas satisfaisants à l'expérience.

Le Professeur Blackett réunit une équipe composée de 3 biologistes, 2 spécialistes de physique mathématique, un astronome, un physicien, deux mathématiciens, un statisticien, un militaire. Cette équipe, le "Blackett circus" comme on l'appela, montra rapidement l'efficacité de la formule employée. Par la suite, elle eut à s'occuper de problèmes afférents à la détection des navires, des sous-marins, etc...

LA STATISTIQUE MATHÉMATIQUE ET LE CALCUL DES PROBABILITÉS, DISCIPLINES FONDAMENTALES

La fréquente régularité relative du comportement de certains ensembles hommes-machines a fait cependant de la statistique mathématique une discipline fondamentale parmi toutes celles auxquelles la recherche opérationnelle doit faire appel. Mais la statistique ne peut être utile à l'action, à la prévision, qu'à la condition d'être accompagnée d'une **théorie explicative,** qu'elle a pour objet de confirmer ou d'écarter. Cette théorie ne peut être fournie que par une analyse systématique du problème à résoudre, analyse dans laquelle les **modèles** mathématiques jouent un rôle particulièrement important.

Un modèle est, comme l'on sait, une représentation schématique, donc simplifiée, d'un phénomène beaucoup plus complexe, mais qui rend compte, avec une approximation jugée suffisante, des mécanismes qui le conditionnent et permettent, dès lors, de prévoir ce qui se passera dans des conditions données, de "domestiquer" le phénomène.

Par ailleurs, il est fréquent dans la vie courante de constater qu'un phénomène est dû soit à de très nombreuses causes de faible effet chacune, soit à quelques causes en nombre limité, auxquelles s'ajoutent différentes petites causes. L'effet cumulé de nombreuses petites causes, trop nombreuses pour être identifiées et analysées donne lieu à des **fluctuations** que l'on attribue au "hasard". La recherche opérationnelle s'intéressant aux phénomènes naturels, que l'on rencontre dans les opérations courantes, fait donc naturellement un large appel au calcul des probabilités. Mais ce qui la caractérise, c'est que ce recours au calcul des probabilités est orienté vers une décision pratique, vers la recherche de l'optimum de gestion sur le plan économique ; elle vise, en un mot, à gagner de l'argent.

Sans prétendre pouvoir être complet dans notre exposé, qui exigerait un livre, nous nous efforcerons dans ce qui suit de dégager, en faisant appel au maximum à des cas concrets, les méthodes de travail utilisées en recherche opérationnelle , fondées sur la statistique mathématique et le calcul des probabilités, d'une part, et sur les modèles mathématiques que permettent de construire d'autres disciplines, ou branches de disciplines, apparentées ou non, d'autre part (théorie des queues, théorie des jeux, programmes linéaires, théorie de l'information, contrôle de qualité, etc...).

II

LES MÉTHODES DE TRAVAIL ET LES THÉORIES UTILISÉES EN RECHERCHE OPÉRATIONNELLE

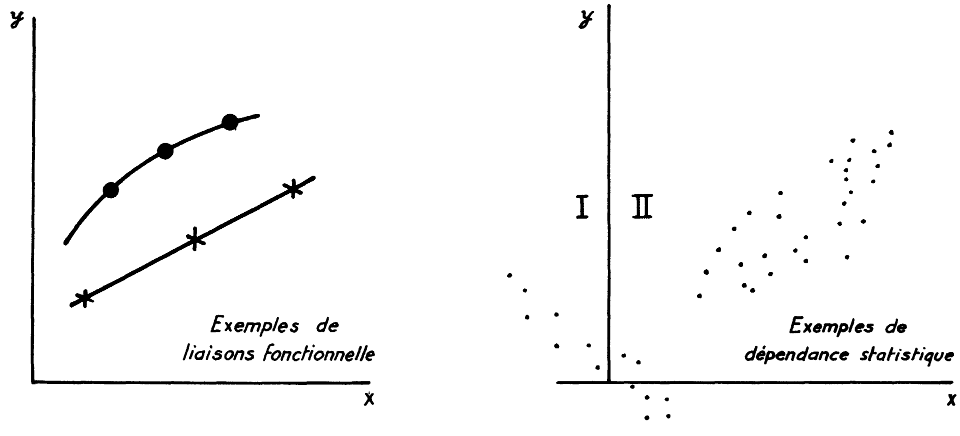
LIAISON FONCTIONNELLE - DÉPENDANCE STATISTIQUE - REGRESSION

Dans la grande majorité des situations rencontrées dans la pratique, l'étude statistique ne porte pas sur une seule variable, mais en fait intervenir plusieurs.

L'étude des relations entre les variables en cause fait intervenir la notion de liaison fonctionnelle, lorsque les relations entre grandeurs peuvent être observées à l'état "pur" (Exemple : période du pendule en fonction de sa longueur et de la gravitation terrestre), ou la notion plus large de dépendance statistique lorsque les grandeurs ne peuvent être observées à l'état pur en raison de l'intervention de multiples causes de variabilité ou du caractère aléatoire de certaines grandeurs. Les exemples de dépendance statistique sont innombrables :

- pouvoir calorifique et teneur en cendres d'un charbon
- résistance à la traction et teneur en carbone d'un acier
- rendement en blé et engraissement des terres
- consommation d'acier et revenu national par tête, etc...

Alors que dans la liaison fonctionnelle, la dépendance entre deux caractères se représente par une courbe, la dépendance statistique se traduit par un **nuage de points**



On conçoit que dans la liaison fonctionnelle, le degré de connaissance soit parfait, puisqu'à une valeur donnée d'un des caractères correspond une valeur bien déterminée de l'autre. Dans le cas du nuage de points, pour une valeur donnée de l'un des caractères, on peut avoir plusieurs valeurs possibles de l'autre dont un petit nombre seulement aura pu être observé ; mais toutes ces valeurs possibles ne sont pas quelconques, elles sont réparties autour d'une valeur centrale, avec une certaine dispersion. La connaissance de la liaison entre le caractère y et le caractère x, sans être aussi stricte que dans le cas de la liaison fonctionnelle, n'en est pas moins très utile et parfois suffisante pour l'action pratique. C'est la théorie de la **régression.**

On appelle **coefficient de corrélation linéaire** (1) entre x et y une grandeur mathématique R qui mesure la variabilité de y pour x donné, ou réciproquement, de x pour y donné. Si cette variabilité est nulle (cas de la liaison fonctionnelle), ce coefficient de corrélation est égal à + 1 ou - 1 selon que les deux grandeurs varient ou non dans le même sens. Si la variabilité est très grande, le coefficient de corrélation est très voisin de 0.

Le carré du coefficient de corrélation R mesure la fraction de la variabilité de y que l'on peut attribuer à la liaison de y avec x. Si la fraction inexpliquée $1 - R^2$ est importante, on mettra en cause une variable supplémentaire z. On peut, de même que précédemment, chercher la variabilité de y pour x et z donnés. On obtient de même un coefficient de corrélation multiple $R_{y/x,z}$ dont le carré mesurera la fraction de la variabilité de y expliquée par la liaison entre y et l'ensemble z, x. On peut naturellement généraliser à un nombre quelconque de variables.

La statistique permet, de cette manière, de procéder comme les sciences expérimentales, en opérant "toutes choses égales par ailleurs".

(1) - Sur la définition des termes utilisés, pris ici dans un sens technique précis, nous renvoyons le lecteur aux ouvrages spécialisés (par ex. l'ouvrage de MM. E. MORICE et F. CHARTIER, intitulé METHODE STATISTIQUE - Institut National de Statistique - Paris 1955.

ANALYSE DE LA VARIANCE

L'analyse statistique de la variabilité d'une grandeur peut ainsi conduire à mettre en évidence un petit nombre de facteurs produisant chacun un effet appréciable, que l'on peut précisément mesurer.

Cette analyse s'appelle analyse de la variance. Elle a été mise au point par l'anglais R.A. FISHER à propos de plans d'expérimentation agronomiques. Elle permet de conférer à chaque facteur étudié un "poids" dans l'explication du phénomène de variabilité étudié.

On isole ainsi des facteurs dits **contrôlés** des facteurs inconnus responsables de la fluctuation résiduelle.

Lorsque ces facteurs jouent simultanément, mais **indépendamment,** et de manière additive, sur une grandeur déterminée, on montre en effet que la variance totale (variance = carré de l'écart-type de la distribution considérée) est la **somme** des variances qu'on obtiendrait si chaque facteur jouait seul.

C'est cette propriété fondamentale qu'utilise l'analyse de la variance, dont les exemples d'application sont très nombreux (influence de l'opérateur sur la dispersion d'une mesure, qualité d'un produit fabriqué dans des conditions différentes, etc...).

Exemple

Nous allons donner un exemple de recherche opérationnelle fondée sur l'analyse statistique, en prenant un cas, étudié récemment, où l'on ne s'attendrait pas à voir a priori intervenir une science réputée exacte. Il s'agit d'une étude des problèmes sociaux (moral des ouvriers, commandement) qui vient d'être faite dans les houillères britanniques (1).

Dans cette étude, on s'est attaché à rechercher quels facteurs pouvaient influencer certaines caractéristiques mesurables de l'état moral des ouvriers, comme les primes d'assiduité, (ou son inverse, l'absentéisme), les tonnages perdus en conflits du travail, etc...

L'analyse a montré que l'importance de l'effectif de chaque fosse, unité de travail homogène et indépendante, jouait un rôle considérable, et qu'il y avait une corrélation fort nette entre l'effectif et l'absentéisme par exemple, ce dernier étant plus élevé pour les fosses les plus importantes et moins élevé pour les petites fosses.

Une observation semblable ayant été faite pour les taux d'accidents, on a pu se demander dans quelle mesure la grande fosse n'était pas une conséquence de la puissance des couches à exploiter, les couches puissantes donnant lieu, par ailleurs, à des taux d'accidents plus élevés que les couches minces. Pour répondre à cette question, on a établi une statistique du taux des accidents dans les carrières à ciel ouvert, qui a confirmé les résultats obtenus pour les houillères. L'effet de "couche puissante" se trouve donc éliminé et il existe bien une forte corrélation positive entre l'importance de l'effectif et l'absentéisme ou le taux des accidents.

L'auteur s'est ensuite demandé si d'autres facteurs n'intervenaient pas de façon significative, et il a eu l'idée d'étudier systématiquement l'influence du commandement, de sa "dilution" relative, des circuits suivis par le cheminement des ordres en descendant la hiérarchie, et des informations en la remontant. Contrairement à ce que l'on pourrait penser, ces différents facteurs d'influence peuvent se mesurer, non certes avec la précision des sciences exactes, mais avec une approximation suffisante pour en tirer des enseignements utiles pour l'action. Les techniques de la dépendance statistique, de la corrélation multiple, de l'analyse de la variance dont nous avons dit quelques mots précédemment permettent d'y parvenir.

---

(1) - Dr R.W. Revans - Facteurs dimensionnels dans la gestion des houillères britanniques (Annales des Mines - Novembre 1955 à paraitre).

L'étude citée a été extrêmement utile pour jeter la lumière sur des phénomènes sociaux jusqu'à présent mal analysés, ou connus empiriquement ou subjectivement. Elle a ouvert la voie à des réformes dans la structure du commandement dans les houillères britanniques.

LES TECHNIQUES DE L'ÉCHANTILLONNAGE ET DU SONDAGE

Un corps de théorie extrêmement important par ses multiples applications est celui de l'échantillonnage. Il s'agit de se prononcer, sur la foi d'un nombre limité de prélèvements dans une population comptant un très grand nombre d'individus. Par exemple, de déterminer le nombre de détonateurs défectueux dans un lot livré, la teneur d'un minerai, la richesse d'un gisement, etc...

Plus le nombre des prélèvements est grand, meilleure sera l'estimation de la grandeur étudiée.

Mais le contrôle à 100% peut être onéreux ou même impossible (évaluation d'un gisement). On peut déterminer, grâce aux théories fondées sur le calcul des probabilités, le meilleur compromis à réaliser, dans chaque cas particulier, entre les dépenses entraînées par un contrôle plus poussé, et les inconvénients que présentent le rejet possible d'un lot de fabrication, une évaluation erronée de la richesse d'un gisement, etc... Les phénomènes aléatoires auxquels on a affaire se traitent en cherchant les solutions qui, en moyenne, fournissent le meilleur résultat financier.

En Afrique du Sud, une équipe d'ingénieurs des mines, d'économistes et de statisticiens est employée par la Central Mining and Investment Corporation, pour l'étude systématique de l'évaluation des gisements aurifères. Ses travaux remarquables (1) ont montré que l'on procédait dans le passé de façon simpliste et erronée en tablant sur les moyennes arithmétiques des teneurs des prélèvements et en ne tenant pas compte de la véritable loi des distributions des teneurs ; ils ont conduit à améliorer considérablement la technique des estimations des panneaux rentables ou non rentables.

La théorie de l'échantillonnage a des applications extrêmement nombreuses, dans tous les problèmes industriels où il faut porter le meilleur jugement possible sur une population d'objets en très grand nombre, sans qu'il en coûte trop cher.

LA THÉORIE DES QUEUES OU DES FILES D'ATTENTE

Dans de très nombreuses circonstances, l'on rencontre le phénomène de la queue ou file d'attente. L'arrivée d'une des unités intervient avant que l'opération de l'unité précédente ait pu s'effectuer. Un avion arrive sur un aérodrome et doit attendre que la piste soit libre, c'est-à-dire que l'avion arrivé avant lui ait effectué son opération d'atterrissage et quitté la piste. Un bateau arrive au port alors que les bateaux à quai sont encore en déchargement, aucune place n'étant disponible. Dans les chemins de fer, la circulation routière, devant les guichets de poste, de banque, les pompes à essence, dans une chaine de production, sur des lignes téléphoniques, etc..., c'est-à-dire dans des situations extrêmement diverses, l'on rencontre des embouteillages, ou des files d'attente. Or, les méthodes d'analyse de telles situations relèvent toutes d'une des branches de la recherche opérationnelle, la théorie des queues.

Il est évidemment éminemment souhaitable d'analyser ce phénomène afin d'en tirer des enseignements pratiques, visant à supprimer ou réduire les files d'attente. Il en résultera, bien entendu, des gains très importants, pouvant se chiffrer par des centaines de millions parfois.

Dans la plupart des cas, les arrivées des diverses unités se produisent au hasard dans le temps. Bien entendu, si l'intervalle de temps séparant deux arrivées successives est, en moyenne, inférieur à l'intervalle de temps nécessaire

---

(1) Publication en français imminente dans les "Annales des Mines".

à l'opération de service (temps d'atterrissage d'un avion, de déchargement d'un navire, etc...), la queue augmentera indéfiniment. Mais, dans le cas contraire, l'on ne peut éviter la formation de queue qu'à la condition que les arrivées et les temps de service soient parfaitement réguliers. Si tel n'est pas le cas, il se produit, selon la loi de probabilité à laquelle obéit l'instant d'arrivée ou le temps de service, ou les deux à la fois, des queues dont la longueur, la fréquence, peuvent faire l'objet de représentations par un modèle. Cette analyse effectuée, il est possible d'agir sur certains éléments du problème sur lesquels on a des moyens d'action (horaire, longueur des quais maritimes, nombre de guichets, etc...), sur les **paramètres** du problème, pour obtenir sur le résultat, les **queues** une modification dans le sens voulu. L'étape suivante consiste à mettre en balance les gains réalisés par la diminution des attentes et les dépenses ou sacrifices consentis pour l'aménagement des moyens d'action. On voit, dès lors, que l'on peut parvenir à définir un **optimum** économique. On commencera par former un modèle mathématique, dans lequel on se donne a priori la loi de probabilité à laquelle obéit l'arrivée d'une unité ou le temps de service, et on en déduit la loi de répartition des files d'attente. La loi de probabilité généralement utilisée est celle de Poisson, qui se prête bien aux calculs par son expression analytique.

Puis, l'on cherchera si, dans la pratique, cette loi de probabilité convient bien aux phénomènes observés. Si tel est bien le cas, c'est-à-dire si l'on n'a pas de raisons de supposer qu'ils n'obéissent pas à cette loi de probabilité, on calcule les coûts des files d'attente déterminés par le modèle, et l'on voit ce qu'ils deviennent en modifiant l'un des paramètres, par exemple en réduisant le temps de service. On compare au coût des moyens supplémentaires mis en oeuvre. On aboutit à une décision rationnelle. Pratiquement, il n'est pas rare que l' ignorance de la théorie des queues conduise à l'adoption de décisions mal appropriées. Philip M. MORSE cite le cas d'une compagnie de navigation qui avait recours à 3 ports de déchargement. Ayant remarqué que l'un d'eux pratiquait des temps de déchargement inférieurs aux deux autres, elle prit la décision d'envoyer tous ses navires se décharger au port de meilleur rendement. Le résultat fut que la cadence moyenne d'arrivée des bateaux fut si voisine du temps moyen de déchargement qu'il s'en suivit un triplement des surestaries. Les dirigeants interprétèrent ce résultat comme une baisse soudaine de rendement dans le port réputé le plus rapide. La théorie des queues, quand elle fut appliquée à ce cas particulier, montra qu'il n'en était rien, et qu'une utilisation **limitée** des deux autres ports de moindre rendement donnait les meilleurs résultats.

Dans ce qui précèse, nous avons visé des lois de probabilité ayant une expression analytique simple, se prêtant aux calculs sur les queues, lesquels ne sont pas simples pour autant. Une nouvelle méthode, dite **méthode de Monte-Carlo** a un domaine d'application plus large, parce qu'elle permet d'utiliser une loi de probabilité non pas théorique, mais relevée d'après la pratique observée. Grâce à l'utilisation de tables de nombres au hasard, on peut reconstituer toute une série de phénomènes tels que l'arrivée et l'atterrissage d'avions, dotés des mêmes propriétés statistiques que l'arrivée et l'atterrissage d'avions dans la réalité. Une machine électronique donne alors les résultats de calculs compliqués en un temps remarquablement court. Les résultats obtenus n'ont, certes, ni l'élégance ni le caractère de généralité de ceux dérivant d'une formule mathématique, mais ils sont d'obtention très rapide, et permettent de dresser des tables numériques utilisables en pratique.

On voit quelle est la richesse et le champ d'action de cette théorie des queues, assortie ou non de la méthode de Monte-Carlo.

Certains problèmes de circulation automobile sont, à l'heure actuelle, en France, étudiés en partie grâce à ce puissant instrument de travail. En Angleterre, on a étudié la circulation routière d'une artère en fonction de la vitesse des automobiles et de la largeur de l'artère, et l'on a chiffré l'économie annuelle en heures de travail des personnes transportées, en moyens de transport pour un tonnage de marchandises donné, en essence, etc... pour un élargissement déterminé de l'artère, dont on connaissait le coût par ailleurs. On a pu déterminer si l'opération était intéressante, dans l'immédiat et à terme, aux taux d'intérêt pratiqués usuellement dans les gros investissements de l'espèce.

LA THÉORIE DES JEUX

La théorie des jeux, développée très récemment par de Morgenstein et Von Neumann (1), constitue un autre outil de travail très employé en recherche opérationnelle. Ils ont montré que tout jeu se ramène pratiquement au concept élémentaire suivant :

Supposons le tableau rectangulaire de l'exemple ci-dessous

	I	II	III	IV	V
A	2	5	3	4	-1
B	3	-4	2	-1	5
C	2	3	-6	-4	1
D	-3	0	5	-4	-2

Le 1^er^ joueur a le choix d'une des lignes A, B, C, D
Le 2^e^ joueur a le choix d'une des colonnes I, II, III, IV, V.

Chacun des joueurs ignore le choix de l'autre. Quand les choix ont été faits de part et d'autre, on convient que le chiffre figurant à l'intersection de la ligne et de la colonne est le montant que le 2^e^ joueur doit verser au 1^er^.

Ainsi, si le 1^er^ joueur a choisi la ligne B
2^e^ joueur a choisi la colonne IV, le 2^e^ joueur versera au 1^er^ :
- 1 (c'est-à-dire gagnera 1)

On voit que le résultat est déterminé par les décisions combinées des deux joueurs, et non pas par l'un des deux joueurs indépendamment de l'autre.

Il est clair que si le 1^er^ joueur connaissait à l'avance le choix du second, il pourrait déterminer la valeur optimale pour lui. Par exemple, si le 1^er^ joueur sait que le second choisira la colonne IV, il prendra la ligne A. Réciproquement, si le 2^e^ joueur sait que le premier choisira la ligne A, il fixera son choix sur la colonne V, optimale pour lui.

Supposons que le 2^e^ joueur sache que le 1^er^ joueur a un tempérament à jouer la défensive, c'est-à-dire qu'il voudra éviter surtout de perdre gros. Il y a alors des chances pour qu'il ne choisisse pas des lignes où les pertes peuvent être lourdes pour lui, et qu'il choisisse donc la ligne A où la perte est limitée à 1, toutes les autres combinaisons donnant lieu à gain.

Le 2^e^ joueur, raisonnant ainsi, sera alors amené à choisir la colonne V.

Réciproquement, le 1^er^ joueur, reconstituant le raisonnement du 2^e^, et prévoyant qu'il fixera son choix sur la colonne V, sera bien inspiré de modifier sa "tactique" et de choisir la ligne B, pour gagner 5.

Le tableau de valeurs numériques que nous avons présenté ici pour mieux nous faire comprendre peut être remplacé par un tableau de choix ou "actions" possibles, désignés par des lettres a_1, b_1, c_1, ... pour le 1^er^ joueur, ensemble de tactiques (T_1), a_2, b_2, c_2, ... pour le second, ensemble de tactiques (T_2). Le tableau des situations produites par l'ensemble des 2 tactiques.

$$\begin{array}{lll} (a_1\ a_2) & (a_1\ b_2) & (a_1\ c_2)\ldots\ldots \\ (b_1\ a_2) & (b_1\ b_2) & (b_1\ c_2)\ldots\ldots \\ (c_1\ a_2) & (c_1\ b_2) & (c_1\ c_2)\ldots\ldots \end{array}$$

pouvant se représenter par

$$(R) = (T_1) \times (T_2)$$

C'est sur un tableau de ce genre que s'exerce la réflexion préalable des deux joueurs, chacun d'eux connaissant l'ordre de préférence des résultats possibles.

Cette réflexion préalable consiste donc pour chacun des adversaires, à se représenter les actions possibles de l'autre, et pour chacune de ces éventualités, à

(1) Von Neumann et de Morgenstein - Theory of Games

examiner ce que devrait être sa propre décision : "Si mon adversaire agissait de telle manière, voici ce que je devrais faire, et voilà ce qu'en serait le résultat". Mais il peut, aussi, examiner chacune des décisions qu'il pourrait prendre et étudier les différentes éventualités ; exercer son choix selon qu'il vise à réduire le risque au maximum, à gagner le plus possible, etc... (1).

Cette théorie des jeux se retrouve dans de nombreuses situations militaires, où les deux adversaires occupent les rôles des deux joueurs de la théorie. En fait, pendant la dernière guerre, la théorie des jeux a été largement exploitée par des groupes de chercheurs opérationnels pour déterminer les meilleures tactiques dans les combats aériens entre bombardiers et chasseurs, dans les combats aéro-navals entre sous-marins et avions de chasse.

Prenons l'exemple du duel aérien entre bombardier et chasseur ; si le chasseur, par exemple, tire trop tôt, de trop loin, il risque de manquer son but et de se trouver désarmé lorsqu'il se sera rapproché suffisamment ; si au contraire, il attend de s'approcher suffisamment, il risque d'être atteint avant par le bombardier. On conçoit que si l'on se donne les règles du jeu, savoir la précision des armes de part et d'autre, le nombre de coups consécutifs sans recharge, le degré de protection des avions, il soit possible de déterminer la distance de tir la plus favorable et les probabilités respectives d'atteindre son rival ou d'être soi-même atteint.

Des problèmes semblables de recherche opérationnelle, faisant appel à la théorie des jeux, trouvent des applications dans les affaires commerciales, comme il est facile de s'en douter.

LA RÉPARTITION OPTIMA DES MOYENS

Un autre domaine de la recherche opérationnelle réside dans la répartition optima de certains moyens pour atteindre un objectif déterminé. C'est à propos d'opérations aéro-navales pendant la guerre que cette forme de la recherche opérationnelle a pris naissance. Voici le problème type à résoudre : Il s'agit de repérer un navire, un sous-marin ennemi opérant dans une zone donnée. Comment utiliser les avions dont on dispose pour le trouver? On se donne le rayon visuel que l'avion peut balayer, la vitesse de l'avion.

Le problème est d'une simplicité enfantine si le bâtiment adverse a les mêmes chances de se trouver en n'importe quel point de la zone géographique donnée (en termes de calcul de probabilité, si tous les points de l'espace à battre ont même densité de probabilité). Il suffit, en effet, de répartir les avions dont on dispose en champs d'action tous équivalents, dont les surfaces ajoutées forment l'ensemble de la surface à battre. Si, par contre, les probabilités des diverses zones élémentaires ne sont pas identiques, la répartition des moyens doit être toute autre. L'optimum ne se détermine pas intuitivement dans tous les cas. Un problème de mathématiques, à résoudre pour chaque cas particulier, donnera la solution optima.

Le même problème se présente dans la gestion industrielle et commerciale, avec des variantes. Lorsqu'on dispose de peu d'agents pour visiter les divers points de vente d'un réseau de distribution, on doit se demander comment les répartir au mieux pour atteindre le meilleur résultat. L'analyse à laquelle on doit procéder ne peut être remplacée par une intuition générale, car la solution optima n'est pas toujours exprimable de façon simple.

Des firmes ayant des nombreux points de vente, des succursales multiples, etc... qui emploieraient des chercheurs opérationnels pour l'analyse du fonctionnement de leurs ventes verraient sûrement les avantages de la création d'un service adéquat dépasser très largement les dépenses correspondant à la marche de ce service nouveau. Pour les firmes de moindre importance, l'emploi à temps plein de spécialistes n'est pas indiqué, et une consultation isolée peut suffire.

---

(1) Pour de plus amples développements se reporter à :

G. Th. GUILBAUD - La théorie des Jeux. Revue d'Economie Politique Mars - Avril 1955.

Un type de problème qui se rattache un peu au précédent est celui du choix de la meilleure implantation d'une usine tirant ses matières premières de A et B respectivement, et vendant ses produits fabriqués aux points C, D, ... avec une répartition donnée. Ce problème admet des solutions géométriques élégantes dans certains cas particulièrement simples.

LES PROGRAMMES LINÉAIRES

Une catégorie très apparentée de problèmes auxquels s'intéresse la recherche opérationnelle est celui de la programmation linéaire (linear programming). Il s'agit de rendre maxima ou minima une fonction de certaines variables, assujetties par ailleurs à respecter un certain nombre d'inégalités. Les exemples pratiques de tels problèmes sont extrêmement nombreux. En voici un :

Une société sidérurgique peut produire, en proportions variables, des laminés marchands, des tôles, des feuillards, produits laminés à froid ou galvanisés, etc... à partir de l'acier brut, en lingots, lequel peut appartenir à des catégories différentes de qualité (acier Thomas, Martin, Duplex...) et être fourni partiellement par la société elle-même, partiellement par l'extérieur. Supposons que la société ait des commandes des différents produits finals, pour livraison dans trois mois. Quels programmes de fabrication adopter pour obtenir un côut de fabrication minimum, compte tenu des limitations qu'imposent les équipements de la société, la disponibilité en matières premières, etc...?

Les variables à choisir sont les matières premières à acquérir à l'extérieur, et le taux de marche de chaque installation.

La fonction à rendre minima est une fonction linéaire de ces variables. Celles-ci sont par ailleurs assujetties à respecter un certain nombre d'inégalités exprimant que la disponibilité extérieure ne peut dépasser tel montant (délais de livraison des fournisseurs), et que le taux de marche de chaque installation ne peut excéder 100%. C'est donc là un problème type de programme linéaire.

Des programmes linéaires de cette nature ont été mis en oeuvre dans des sociétés américaines de pétrole, qui avaient à résoudre un problème analogue, en partant de bruts de diverses provenances et disposant d'installations de cracking catalytique, permettant la fabrication, entre certaines limites, des divers produits finals (essence, gaz-oil, fuels...).

Si le nombre des variables est élevé, le programme linéaire est d'une solution difficile. Pour faire saisir, cependant, la base de la méthode, qui fait appel à la géométrie, en la circonstance, nous allons prendre un exemple très simple, celui d'une fabrication donnée que l'on peut réaliser avec plusieurs formules dans lesquelles interviennent la main-d'oeuvre (travail) et le capital (machines) en proportions variées. Nous prions le lecteur de se reporter en outre à l'annexe où nous avons donné, avec son accompagnement indispensable de mathématiques (au demeurant d'un niveau élémentaire) un autre exemple, celui d'une régulation de production dans une entreprise à ventes saisonnières.

Supposons que la même fabrication projetée puisse être réalisée avec

1	-	50	ouvriers	et	200.000.000	frs d'équipement
2	-	80	"	"	100.000.000	" "
3	-	120	"	"	80.000.000	" "
4	-	160	"	"	45.000.000	" "

et avec les solutions intermédiaires, c'est-à-dire un mélange, en proportions quelconques, des quatre procédés.

Joignons les points représentatifs de ces solutions sur un graphique où le nombre d'ouvriers figure en ordonnées et le capital équipement en abscisses (fig: 1).

Enfin, supposons que le capital soit amorti et rémunéré à un taux total de 24% par an, que le personnel ouvrier compte pour 600.000 frs en moyenne par an.

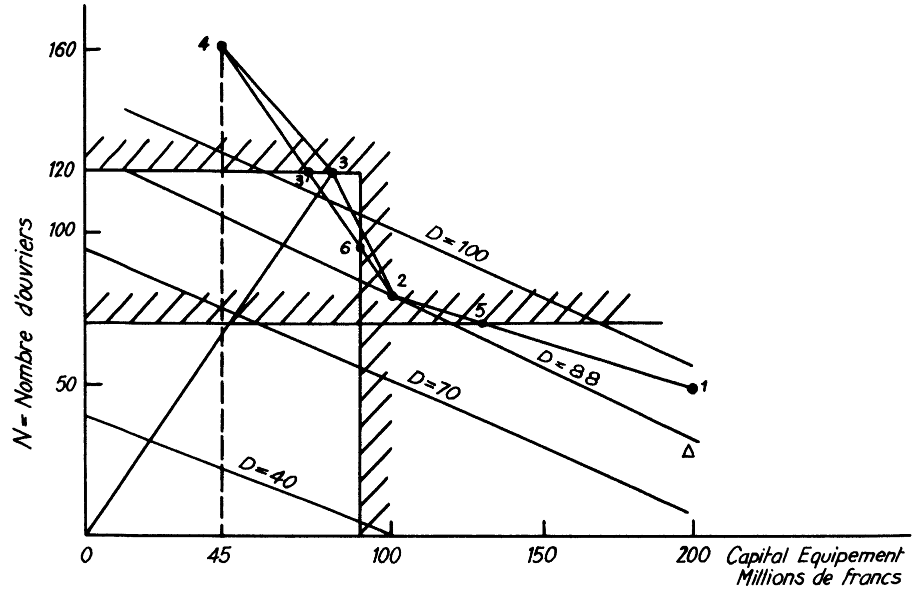


Fig. 1

Le coût d'exploitation annuel D comporte :

Pour un capital C	0,24 C en millions de Frs			
Pour un nombre N d'ouvriers	0,6 N	"	"	"
Des frais généraux fixes supposés égaux à	16	"	"	"

$$D = 0,24\ C + 0,6\ N + 16$$

On peut représenter cette dépense annuelle sur le même graphique par une série de droites parallèles, D, fonction de C et de N. Il s'agit de droites de même pente égale à -0,4. Nous avons représenté quelques-unes de ces droites, pour D = 40,70, 100 millions de frs respectivement.

La première de ces parallèles qui touche la ligne brisée 1, 2, 3, 4 est cette somme qui conduit à la dépense de fonctionnement minima. On voit sans peine qu'il s'agit du sommet 2 de la ligne brisée, pour lequel D = 88 millions de frs. (droite Δ).

Jusqu'à présent, nous avons supposé qu'il n'existait aucune limitation dans le nombre d'ouvriers ou le capital disponible. De telles limitations existent en réalité. Le point de fonctionnement optimum devra alors être à l'intérieur du rectangle délimité par le nombre maximum d'ouvriers (qui peut être dû par exemple à une insuffisance de locaux) ou le capital disponible maximum. Si le point 2 est à l'intérieur du rectangle, tout va bien. Sinon, il faut chercher la solution la meilleure compte tenu des liaisons à respecter. Supposons par exemple qu'on ne puisse embaucher (ou loger) plus de 70 ouvriers. La solution figurée par le point 5 est préférable à celle figurée par 1 ; bien entendu, on ne trouvera pas obligatoirement un capital équipement intermédiaire entre ceux figurés en 1 et 2.

On peut avoir une limitation de capitaux, par exemple à 90 millions, et une limitation des ouvriers à 120 par exemple. Le point optimum sera le point 6 (si bien entendu, il correspond à une solution techniquement possible). De toutes manières, le point 3' serait préférable au point 3, car 3' est une combinaison des procédés 2 et 4, qui, pour un même nombre d'ouvriers nécessiterait un capital moindre.

On voit, en somme, que l'étude à laquelle nous procédons est liée à celle des lignes polygonales convexes. Bien entendu, dans des cas aussi simples que celui que nous venons d'examiner, le calcul direct est facile et permet de retrouver les résultats sans recours à une représentation géométrique.

Dans l'espace à 3 dimensions, l'étude se transpose de la même façon à celle des faces de polyèdres, qui se substituent aux lignes du polygone dans l'espace à 2 dimensions. Les arêtes séparent deux faces, comme le point séparait deux lignes en géométrie plane. Enfin, les arêtes ont, en commun, des sommets. L'étude des propriétés des polyèdres convexes rend, par suite d'inestimables services à l'étude des programmes linéaires. C'est là l'une des branches de la **topologie**, science qui relève de la géométrie, au même titre que la géométrie métrique ou la géométrie projective.

Lorsque le nombre de variables dépasse quatre, la représentation géométrique fait défaut, mais l'on peut, sans difficulté, généraliser le processus de pensée, parler d'un espace à n dimensions, dans lequel les n variables définissent un point. Ce point peut se déplacer sur une "surface" à n - 1 dimensions, s'il y a une condition entre ces variables ; si elle prend la forme d'une inégalité, le point doit se situer de l'un des côtés de l'espace défini par la "surface" en question. Si les relations sont linéaires - ce qui est le cas des programmes linéaires par définition - la "surface" séparatrice est un "hyperplan". La région dans laquelle il faut choisir l'ensemble des variables est alors limitée par une série de tels hyperplans, formant un polyèdre convexe dans l'hyperespace considéré. Les sections de ce polyèdre par la famille d'hyperplans parallèles (P) représentant la fonction linéaire à maximer ou rendre minima donnent les solutions cherchées.

Certains hyperplans (P) de la famille couperont le polyèdre limitant la région des solutions acceptables ; d'autres ne le couperont pas. Il y a deux hyperplans limites, l'un correspondant au minimum de la fonction, l'autre au maximum, dans la région des solutions que l'on peut retenir.

Mais la représentation géométrique n'est qu'un guide pour l'esprit. Si le nombre de variables augmente beaucoup, il est clair que la représentation géométrique ne peut servir telle quelle. La solution analytique devient vite très laborieuse, et lorsque le nombre de variables devient très élevé, elle échappe à l'esprit humain.

On apprend, en mathématiques spéciales, que la résolution d'un système de n équations linéaires à n inconnues, n'offre pas de difficulté. Si l'on sait résoudre un système de 3, 4, 5 équations linéaires à 3, 4, 5 variables, on doit, **théoriquement**, dit-on, savoir résoudre un système de 50 ou 100 équations linéaires à 50 ou 100 inconnues.

Or, **il n'est pas possible**, à l'esprit humain, dans un délai acceptable pour l'homme, de résoudre de tels systèmes. Le fait nouveau, c'est que l'introduction de machines à calculer puissantes et rapides, comme les machines électroniques, permet précisément de fournir des solutions de tels systèmes dans un temps raisonnable, et permet, dès lors, de traiter les problèmes de programmes linéaires **en pratique**.

Donnons un autre exemple d'application des programmes linéaires au cas de plusieurs variables : celui du planning de production.

Supposons qu'une mine soit capable de produire N tonnes par mois de charbon mais que les ventes soient faibles en été, importantes en hiver. Une solution possible est d'augmenter le nombre d'heures de travail en automne et en hiver, mais les heures supplémentaires coûtent cher. Une autre solution est de produire en été au-delà des besoins et de stocker la production excédentaire jusqu'en hiver : mais le stockage et le déstockage coûtent cher.

Les variables à choisir sont la production de chaque mois, le nombre d'heures supplémentaires chaque mois.

Ces variables sont soumises à des conditions se traduisant par des inégalités : la production mensuelle a une limite supérieure, les heures supplémentaires chaque mois également. D'autre part, le total annuel produit ne doit pas être inférieur au total des ventes possibles de l'année.

La quantité à rendre minima est la dépense totale, en comptant les heures supplémentaires et les frais de stockage. C'est là un problème de programme linéaire, à la condition toutefois que l'on puisse prédire exactement les ventes de l'année. En réalité, ces ventes ne sont pas connues exactement. On n'a que des probabilités de ventes. Tout se passe comme si le polyèdre de notre image de tout à l'heure, au lieu d'avoir des faces et des arêtes nettes, avait en fait des faces et des arêtes floues.

Nous donnons, en annexe, un exemple particulièrement simple d'application au cas d'un fabricant d'accessoires d'automobiles. Les problèmes de ce genre ne sont pas tous solubles, dans l'état actuel des connaissances sur la solution des programmes linéaires. Mais on peut se rendre compte que l'on peut se rapprocher de la solution optima, à la manière dont un observateur, qui marcherait sur le polyèdre convexe, à la recherche du sommet optimum, commencerait par chercher une arête, la suivrait dans un sens si la fonction linéaire à maximer ou rendre minima se déplace elle-même dans le sens désiré, et dans le sens contraire autrement ; puis rencontrerait un sommet, le dépasserait toujours sur une arête si la fonction s'améliore, s'arrêterait si tel n'est pas le cas. Cette méthode dite "méthode du simplex" qui consiste à suivre les arêtes du polyèdre en s'assurant que la forme linéaire à minimiser prend des valeurs toujours décroissantes, est actuellement en plein développement, dans la famille des techniques économiques.

LE CONTROLE DE QUALITÉ

Dans le domaine de la gestion économique des entreprises, le contrôle statistique de la qualité des fabrications a été le premier à s'instaurer parmi la gamme des divers contrôles (contrôle budgétaire, contrôle des coûts, contrôle des ventes, contrôle des stocks, etc...) que couvre la recherche opérationnelle.

Grâce au contrôle statistique de qualité, on est en mesure actuellement de faire des prévisions sur la qualité des fabrications. La technique consiste à suivre régulièrement, et à mesurer, une caractéristique de la qualité de la fabrication (dimensions, poids, etc...), et de déterminer d'après ces observations s'il y a lieu ou non de modifier le réglage de la machine ; en d'autres termes, si les fluctuations inévitables de la caractéristique considérée restent ou non dans des limites acceptables, compte tenu des tolérances à observer. La technique utilise les prélèvements systématiques d'échantillons, les mesures de la tendance centrale et d'une caractéristique de dispersion de chaque échantillon, le report de ces mesures sur une carte de contrôle, l'interprétation enfin de cette carte de contrôle en vue de la décision (régler la machine ou non) à adopter.

A côté du contrôle de qualité, qui a déjà fait l'objet de nombreux ouvrages spécialisés (1) et que nous ne faisons ici que mentionner, d'autres types de contrôle sont en voie de développement. Le contrôle budgétaire, en particulier, progresse rapidement. La théorie a de grandes analogies avec celle des servo-mécanismes. Le contrôle est, en effet, basé sur les écarts enregistrés entre "standards" et observations. Alors que pour les servo-mécanismes, la régulation se fait automatiquement, pour le contrôle budgétaire, elle nécessite une décision consciente.

D'autres formes de contrôle sont en progrès aux Etats-Unis. En France, malgré quelques initiatives de quelques pionniers isolés, ces techniques n'ont pas encore pris d'essor. Il y aurait beaucoup à faire pour ne pas nous laisser distancer.

III

LES CONDITIONS DU DÉVELOPPEMENT DE LA RECHERCHE OPÉRATIONNELLE DANS L'ENTREPRISE

Le développement de la recherche opérationnelle se heurte à plusieurs obstacles :

1°) Faire accepter d'un Chef d'entreprise le recours à un spécialiste de la recherche opérationnelle n'est pas chose aisée. Il est bien clair qu'il faut le

(1) J. MOTHES - Techniques modernes de contrôle des fabrications
R. CAVE - Le Contrôle statistique des fabrications.

convaincre au préalable de l'utilité de ce nouvel outil. Or, c'est là que le spécialiste de la recherche opérationnelle risque de se heurter à deux dangers, situés à deux pôles opposés :

- ou bien il risque de ne pas simplifier suffisamment son exposé, pour être à la portée de son interlocuteur, qui n'a pas le plus souvent les connaissances de base voulues, en statistique mathématique notamment ;
- ou bien il risque de simplifier à l'excès et de se voir répondre que l'on n'a pas attendu la recherche opérationnelle pour aborder l'analyse des problèmes qui se posent à l'industrie, de la manière qui est préconisée.

Il est donc essentiel, pour faire accepter la recherche opérationnelle, d'en traduire les procédés et d'en souligner les mérites en termes accessibles au chef d'entreprise, qui a passé sa vie à résoudre des problèmes de gestion au jour le jour, n'a pu se consacrer à des recherches fondamentales, et à qui le langage mathématique apparaîtra souvent rebutant.

Cette difficulté ne peut être surmontée par un procédé infaillible. Il semble que la meilleure formule consiste, pour le spécialiste de la recherche opérationnelle, à avoir vécu déjà dans une entreprise ou en contact étroit avec une entreprise de type voisin à l'entreprise démarchée, et à se servir de l'expérience ainsi acquise pour "sentir" le meilleur langage à tenir, et employer une terminologie et un mode de raisonnement dont on sait qu'il y a de bonnes chances a priori pour qu'ils trouvent une résonance chez l'interlocuteur. (Il ne faut pas se dissimuler cependant qu'il se pose ici un problème culturel d'importance : la formation normale actuelle de l'ingénieur ne le familiarise pas assez encore avec le calcul des probabilités, l'analyse statistique, la théorie économique, etc...).

2°) Vouloir appliquer la recherche opérationnelle partout, systématiquement, dans n'importe quelle situation, serait folie et risquerait de discréditer une technique encore peu répandue, bien que pleine d'avenir. Aussi convient-il que les utilisateurs éventuels n'en fassent pas une panacée universelle, et que les chercheurs opérationnels aient le courage nécessaire pour refuser leur concours lorsque le problème à traiter ne ressort pas indiscutablement des domaines bien éprouvés déjà. La recherche opérationnelle s'applique plus particulièrement dans les cas où l'on a affaire à des situations où les grands nombres, la répétition d'opérations identiques ou présumées telles, la sélection par échantillonnage, permettent de recourir aux méthodes solides de la statistique mathématique.

C'est ainsi que les **grandes** entreprises publiques - charbonnages, gaz, électricité, chemins de fer, navigation, chaînes de distribution, entreprises commerciales à succursales multiples, etc ... - relèvent bien plus nettement de la recherche opérationnelle que la petite entreprise, surtout si cette dernière ne pratique pas la série, mais a des activités multiples, différentes les unes des autres, irrégulières, à la demande, artisanales, etc ... Si les chercheurs opérationnels concentrent leurs efforts dans les domaines où l'efficacité est la mieux assurée, ils contribueront de ce fait au succès de leurs méthodes.

3°) Se méfier des chercheurs opérationnels bien intentionnés, mais incompétents, est une nécessité, pour la sauvegarde de la nouvelle technique. L'amateurisme dans ce domaine peut porter un préjudice considérable au développement de la recherche opérationnelle. Un soi-disant spécialiste, muni d'une simple licence en mathématiques ou en physique, attaché ou non à un quelconque conseil en organisation peut, par manque de connaissances et d'expérience, dégoûter à tout jamais de la recherche opérationnelle un chef d'entreprise qui aurait éprouvé un échec en utilisant ses services.

Une solution à cette difficulté résiderait, pour la France, dans la formation d'un Centre où les meilleurs spécialistes se trouveraient réunis, avec toutes les cautions souhaitables.

4°) Se débarrasser enfin de quelques préjugés trop répandus à l'endroit de ceux qui manient les mathématiques, est aussi l'une des conditions du développement de la recherche opérationnelle.

On peut penser que si la recherche opérationnelle ne s'est pas développée en France plus vite que dans les pays anglo-saxons, malgré la place de choix que tiennent les mathématiciens français dans le monde, c'est, pour une part non négligeable, en raison de l'accueil parfois condescendant ou ironique qu'ont fait certains chefs d'entreprises à ceux qui "manient la règle à calcul à longueur de journée" ou "veulent mettre la vie en équations". Ils ont contribué à créer une sorte de complexe d'infériorité chez ceux qui auraient été naturellement enclins à faire servir les mathématiques à la gestion de l'entreprise. Il faut dire, à leur décharge, que, souvent, les mathématiciens en cause n'avaient pas toujours le sens des réalités pratiques, parce que n'ayant pas eu une formation d'ingénieur.

Il était donc à prévoir que la profession d'ingénieur-mathématicien deviendrait une nécessité. Nous sommes précisément parvenus à une période où cette nécessité, reconnue dans les pays anglo-saxons, va s'imposer en France, avec l'auréole des succès remportés Outre-Atlantique.

CONCLUSIONS

1) Sans prétendre être complet dans un exposé si bref, nous venons de passer en revue certaines techniques de la recherche opérationnelle pour donner une idée au lecteur de ce en quoi elle consiste. Nous avons vu, chaque fois, que l'on avait procédé avec un même état d'esprit, un même mécanisme de pensée. On a, en effet :

- analysé de façon approfondie les éléments qui influent sur une opération,

- mesuré les paramètres dont dépend le succès de l'opération,

- établi une théorie liant entre eux ces paramètres et mettant en lumière les différentes alternatives possibles, compte tenu des moyens disponibles, le plus souvent au moyen de modèles mathématiques.

- fourni, dans le cas de phénomènes aléatoires, une estimation précise de l'incertitude sur les résultats prévus, sur la valeur, l'efficacité, le coût des actions possibles.

2) Les résultats d'une telle recherche donnent alors au responsable de la décision un faisceau d'éléments quantitatifs pour étayer son jugement. Mais, quoi qu'on fasse, certains éléments qualitatifs ne se prêtent pas à la mesure, bien qu'influant sur la décision. C'est la raison pour laquelle le rôle du responsable de la gestion et celui du chercheur opérationnel ne doivent pas se confondre.

3) La recherche opérationnelle doit trouver en France un champ fécond d'applications. Il est essentiel, à cet effet, que certaines précautions soient prises, tant du côté du spécialiste de la recherche opérationnelle que du chef d'entreprise, pour éviter tout malentendu, tout jugement hâtif.

4) La création d'un Centre dont la compétence et la qualité seraient universellement reconnues, serait, à notre avis, dans la période de démarrage, la meilleure garantie de succès de la recherche opérationnelle en France.

IV

EXEMPLE PRATIQUE DE PROGRAMME LINÉAIRE
RÉGULATION D'UNE PRODUCTION

REMARQUE LINÉAIRE

L'exemple que nous donnons ci-après est particulièrement simple. Il n'a pour objet que de montrer le cheminement de la pensée pour attaquer les problèmes de programme linéaire. Mais si, au lieu des quelques équations à quelques inconnues qui interviennent dans ce qui suit, on a affaire à un très grand nombre d'équations à un très grand nombre d'inconnues, le problème **change de nature** car l'esprit humain **ne sait pas pratiquement** résoudre un système linéaire de n équations à n inconnues, quand n est très grand.

Le changement de nature correspond au passage de la résolution par le calcul à la résolution par machines électroniques ou autres.

On trouve très souvent le cas d'une industrie ou d'un commerce à caractère saisonnier, où l'on sait à l'avance que les ventes ne seront pas régulières pour chaque période de l'année. Comment le responsable de la production doit-il s'organiser pour que le responsable des ventes de la maison puisse satisfaire sa clientèle ?

C'est là un problème type que l'on rencontre fréquemment. Sa solution est du ressort de la recherche opérationnelle.

Nous donnons ci-après un exemple particulièrement simple. Soit un fabricant d'un certain type d'accessoires d'automobiles (des amortisseurs, pour fixer les idées), qui prévoit pour les ventes trimestrielles de ses amortisseurs les chiffres suivants :

1er trimestre	....	3.000 unités
2e "	....	5.000 "
3e "	....	4.000 "
4e "	....	2.000 "
	Total	14.000 " par an

Comment doit-il organiser la production, dans les meilleures conditions de coût, s'il se fixe comme condition que sa clientèle n'attend pas de délais de livraison ?

Soit alors x la production - de base - de chaque trimestre, réalisée avec effectifs permanents et/ou durée de travail normale.

A le stock au début du 1er trimestre, supposé le même à la fin du 4e trimestre (on pourrait aussi bien supposer des stocks différents au début et à la fin de l'année)

y_1 la production obtenue par heures supplémentaires au 1er trim. (ou embauchage temporaire)

y_2 " " " " 2e "

y_3 " " " " 3e "

y_4 " " " " 4e "

soit P le coût de production normal par unité

soit Q le coût de production des unités supplémentaires ($Q > P$)

soit S le coût trimestriel de stockage et d'immobilisation (intérêt compris), d'une unité par trimestre.

Toutes ces quantités doivent être **positives ou nulles** .

La condition que s'impose la société de ne pas faire attendre le client, et celle de retrouver le même stock en fin qu'en début d'année exigent que :

$$\left.\begin{array}{l} A + x + y_1 - 3.000 \geqslant 0 \\ A + 2x + y_1 + y_2 - 8.000 \geqslant 0 \\ A + 3x + y_1 + y_2 + y_3 - 12.000 \geqslant 0 \\ A + 4x + y_1 + y_2 + y_3 + y_4 - 14.000 = A \end{array}\right\} \quad (1)$$

Remarquons que la dernière égalité exige que $x \leqslant 3.500$

Au 1er trimestre, on a produit $x + y_1$ au coût $Px + Qy_1$. La quantité stockée est passée de A à $A + x + y_1 - 3.000$.

Le stockage aura coûté

$$\frac{S}{2}\left[A + A + x + y_1 - 3.000\right]$$

(en supposant une régularité de la production et des ventes dans le trimestre)

Au 2^e trimestre, on a produit $x + y_2$ au coût $Px + Qy_2$. La quantité stockée est passée de $A + x + y_1 - 3.000$ à $A + 2x + y_1 + y_2 - 8.000$

Le stockage aura coûté

$$\frac{S}{2}\left[A + x + y_1 - 3.000 + A + 2x + y_1 + y_2 - 8.000\right]$$

Au 3^e trimestre, on a produit $x + y_3$ au coût $Px + Qy_3$. La quantité stockée est passée de $A + 2x + y_1 + y_2 - 8.000$ à $A + 3x + y_1 + y_2 + y_3 - 12.000$.

Le stockage aura coûté

$$\frac{S}{2}\left[A + 2x + y_1 + y_2 - 8.000 + A + 3x + y_1 + y_2 + y_3 - 12.000\right]$$

Au 4^e trimestre, on a produit $x + y_4$ au coût $Px + Qy_4$.

La quantité stockée est passée de $A + 3x + y_1 + y_2 + y_3 - 12.000$ à A.

Le stockage aura coûté

$$\frac{S}{2}\left[A + 3x + y_1 + y_2 + y_3 - 12.000 + A\right]$$

Au total sur l'ensemble de l'année, on aura :

Production

$$4x + y_1 + y_2 + y_3 + y_4 = 14.000 \qquad (2)$$

Coût de production

$$4\,Px + Q(y_1 + y_2 + y_3 + y_4) = 4\,Px + Q(14.000 - 4x) = 14.000\,Q - 4(Q-P)x \qquad (3)$$

Coût de stockage

$$S\left[A + \overline{A + x + y_1 - 3.000} + \overline{A + 2x + y_1 + y_2 - 8.000}\right.$$
$$\left. + \overline{A + 3x + y_1 + y_2 + y_3 - 12.000}\right]$$
$$= S\left[4\,A + 6\,x + 3\,y_1 + 2\,y_2 + y_3 - 23.000\right] = S \times U \qquad (4)$$

en désignant par U l'expression entre crochets.

En ajoutant (3) coût de production, et (4) coût de stockage, on obtient le prix de revient des 14.000 unités. C'est ce total qu'il faut rendre minimum, en choisissant convenablement les paramètres. En sortant la partie fixe, 14.000 Q, il s'agit de rendre minima l'expression $C = S\,U - 4\,(Q - P)\,x$ (5).

Remarquons tout d'abord que tous les termes de (3) et (4), d'après la façon dont ils ont été obtenus, étant positifs, le minimum du total s'obtient, en réalisant l'égalité dans les inéquations (1), ou, tout au moins, en rendant leurs premiers membres aussi petits que possibles.

Donnons-nous x au départ et cherchons les valeurs des y successifs. On a :

$$(6) \quad \begin{cases} y_1 = 3.000 - A - x & \text{si } x < 3.000 - A \\ y_1 = 0 & \text{si } x \geqslant 3.000 - A \end{cases}$$

$y_2 = 8.000 - A - 2x - y_1$ et en remplaçant y_1, par sa valeur tirée de (4)

$$(7) \quad \begin{cases} y_2 = 5.000 - x & \text{si } x < 3.000 - A \\ y_2 = 8.000 - A - 2x & \text{si } 3.000 - A \leqslant x < 4.000 - \frac{A}{2} \\ y_2 = 0 & \text{si } x \geqslant 4.000 - \frac{A}{2} \end{cases}$$

$y_3 = 12.000 - A - 3x - y_1 - y_2$, et en remplaçant y_1 et y_2 par leurs valeurs tirées de (6) et (7) :

$$(8) \quad \begin{cases} y_3 = 4.000 - x & \text{si } x < 4.000 - \frac{A}{2} \\ y_3 = 12.000 - A - 3x & \text{si } 4.000 - \frac{A}{2} < x < 4.000 - \frac{A}{3} \\ y_3 = 0 & \text{si } x \geqslant 4.000 - \frac{A}{3} \end{cases}$$

Enfin la condition d'avoir $y_4 \geqslant 0$ exige que $y_1 + y_2 + y_3 \leqslant 14.000 - 4x$

ce qui conduit $\quad x \leqslant 3.500$

compte tenu de (6) (7) (8) $\quad$ à $\quad x \leqslant 2.000 + A \qquad (9)$

On peut dresser en définitive le tableau suivant pour les diverses valeurs croissantes de x.

x		3000-A	4000-A/2	4000-A/3
y_1	3000-A-x	0	0	0
y_2	5000 - x	8000-A-2x	0	0
y_3	4000 - x	4000-x	12000-A-3x	0
$y_1+y_2+y_3$	12000-A-3x	12000-A-3x	12000-A-3x	0
$3y_1+2y_2+y_3$	23000-3A-6x	20000-2A-5x	12000-A-3x	0
U = $4A+6x+3y_1+2y_2+y_3-23000$	A	2A+x-3000	3A+3x-11000	4A+6x-23000
C =SU-4(Q-P)x	SA-4(Q-P)x	2AS+x [S-4(Q-P)] - 3000 S	3 AS+x [3S-4(Q-P)] - 11000 S	4 AS+x [6S-4(Q-P)] - 23000 S
$\frac{C}{S}$	A - 4kx	2A+(1-4k)x-3000	3A+(3S-4k)x=11000	4A+(6S-4k)x-23000

en posant $\frac{Q-P}{S} = k$

DISCUSSION

a) A est considéré comme une donnée fixe du problème.

x étant alors la seule variable ; on voit en examinant les valeurs de l'expression SU - 4(Q-P)x, que son minimum dépend de la valeur de S par rapport à Q-P, c'est-à-dire du coût de stockage rapporté au supplément de prix de revient par unité résultant des heures supplémentaires, c'est-à-dire du paramètre $\frac{Q-P}{S}$, que nous désignons par k.

Si $k < \frac{1}{4}$ la meilleure solution est $x = 3.000 - A$

si $\frac{1}{4} < k < \frac{3}{4}$ " " $x = 4.000 - \frac{A}{2}$

si $\frac{3}{4} < k < \frac{3}{2}$ " " $x = 4.000 - \frac{A}{3}$

si $k > \frac{3}{2}$, x doit être le plus grand possible. Mais on a d'après les conditions (9) toujours pour x les limites supérieures 3.500 et A + 2.000.

D'où le tableau de résultats suivant :

k		$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{3}{2}$
Choix optimum de x	3000 - A	$4000 - \frac{A}{2}$	$4000 - \frac{A}{3}$ ou 3500) au plus 2000 + A	3500 ou 2500 + A au plus

Le graphique (fig. 2) donne, pour une valeur de A donnée, et une valeur de k que l'on connait, la meilleure valeur de x. Les hachures définissent le domaine dans lequel on ne peut retenir de solution. On a représenté sur le graphique le cas où A = 1.750. Tous les points d'intersection avec les droites séparatrices des domaines sont dans la zone des solutions possibles, et la solution cherchée est :

k	x
$\leqslant$ 0,25	1250
0,25 à 0,75	3100
0,75 à 1,50	3416
$\geqslant$ 1,50	3500

En prenant pour A = 750 par exemple on voit que l'on ne peut retenir que les solutions

$$x = 2250 \text{ pour } k \leqslant 0,25$$
$$x = 2750 \text{ pour } p > 0,25$$

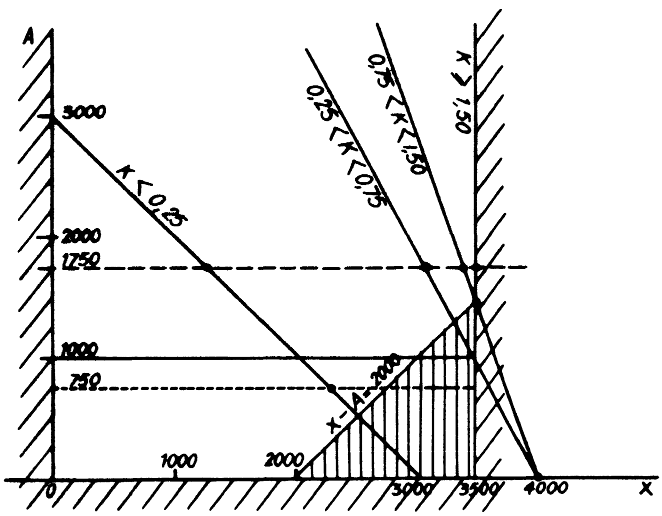


Fig. 2

b) A n'est pas une donnée fixe du problème, mais une variable.

L'optimum dépend ici de deux variables, x et A. Nous avons trouvé pour x les valeurs critiques suivantes en fonction de A :

$$3000\text{-}A,\ 4000-\frac{A}{2},\ 4.000-\frac{A}{3} \text{ et } 2000+A$$

D'autre part, A et x sont positifs, et x ne peut dépasser 3.500. On définit ainsi des zones I, II, III, IV, dans lesquelles les solutions sont possibles (voir fig. 3).

Dans la zone I, où $x < 3.000 - A$ et $x \leqslant 2.000 + A$ on a $\frac{C}{S} = A\text{-}4kx$, dont le minimum est atteint au point 1 où A = 0 et x = 2000, le minimum étant - 8.000 k

Dans la zone II, on a pour $\frac{C}{S}$ la valeur $2A+x(1-4k) - 3000$

Le minimum de $\frac{C}{S}$ dépend du signe de 1-4k.

1°) $k < 0,25$, le signe de x est positif, le minimum est atteint au point 2 (x : 2500, A : 500) et atteint 500-10.000 k qui est supérieur à la valeur - 8000 k au point 1, donc à rejeter.

2°) $k > 0,25$, si $1 < 0,75$, c'est encore au point 2 qu'est le minimum.
si $k > 0,75$ c'est au point 3 qu'est le minimum (x = 3333, A = 1333) qui atteint $3.000 - \frac{40.000\ k}{3}$

Pour k = 0,75, tous les points du segment 1 - 2 donnent la même valeur minima 2 A - 2x - 3.000 = - 7.000.

Dans la zone III, on a pour $\frac{C}{S}$ la valeur 3A + x $\left[\ 3\text{-}4\ k\ \right]$ - 11.000

Le minimum de $\frac{C}{S}$ dépend du signe de 3 - 4 k

1°) k $<$ 0,75, le minimum est au point 3 qui atteint 4000 $\frac{40.000\,k}{3}$ qui est supérieur au minimum précédemment calculé, donc à rejeter.

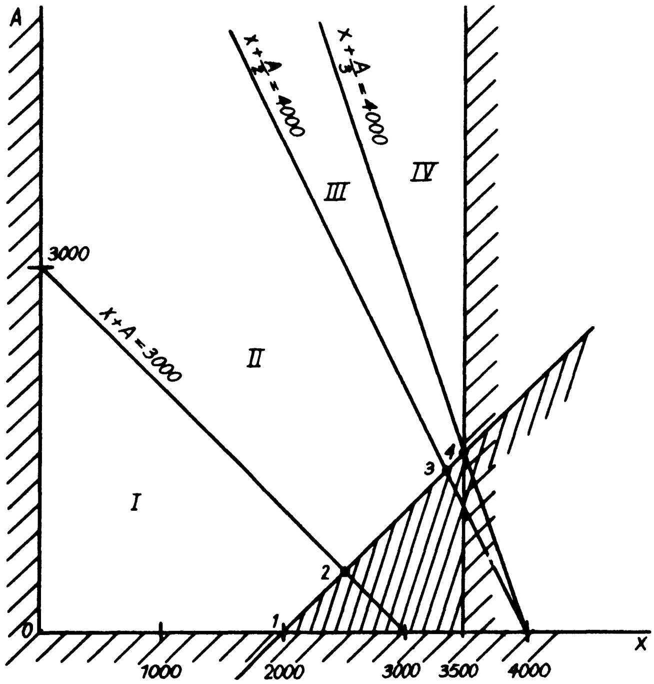


Fig. 3

2°) k $>$ 0,75, si k $<$ 1,50, c'est encore au point 3 qu'est le minimum atteint, mais il est supérieur au minimum précédemment calculé, donc à rejeter.
si k $>$ 1,50, le minimum est au point 4 (x = 3500)
(A = 1500)
et il atteint la valeur : 4500 + 3500 $\left[\ 3\text{-}4k\ \right]$ - 11.000, soit

4000 - 14.000 k

Pour k = 1,50, tous les points du segment 3-4 conviennent avec pour minimum -17.000.

En définitive, on a le tableau ci-dessous suivant les valeurs de k

k	0,25	0,75	1,50	
Point optimum du graphique	1	2	3	4
Valeur de A	0	500	1333	1500
Valeur de x	2000	2500	3333	3500
$\frac{C}{S}$	-8000k	500-10000k	$3000-\frac{40000k}{3}$	4000-14000k

Point quelc. du segment 1-2 $\frac{C}{S}$ = - 2000

Point quelc. du segment 2-3 $\frac{C}{S}$ = - 7000

Point quelc. du segment 3-4 $\frac{C}{S}$ = - 17000

Comme on le voit, tout dépend en définitive du facteur k c'est-à-dire du rapport du supplément de prix de revient pour heures supplémentaires au coût du stockage. On peut écrire aussi

$$k = \frac{Q - P}{P} \Big/ \frac{S}{P}$$

$\frac{Q - P}{P}$ est le % d'augmentation du prix de revient résultant des heures supplémentaires.

$\frac{S}{P}$ le coût **relatif** du stockage.

Supposons que les charges salariales représentent 45% du prix de revient des amortisseurs. Supposons qu'elles augmentent de 50% par suite des heures supplémentaires. Alors $\frac{Q - P}{P} = 0,225$.

On voit alors que les valeurs critiques de k (0,25; 0,75; 1,50) se traduisent en valeurs critiques de $\frac{S}{P}$ (0,9; 0,3; 0,15) et le tableau devient :

<table>
<tr><td>S/P</td><td colspan="4">15 % 30 % 90 %</td></tr>
<tr><td>Meilleur fonctionnement</td><td>Point 4</td><td>Point 3</td><td>Point 2</td><td>Point 1</td></tr>
<tr><td>Conclusion pratique</td><td>stock de départ élevé
Production régulière maxima
Minimum d'heures supplémentaires</td><td colspan="2">Solutions intermédiaires ou "nuancées"
conformément au tableau précédent</td><td>stock de départ nul
Production régulière minima
Maximum d'heures supplémentaires</td></tr>
</table>

On pouvait se douter que si le stockage est relativement cher, il vaut mieux ne pas avoir de stock (ou le minimum) et se rabattre sur les heures supplémentaires ; que si le stockage est relativement bon marché, il vaut mieux ne pas avoir d'heures supplémentaires à supporter.

Mais, sans analyse systématique de la question :

1°) on ne peut préciser ce qu'il faut entendre par "relativement cher" ou "relativement bon marché"

2°) on ne peut trouver les solutions intermédiaires optima pour un coût relatif de stockage compris entre 15% et 90%, ce qui est un cas très répandu.

La recherche opérationnelle permet de fournir la solution optima, celle qui coûte le moins pour le même résultat. Le flair n'aurait pu la fournir à sa place dans le cas général.

L'analyse peut être poursuivie sans difficulté pour déterminer par le calcul le coût de fonctionnement le plus bas, et l'économie réalisée par rapport à une situation de fait donnée. Elle peut facilement atteindre quelques dizaines de millions de francs, pour un chiffre d'affaires de l'ordre de la centaine.