

REVUE DE STATISTIQUE APPLIQUÉE

J. L. SOULÉ

G. THOUZEAU

La méthode directe d'évaluation du risque de raté dans le tir en volées des détonateurs électriques

Revue de statistique appliquée, tome 4, n° 4 (1956), p. 33-56

http://www.numdam.org/item?id=RSA_1956__4_4_33_0

© Société française de statistique, 1956, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « *Revue de statistique appliquée* » (<http://www.sfds.asso.fr/publicat/rsa.htm>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

LA MÉTHODE DIRECTE D'ÉVALUATION DU RISQUE DE RATÉ DANS LE TIR EN VOLÉES DES DÉTONATEURS ÉLECTRIQUES

par

J. L. SOULÉ et G. THOUZEAU ^(x)

Centre d'Études et Recherches des Charbonnages de France

Après avoir rappelé les différentes méthodes qui permettent d'évaluer le risque de raté pour un circuit de tir sur une intensité donnée, les auteurs étudient sur une base statistique le parti que l'on peut attendre de la méthode directe, et montrent en particulier qu'on peut l'appliquer de façon satisfaisante au contrôle périodique d'une fabrication de détonateurs. Ils indiquent un moyen d'améliorer l'information qu'elle fournit.

INTRODUCTION

Cet article est un complément à celui que nous avons publié dans cette revue sous le titre "La détermination d'une caractéristique des détonateurs électriques" (Revue de Stat. Appl., 1953, I, 3-4). Nous rappellerons cependant brièvement les termes du problème envisagé.

La mise en œuvre des explosifs conduit constamment à monter en série dans un circuit de tir plusieurs détonateurs électriques de façon à produire l'explosion simultanée d'autant de charges distinctes. L'expérience montre que pour assurer la mise de feu de tous les détonateurs, on doit faire passer dans la ligne (donc dans tous les détonateurs) un courant d'intensité généralement nettement plus forte que celle qui suffirait pour provoquer à coup sûr la détonation de chaque détonateur tiré isolément. De plus, l'intensité nécessaire croît avec le nombre n de détonateurs montés en série. Si on se limite au cas où on alimente le circuit avec une intensité constante, on est ainsi conduit à caractériser un lot donné de détonateurs par l'intensité constante minimum assurant la détonation d'une volée sans aucun raté, et ceci pour les divers nombres possibles n de détonateurs constituant la volée (cette intensité est désignée par I_n).

Indépendamment de toute explication du phénomène constaté, on peut évidemment mesurer I_n en tirant des volées de n détonateurs sur diverses intensités. Cependant on constate en général que pour des volées constituées à partir d'un même lot, il n'y a pas passage brusque d'une intensité avec ratés à chaque tir à une intensité ne donnant jamais lieu à ratés, mais qu'il existe une zone assez étendue d'intensité où le résultat dépend du hasard, avec un risque de raté décroissant progressivement de 1 à zéro. Pour s'assurer qu'à une certaine intensité le risque est, sinon rigoureusement nul, du moins suffisamment faible, il faudra tirer un nombre important de volées. Et il faudra recommencer pour chaque valeur de n .

L'analyse du mécanisme des ratés en volée, effectuée par J. Taffanel vers 1911, fournit les principes d'une méthode de détermination beaucoup plus économique qu'on pourrait appeler méthode analytique. L'objet de notre article anté-

(x) Avec la collaboration de Madame Signori pour les calculs numériques.

rieur était essentiellement d'exposer comment l'application des principes de la statistique nous avait permis d'améliorer la méthode initiale de Taffanel. L'intérêt de la "méthode analytique statistique" de détermination de I_n ainsi mise au point a été confirmé par l'usage systématique qui en a été fait au CERCHAR depuis plusieurs années. Cependant elle est de mise en œuvre moins simple que la "méthode directe"; d'autre part, si elle est économique en détonateurs, elle exige par contre des heures relativement nombreuses de main-d'œuvre. Il nous a donc paru utile d'étudier à titre complémentaire le parti que l'on peut tirer de la méthode directe en la fondant statistiquement et en utilisant les connaissances générales fournies par l'analyse du phénomène. Nous verrons en particulier qu'elle permet dans ces conditions un contrôle assez sensible de la stabilité d'une fabrication.

RAPPEL DU MÉCANISME DES RATÉS EN VOLÉE

Le fonctionnement d'un détonateur est le suivant : un filament relié à la source de courant produit par échauffement l'inflammation d'une petite masse de poudre d'allumage qui à son tour provoque l'explosion de la charge explosive du détonateur (et c'est cette explosion qui entraîne celle des cartouches).

A partir de l'instant de la mise sous tension, le courant doit passer pendant un certain temps (délai d'amorçage t_1) pour que s'enflamme la poudre d'allumage; si le courant dans le circuit se trouve ensuite interrompu, le phénomène continuera cependant à se dérouler jusqu'à détonation de la charge. Si le courant continue à passer, le filamenter se rompra au bout d'un certain temps (délai de rupture t_2 , compté depuis l'origine) soit par échauffement, soit par suite de la détonation.

Ces deux délais sont des fonctions de l'intensité d'alimentation (nous ne considérons que le cas d'une intensité constante); en général ils sont de l'ordre de quelques millisecondes.

t_2 ne peut être inférieur à t_1 que dans les détonateurs anormaux; le risque de raté de ce fait sera donc considéré à part et nous n'en parlerons plus ici.

La cause normale des ratés dans une volée de détonateurs en série est la dispersion des valeurs des délais t_1 et t_2 . Dans une volée, dès que l'un des détonateurs atteint son délai de rupture t_2 , le circuit est interrompu; tous les détonateurs qui, à cet instant, n'ont pas atteint leur délai d'amorçage t_1 seront ratés. Pour être sûr de n'avoir pas de ratés avec un lot donné sur une certaine intensité, il faudrait que tous les délais t_2 des détonateurs du lot soient supérieurs à tous les délais t_1 ; sinon, il y a un risque de raté plus ou moins élevé. Ce risque est une fonction de n et de la répartition dans le lot des valeurs de t_1 et de t_2 pour l'intensité considérée. C'est parce qu'il se trouve que les deux répartitions sont de plus en plus écartées à mesure que l'intensité augmente, que le risque est fonction décroissante de l'intensité.

(Etant donné que chaque détonateur ne fonctionne qu'une fois, on ne peut pas savoir si t_1 et t_2 sont parfaitement prédéterminés pour chaque individu. De toutes façons, si une fluctuation est possible, elle se trouvera incluse automatiquement dans l'hétérogénéité apparente du lot).

PRINCIPE DES DIFFÉRENTES MÉTHODES D'ÉVALUATION DU RISQUE DE RATÉ

Nous appellerons "volée ratée" une volée tirée comportant au moins un détonateur raté, et "probabilité de raté" P la probabilité a priori qu'une volée soit ratée lorsque les détonateurs sont en nombre n ($n \geq 2$), prélevés parfaitement au

hasard dans un lot donné, et tirés sur une intensité I bien définie. I_n sera l'intensité à partir de laquelle P devient inférieure à une valeur suffisamment faible pour être négligeable pratiquement, valeur qui a été fixée à 0,001. En présence d'un lot nouveau de détonateurs, on est amené à évaluer I_n pour diverses valeurs de n , de façon à définir les conditions d'emploi de ce lot; d'autre part, pour suivre une fabrication, on doit contrôler que les lots successifs produits ont des I_n stables.

Quelle que soit la méthode de détermination utilisée, elle fera intervenir la connaissance au moins partielle de la fonction $P(I, n)$ et I_n sera obtenue comme solution de l'équation implicite $P(I_n, n) = 0,001$. Cette solution est unique puisque pour n fixé P décroît de 1 à 0 quand I croît de 0 à ∞ . Le contrôle de la stabilité d'une fabrication consistera à s'assurer que P est stable dans la zone I, n où P est voisine de 0,001.

1) La méthode directe sans aucune théorie du phénomène revient à étudier P point par point (pour diverses valeurs du couple I, n) en estimant les diverses valeurs de P par des fréquences de raté, ceci sans faire aucune hypothèse sur la fonction $P(I, n)$.

2) La méthode analytique statistique est fondée sur le théorème suivant que nous avons pu déduire rigoureusement de l'analyse due à Taffanel : si pour un lot et une intensité donnée, les lois de distribution respectives des délais t_1 et des délais t_2 sont connues, P est une fonction de n parfaitement déterminée. Ce théorème n'est pas aussi évident qu'il en a l'air au premier abord. Il ne le serait que si les délais t_1 et t_2 pour un même détonateur étaient indépendants. Dès lors, montrer une ligne reviendrait, au point de vue mathématique, à tirer au sort indépendamment n valeurs t_1 et n valeurs t_2 obéissant les unes à une loi définie par la fonction de répartition $F_1(t_1)$, les autres à une loi définie par $F_2(t_2)$. Le principe des probabilités composées donnerait immédiatement la probabilité pour que les $2n$ valeurs se trouvent chacune respectivement au voisinage d'une valeur donnée; en considérant tous les systèmes de valeurs donnant lieu à raté (c'est-à-dire tous les systèmes où l'un au moins des t_1 est supérieur à l'un au moins des t_2) on obtiendrait par intégration une expression de P .

Comme t_1 et t_2 sont liés pour un même détonateur, le même calcul n'est possible a priori que si l'on connaît non seulement F_1 et F_2 mais toute la loi de distribution à deux variables $F(t_1, t_2)$ commune à chacun des couples. Ce que nous avons établi (voir la démonstration dans l'annexe) c'est que F n'intervient en fait dans le calcul que par F_1 et F_2 à partir du moment où F satisfait à la propriété indiquée plus haut: que t_2 ne peut pas être inférieur à t_1 pour un même détonateur.

Dans ces conditions, si l'on détermine les lois F_1 et F_2 sur une intensité donnée (voir à ce sujet notre article précédent), on peut calculer en principe P pour cette valeur de I et pour toutes les valeurs de n . En pratique, il suffit de savoir calculer P lorsqu'elle est voisine de 0,001 et nous avons indiqué une formule approximative dans ce cas, lorsque F_1 et F_2 sont deux lois normales.

3) La méthode directe à fondement statistique qui fait l'objet de cet article utilise des hypothèses supplémentaires concernant la nature des lois F_1 et F_2 . Ces hypothèses, que nous considérons comme approximativement justifiées par notre expérience des diverses fabrications de détonateurs, acquise ces dernières années, sont les suivantes : moyennant un changement de variable convenable (transformation logarithmique) les lois F_1 et F_2 sont, pour chaque intensité, deux lois normales de même écart-type. Dès lors, l'ensemble des deux lois peut être caractérisé, pour le problème des ratés, par un paramètre unique, à savoir le rapport entre la différence des valeurs moyennes des deux lois ($m_2 - m_1$) et leur écart-type commun σ . Par homogénéité avec nos notations antérieures, nous prendrons

comme paramètre $\rho = \frac{m_2 - m_1}{\sigma \sqrt{2}}$.

Dans ces conditions I n'intervient dans la fonction P que par la quantité $\rho(I)$ et les hypothèses faites ont pour conséquence que $P(\rho, n)$ est une fonction parfaitement connue. En particulier, si l'on connaît une valeur $P(I, n)$ on peut en déduire automatiquement les valeurs de P pour la même I et n quelconque. On choisira donc pour faire les essais sur une valeur donnée de I, une valeur de n permettant d'évaluer P convenablement à partir d'une fréquence de ratés, c'est-à-dire une valeur de n telle que P ne soit pas trop faible (ni trop élevée). Ce principe de la méthode s'appliquera aussi bien pour déterminer I_n que pour contrôler la stabilité d'une fabrication.

Avec les hypothèses faites, ρ détermine non seulement P mais toute la loi de probabilité du nombre D de détonateurs ratés dans une volée (P étant la probabilité pour qu'il y ait au moins un détonateur raté). Mathématiquement, ce nombre de détonateurs ratés est le nombre de valeurs t_1 qui sont supérieures à au moins une valeur t_2 . La loi de D est établie en annexe. Or le nombre D est constatable à chaque tir; la moyenne trouvée pour D est une estimation de l'espérance mathématique \bar{D} de D. On peut utiliser dans la méthode $\bar{D}(I, n)$ au même titre que $P(\rho, n)$, ou du moins à titre complémentaire (on a de façon évidente $\bar{D} \geq P$).

Les formules établies en annexe nous ont permis de calculer numériquement des valeurs de P et \bar{D} pour $n = 3$ et $n = 41$, ρ prenant diverses valeurs (tableau I). Pour $n = 2$, $P = \bar{D}$ s'obtient sous forme explicite. Nous verrons au paragraphe suivant comment nous avons pu, à partir du tableau I, tracer de façon approchée les abaques des figures 1 et 2.

VARIATION DE P ET Q EN FONCTION DE n SUR UNE INTENSITÉ DONNÉE

Ainsi l'apport essentiel de la statistique à la méthode directe consiste à permettre d'établir que pour I fixée la variation de P en fonction de n ne dépend que d'un paramètre, donc qu'il suffit de déterminer P pour une valeur de n pour le connaître pour toutes les autres valeurs n. (Bien entendu, la statistique intervient par ailleurs, comme nous le verrons, pour évaluer la précision des déterminations faites).

La validité de cet énoncé est conditionnée par l'exactitude des hypothèses faites sur F_1 et F_2 . Mais nous allons montrer que dans une large mesure les fonctions $P(n)$ et $\bar{D}(n)$ sont peu sensibles à l'inexactitude des hypothèses (si l'on se contente de donner à ρ la signification d'un simple paramètre repère).

Pour cela nous considérerons une nouvelle grandeur aléatoire : le nombre de chevauchements dans une volée. Nous désignerons ainsi le nombre C de couples t_1, t_2 (où t_1 et t_2 sont relatifs à des détonateurs différents dans la volée) tels que t_1 soit supérieur à t_2 . Il est évident que la probabilité que C soit nul est $1 - P$. D'autre part $C \geq D$. Donc en particulier $\bar{C} > \bar{D}$. L'intérêt de considérer \bar{C} est que C se calcule simplement. En effet, il y a $n(n-1)$ couples t_1, t_2 distincts pouvant donner lieu à chevauchement; pour chacun de ces couples la probabilité de chevauchement Q est la même. On calcule Q en considérant toutes les valeurs possibles t pour le délai t_1 (et en tenant compte de ce que t_1 et t_2 sont ici des variables indépendantes); on trouve ainsi :

$$Q = \int_{-\infty}^{+\infty} F_2(t) \cdot dF_1(t)$$

On déduit de là immédiatement que l'espérance mathématique de C est :

$$\bar{C} = n(n-1) Q = n(n-1) \int_{-\infty}^{+\infty} F_2(t) dF_1(t)$$

On voit sur cette formule que pour une intensité donnée, \bar{C} ne dépend de n que par le facteur $n(n-1)$; donc si l'expérience portait sur \bar{C} et non sur P et \bar{D} , le passage d'un n à un autre pourrait se faire de façon complètement indépendante de la forme des lois F_1 et F_2 .

Malheureusement C n'est pas mesurable. Mais cette propriété de \bar{C} permet de prévoir qu'il en sera presque de même pour P et \bar{D} , tant qu'on reste dans une zone de valeurs assez petites, pour la raison qu'alors P et \bar{D} tendent à s'identifier à \bar{C} . En effet, il est intuitif que lorsque les chevauchements sont rares, ils sup-

TABLEAU I
QUELQUES VALEURS DE \bar{C} , P, \bar{D} pour n = 3 et n = 41

<u>n = 41</u>		2 lois normales égales				2 lois à partie commune identique	
$\frac{m_2 - m_1}{\sigma}$	$\rho = \frac{m_2 - m_1}{\sigma \sqrt{2}}$	\bar{C}	\bar{D}	P		\bar{D}	P
				par défaut	par excès		
3,55	2,5102	9,9000	4,328	0,8851	0,9032	3,5135	0,9487
4,05	2,8637	3,4339	1,863	0,6422	0,6520	1,7175	0,7531
4,55	3,2173	1,0612	0,686	0,3493	0,3529	0,6976	0,4367
5,05	3,5708	0,2918	0,2162	0,1430	0,1439	0,2314	0,1809
5,55	3,9244	0,0713	0,0583	0,04566	0,04585	0,06336	0,05612
6,05	4,2779	0,01547	0,0136	0,01170	0,01173	0,01460	0,01386
6,55	4,6315	0,00298	0,00273	0,00254	0,00254	0,00290	0,00283
7,05	4,9851	0,000508	0,000472	0,000457	0,000457	0,000503	0,000498

<u>n = 3</u>		2 lois normales égales			2 lois à partie commune identique	
$\frac{m_2 - m_1}{\sigma}$	$\rho = \frac{m_2 - m_1}{\sigma \sqrt{2}}$	\bar{C}	\bar{D}	P	\bar{D}	P
0,55	0,3889	2,0922	1,5061	0,9199	1,5098	0,9274
1,05	0,7425	1,3734	1,0556	0,7378	0,0637	0,7539
1,55	1,0960	0,8192	0,6678	0,5163	0,6766	0,5339
2,05	1,4496	0,4415	0,3784	0,3154	0,3851	0,3286
2,55	1,8031	0,2041	0,1813	0,1584	0,1864	0,1686
3,05	2,1567	0,09310	0,08594	0,07879	0,08763	0,08217
3,55	4,5102	0,03620	0,03426	0,03233	0,03487	0,03355
4,05	2,8638	0,01256	0,01211	0,01166	0,01229	0,01202
4,55	3,2173	0,00388	0,00379	0,00370	0,00383	0,00379
5,05	3,5709	0,001067	0,001052	0,001036	0,001061	0,001054

posent la conjugaison de deux évènements rares indépendants : un grand délai d'amorçage et un petit délai de rupture; par conséquent, les chevauchements rares doivent se présenter le plus souvent isolément. On peut préciser les conditions mathématiques (assez générales) auxquelles doivent satisfaire F_1 et F_2 pour que ce raisonnement intuitif soit rigoureux. Sur le tableau I, on a porté les valeurs de \bar{C} parallèlement à celles de P et \bar{D} . Pour deux lois de Gauss, même d'écart-types différents σ_1 et σ_2 , on a selon un calcul classique :

$$Q = G(-\rho)$$

où $\rho = \frac{m_2 - m_1}{\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}}$ et où G est la fonction de répartition d'une variable normale centrée et normée (fonction de Galton).

A mesure que \bar{C} devient important, P et \bar{D} s'écartent de \bar{C} (sauf pour $n = 2$, où $P = \bar{D} = \bar{C}$, puisqu'il n'y a au plus qu'un chevauchement et un raté par volée); d'ailleurs P doit rester inférieur à 1. On n'a donc plus d'assurance concernant l'influence faible des hypothèses faites sur F_1 et F_2 . Seul le calcul numérique peut nous renseigner. Le cas qui nous intéresse pratiquement le plus est celui de deux lois de Gauss d'écart-types différents. Nous avons effectué quelques calculs pour $\sigma_2 = 2\sigma_1$; nous avons trouvé pour un même \bar{C} , c'est-à-dire pour un même ρ , des valeurs assez voisines. Or, en pratique, nous n'avons jamais rencontré une telle différence entre les deux écarts-types. On notera que pour ρ donné, P est maximum lorsque les écarts-types sont égaux. Remarquons enfin que les lois F_1 et F_2 n'ont à être normales que dans la zone où se trouveront la grande majorité des délais chevauchant.

Nous démontrons dans l'annexe que parmi tous les couples F_1, F_2 possibles non nécessairement Gaussiens, lorsque Q et n sont donnés, les couples qui donnent les valeurs les plus grandes pour P sont constitués de deux distributions "rectangulaires" de même étendue (une distribution rectangulaire est une distribution uniforme sur un intervalle), ou plus généralement, en modifiant l'échelle des temps, deux distributions identiques dans leur partie commune. Ce cas a été confronté dans le tableau I avec le cas de deux lois de Gauss égales. On voit que l'écart est là encore faible.

Dans le tableau II, on a calculé P et \bar{D} pour \bar{C} et n donnés dans le cas de deux lois rectangulaires, pour un grand nombre de valeurs de n . On voit que P et \bar{D} dépendent très peu de n , sauf pour n très petit. Il en sera donc de même pour deux lois normales et le passage de \bar{C} à P et \bar{D} que nous avons calculé pour $n = 41$ servira convenablement de $n = 20$ à $n = 100$. Pour $n = 5$ et 10 , on s'inspirera du tableau II pour l'interpolation. C'est ainsi que nous avons établi les abaques des figures 1 et 2. Sur ces abaques, \bar{C} , P et \bar{D} sont en échelle logarithmique. Sur la figure 1, l'abscisse est graduée en $\log G$ de sorte que les courbes \bar{C} sont des droites. D'après ce qu'on a vu du passage de \bar{C} à P et \bar{D} , les courbes P et \bar{D} pour les différents n sont alors presque égales. De même sur la figure 2, l'abscisse est en $\log n(n-1)$.

PRÉCISION DE L'ESTIMATION DE ρ OU Q PAR ESSAIS EN VOLÉE

Ainsi les essais se ramèneront toujours au tir d'un certain nombre de volées sur une intensité et à l'estimation d'après les résultats obtenus de la quantité

$$Q = \int_{-\infty}^{+\infty} F_2 dF_1, \text{ dont on pourra déduire toutes les probabilités de ratés pour les}$$

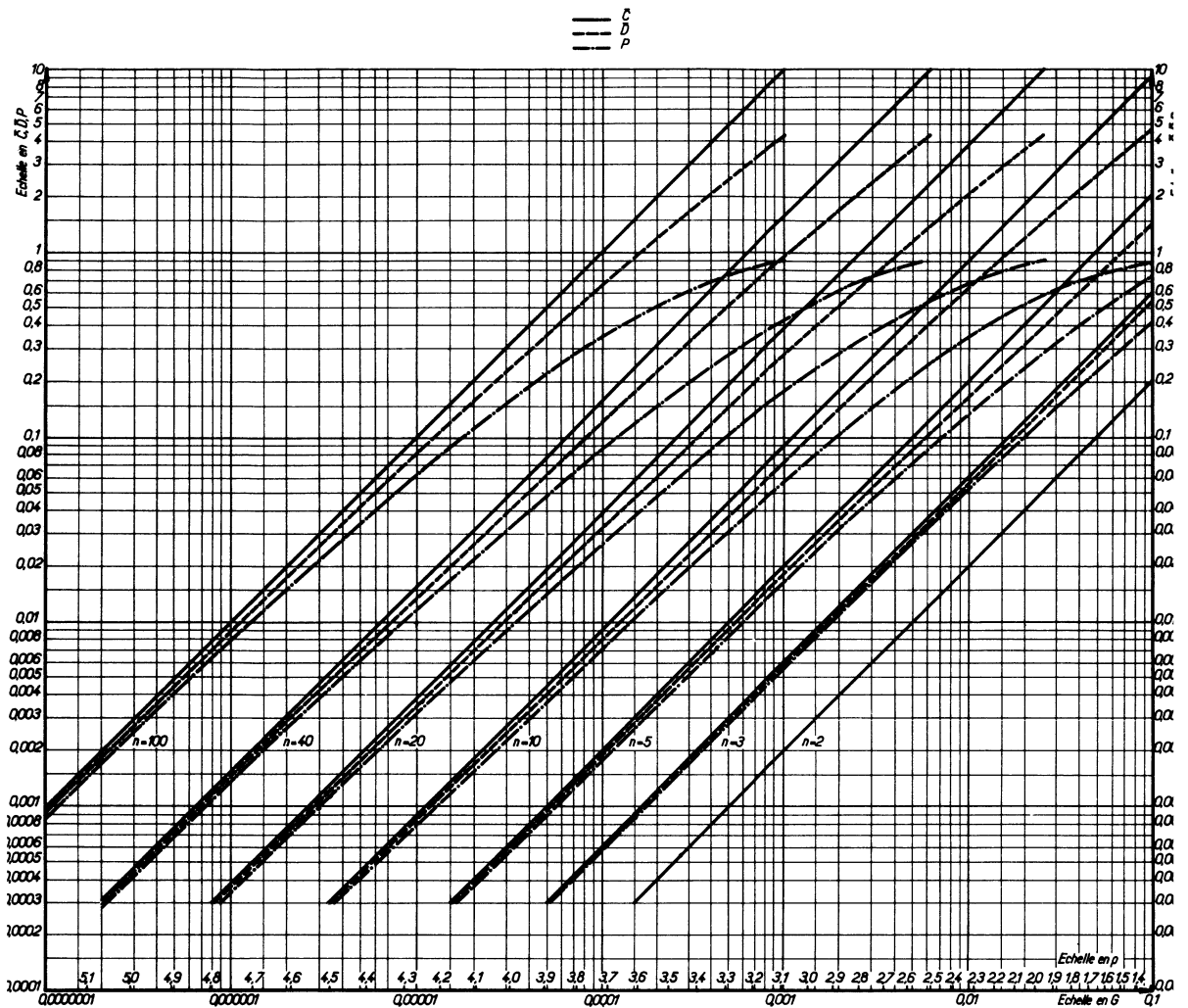
diverses valeurs de n . Cette quantité Q peut toujours être représentée au moins fictivement par $G(-\rho)$, même si on n'a pas affaire exactement à deux lois normales, et ρ servira de repère.

TABLEAU II

VALEURS DE P ET D̄ POUR DEUX DISTRIBUTIONS A PARTIE COMMUNE IDENTIQUE

C	n = 3		n = 4		n = 5		n = 10		n = 20		n = 100		n = ∞	
	P	D	P	D	P	D	P	D	P	D	P	D	P	D
10	-	-	-	-	1	4	0,9831	3,7157	0,9621	3,5936	0,9426	3,5047	0,9375	3,4836
6	-	-	1	3	0,9894	2,8735	0,9282	2,6620	0,8937	2,5740	0,8669	2,5105	0,8603	2,4954
3	1	2	0,9216	1,8358	0,8665	1,7575	0,7739	1,6324	0,7358	1,5812	0,7086	1,5445	0,7022	1,5358
1	0,6151	0,8075	0,5390	0,7556	0,5049	0,7306	0,4523	0,6897	0,4314	0,6727	0,4165	0,6602	0,4131	0,6573
0,5	0,3639	0,4320	0,3284	0,4107	0,3117	0,4001	0,2849	0,3823	0,2740	0,3748	0,2661	0,3692	0,2642	0,3679
0,2	0,1656	0,1828	0,1546	0,1768	0,1483	0,1742	0,1401	0,1683	0,1362	0,1659	0,1334	0,1642	0,1327	0,1637
0,1	0,08783	0,09391	0,08361	0,09166	0,08146	0,09049	0,07775	0,08840	0,07612	0,08748	0,07496	0,08676	0,07462	0,08663
0,05	0,04570	0,04785	0,04412	0,04703	0,04330	0,04659	0,04185	0,04580	0,04121	0,04545	0,04080	0,04513	0,04059	0,04512
0,02	0,01891	0,01946	0,01849	0,01924	0,01827	0,01912	0,01787	0,01891	0,01770	0,01881	0,01756	0,01874	0,01752	0,01873
0,01	0,00961	0,00981	0,00946	0,00973	0,00938	0,00969	0,00924	0,00960	0,00917	0,00957	0,00913	0,00955	0,00910	0,00955
0,005	0,00486	0,00493	0,00481	0,00490	0,00478	0,00489	0,00473	0,00486	0,00470	0,00485	0,00469	0,00484	0,00468	0,00484
0,002	0,00196	0,00198	0,00195	0,00198	0,00194	0,00197	0,00193	0,00196	0,00192	0,00196	0,00192	0,00196	0,00191	0,00196
0,001	0,000988	0,000994	0,000983	0,000991	0,000980	0,000990	0,000975	0,000987	0,000973	0,000986	0,000971	0,000985	0,000970	0,000985

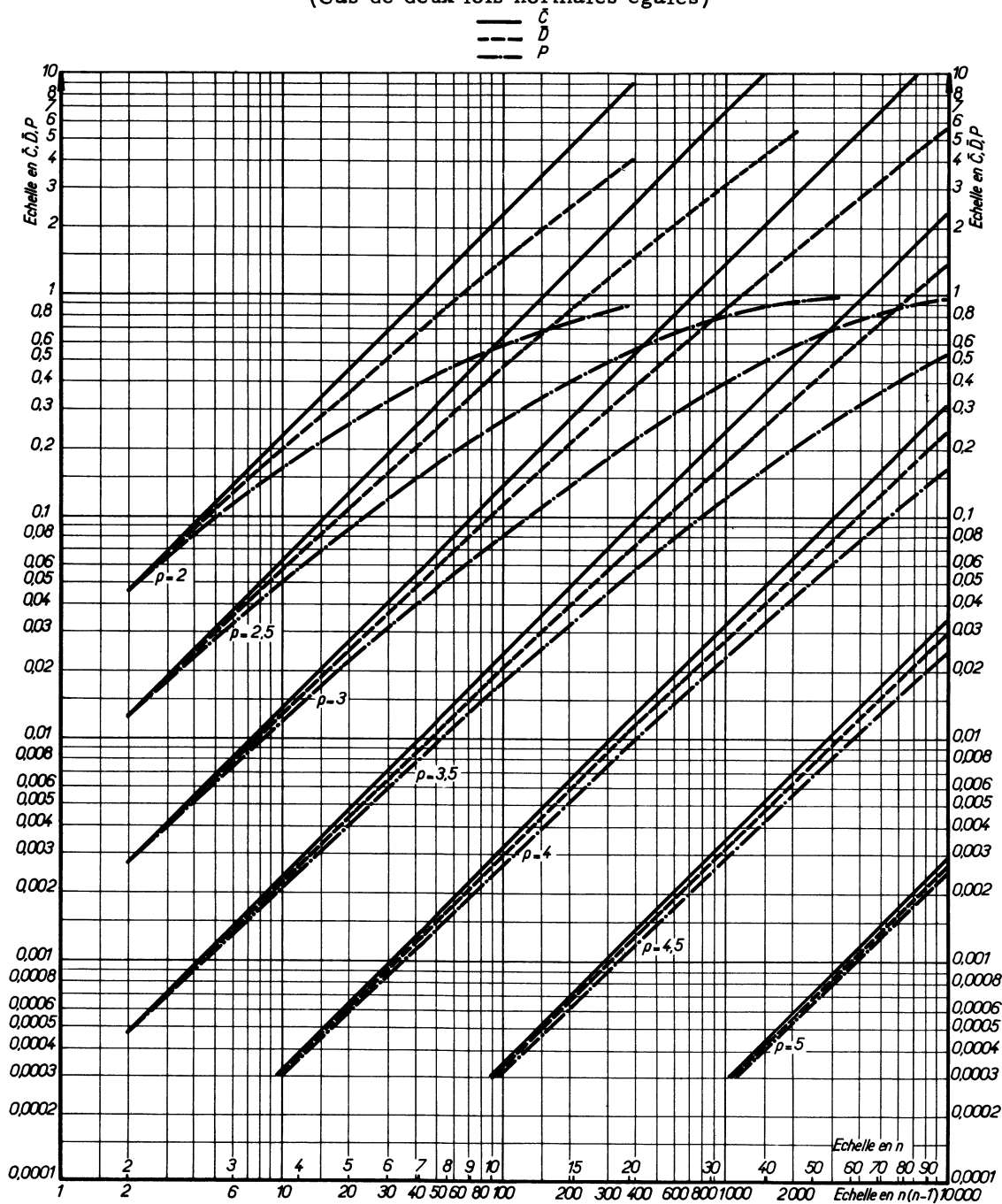
Fig. 1. - VARIATION DE \bar{C}, \bar{D}, P , EN FONCTION DE ρ OU Q
(Cas de deux lois normales égales)



Pour estimer Q ou ρ , on dispose de deux résultats : la fréquence de volées ratées et le nombre moyen de détonateurs ratés par volée. Les courbes des figures 2 et 3 permettent d'en déduire deux estimations de ρ . La marge de précision sur la première estimation est facile à évaluer puisqu'il s'agit d'une loi binômiale (dans le tableau III nous reproduisons les limites à 95% tirées des tables de Hald). Pour la seconde, il faudrait la calculer spécialement, aussi proposons-nous de n'utiliser cette estimation que pour confirmer l'autre. Ce qu'on peut aussi envisager, c'est d'utiliser le nombre moyen de détonateurs ratés par volée ratée comme test de la forme des lois F_1 et F_2 . En effet, la présence par exemple dans un lot de quelques détonateurs à délai de rupture anormalement bas se traduira par des volées avec un nombre de ratés anormalement élevé. A l'aide des formules établies dans l'annexe, on peut calculer une limite vraisemblable en fonction du nombre de volées ratées; (voir plus loin).

Si la probabilité de ratés réelle, pour une volée de n détonateurs, est P , la variance de la fréquence trouvée sur k volées sera $\frac{P(1-P)}{k}$. Si on dispose de N détonateurs pour faire l'essai, il est intéressant de chercher la valeur optimum

Fig. 2.- VARIATION DE \bar{C}, \bar{D}, P , EN FONCTION DE n
(Cas de deux lois normales égales)



de n , définie comme étant celle qui donne pour ρ la variance minimum. Pour cela posons $k = \frac{N}{n}$, d'où la variance sur $P = \frac{n P (1-P)}{N}$. Pour traduire ceci en variance sur ρ , lorsque N est grand, il suffit de multiplier par $\left(\frac{d\rho}{dP}\right)^2$. Il semble plus approprié de considérer au lieu de ρ , $\log_e G$ et au lieu de P , $\log_e P$ dont la variance est:

$$\frac{nP(1-P)}{N} \times \frac{1}{P^2} = \frac{n}{N} \frac{1-P}{P}$$

TABLEAU III

LIMITES DE VRAISEMBLANCE A 95 % D'UNE PROBABILITÉ ESTIMÉE A PARTIR D'UNE FRÉQUENCE

N. de cas positifs / N. de cas négatifs	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	
0	0,975 0,000	0,842 0,000	0,708 0,000	0,602 0,000	0,522 0,000	0,459 0,000	0,410 0,000	0,369 0,000	0,336 0,000	0,308 0,000	0,285 0,000	0,265 0,000	0,247 0,000	0,232 0,000	0,218 0,000	0,206 0,000	0,195 0,000	0,185 0,000	0,176 0,000	0,168 0,000	
1	0,987 0,013	0,906 0,008	0,806 0,006	0,716 0,005	0,641 0,004	0,579 0,004	0,527 0,003	0,483 0,003	0,445 0,003	0,413 0,002	0,385 0,002	0,360 0,002	0,339 0,002	0,319 0,002	0,302 0,002	0,287 0,001	0,273 0,001	0,260 0,001	0,249 0,001		
2		0,932 0,068	0,853 0,053	0,777 0,043	0,710 0,037	0,651 0,032	0,600 0,028	0,556 0,025	0,518 0,023	0,484 0,021	0,454 0,019	0,428 0,018	0,405 0,017	0,383 0,016	0,364 0,015	0,347 0,014	0,331 0,013	0,317 0,012			
3			0,882 0,118	0,816 0,099	0,755 0,085	0,701 0,075	0,652 0,067	0,610 0,060	0,572 0,055	0,538 0,050	0,508 0,047	0,481 0,043	0,456 0,040	0,434 0,038	0,414 0,036	0,396 0,034	0,379 0,032				
4				0,843 0,157	0,788 0,137	0,738 0,122	0,692 0,109	0,651 0,099	0,614 0,091	0,581 0,084	0,551 0,078	0,524 0,073	0,499 0,068	0,476 0,064	0,456 0,061	0,437 0,057					
5					0,813 0,187	0,766 0,167	0,723 0,151	0,684 0,139	0,649 0,128	0,616 0,118	0,587 0,110	0,560 0,103	0,535 0,097	0,512 0,091	0,491 0,087						
6						0,789 0,211	0,749 0,192	0,711 0,177	0,677 0,163	0,646 0,152	0,617 0,142	0,590 0,133	0,565 0,126	0,543 0,119							
7							0,770 0,230	0,734 0,213	0,701 0,198	0,671 0,184	0,643 0,173	0,616 0,163	0,592 0,154								
8								0,753 0,247	0,722 0,230	0,692 0,215	0,665 0,203	0,639 0,191									
9									0,740 0,260	0,711 0,244	0,685 0,231										
10																					

Pour les fréquences supérieures à 0,5, raisonner par symétrie.

La variance de $\log_e G$ sera :

$$\left(\frac{\sigma G}{G}\right)^2 = \frac{n}{N} \frac{1-P}{P} \left(\frac{d \log_e G}{d \log_e P}\right)^2 = \frac{n}{N} \frac{1-P}{P} \left(\frac{d \log_{10} G}{d \log_{10} P}\right)^2$$

En particulier, pour P petit, on sait que $G \neq \frac{P}{n(n-1)}$ et $\frac{d \log G}{d \log P} \neq 1$, d'où
 $\left(\frac{\sigma G}{G}\right)^2 \neq \frac{1}{N} \frac{1}{(n-1)G}$

Pour P quelconque, on lira la pente de la courbe sur les graphiques de la fig. 1.

Exemples : $\rho = 3,3$

$\rho = 3,8$

n	P	$\frac{d \log G}{d \log P}$	$N \left(\frac{\sigma G}{G}\right)^2$	n	P	$\frac{d \log G}{d \log P}$	$N \left(\frac{\sigma G}{G}\right)^2$
10	0,029	1,11	412				
20	0,10	1,19	255	20	0,020	1,14	1274
40	0,27	1,47	234	40	0,066	1,18	787
100	0,74	2,98	312	100	0,28	1,53	602

Il est intéressant de comparer avec la méthode analytique statistique pour laquelle, dans les conditions optima, on a la précision suivante :

$N \left(\frac{\sigma \rho}{\rho}\right)^2 = 1,49$. En tenant compte du passage de $\log \rho$ à $\log G$, cela donne pour les exemples considérés :

$$N \left(\frac{\sigma G}{G}\right)^2 = 200 \text{ pour } \rho = 3,3 \quad \text{et} \quad 400 \text{ pour } \rho = 3,8$$

Rappelons qu'étant donné l'allure asymptotique de P , la précision relative sur l'estimation de P pour les valeurs de n où P est faible (recherche de I_n) est sensiblement la même que sur G .

PREMIÈRE APPLICATION : VÉRIFICATION DE LA VALIDITÉ DE LA MÉTHODE ANALYTIQUE

Si l'on applique à un même lot de détonateurs parallèlement les deux méthodes (la méthode analytique statistique et la méthode de tirs en volée), on pourra confronter les résultats en les exprimant de façon homogène en G (I) ou ρ (I) et en tenant compte des marges respectives de précision. Si les résultats apparaissent compatibles, on aura ainsi vérifié pour ce lot la validité des différentes hypothèses de la méthode analytique : d'une part les hypothèses de Taffanel concernant le mécanisme des ratés et en particulier le fait que le délai d'amorçage soit le même par rapport à une rupture de courant artificielle en tir isolé que par rapport à une rupture en ligne due à un autre détonateur; d'autre part les hypothèses statistiques pour l'évaluation de G et en particulier l'ajustement de F_1 et F_2 à des lois normales pour l'extrapolation aux délais extrêmes donnant lieu effectivement à chevauchement.

La vérification pourra être d'autant plus précise qu'on pourra utiliser davantage de détonateurs. Mais de toutes façons elle ne peut être efficace que pour des ρ pas trop élevés, car il faut qu'on observe des ratés dans la méthode directe pour obtenir une limitation estimée de ρ dans les deux sens (C'est d'ailleurs sur ce point précis que la méthode analytique présente un avantage appréciable sur la méthode directe).

Cette confrontation des deux méthodes a été effectuée pour un lot de détonateurs de fabrication définie. Les résultats ont été les suivants :

Méthode analytique	I	N	ρ	$\sigma\rho$
	0,66	467	3,02	0,20
	0,85	210	4,05	0,33
	0,99	147	5,12	0,50

Méthode directe sur I = 0,66 15 volées de 40. 8 volées ratées, 29 détonat. ratés

I = 0,70 50 volées de 20. 10 volées ratées, 25 détonat. ratés

I = 0,75 50 volées de 20. 5 volées ratées, 7 détonat. ratés

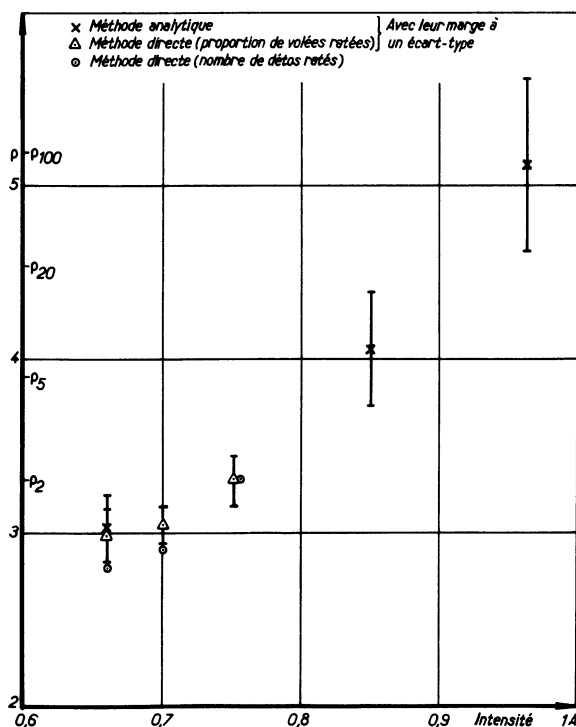
En tenant compte des fréquences de volées ratées, on obtient le tableau suivant :

I	N	ρ	$\sigma\rho$
0,66	600	2,98	0,16
0,70	1000	3,04	0,11
0,75	1000	3,30	0,15

Le nombre moyen de détonateurs ratés par volée fournirait des estimations un peu différentes pour ρ (respectivement 2,8, 2,9 et 3,3).

Tous ces résultats sont reportés sur le graphique de la figure n° 3 où l'on voit qu'ils sont parfaitement compatibles. (Toutefois l'une des volées de 30 sur 0,70 A a donné 11 détonateurs ratés. Nous avons calculé que ceci suppose pratiquement un délai de rupture anormal).

Fig. 3.- COMPARAISON DES DEUX METHODES



DEUXIÈME APPLICATION : DÉTERMINATION DE I_n

Lorsqu'on se trouve en présence d'un lot de fabrication nouvelle ou modifiée, il est nécessaire de déterminer les différentes valeurs de I_n . Rappelons que I_n est l'intensité, fonction de n , à partir de laquelle la probabilité de raté pour une volée de n détonateurs devient négligeable. La probabilité maximum négligeable a été fixée arbitrairement à 0,001. On en déduit par exemple que I_2 correspond à $\rho = 3,29$ et I_{100} à $\rho = 5,2$.

Le problème de déterminer I_n pour différentes valeurs de n allant de 2 à 100 revient à celui de déterminer la fonction $\rho(I)$ dans la zone où ρ va de 3,29 à 5,2. Ceci ne peut se faire qu'en mesurant ρ pour diverses valeurs de I . Si l'on veut une précision satisfaisante, il faudra encadrer la zone intéressante. La méthode analytique statistique, grâce à l'hypothèse de normalité, ramène la mesure de ρ à celle des paramètres des lois de distribution F_1 et F_2 , et par suite sa précision se trouve indépendante de ρ . Au contraire la méthode directe, de par sa nature, sera inefficace dans la zone des ρ élevés : en effet, on ne pourra au mieux, pour une intensité, que constater l'absence de ratés sur quelques volées composées de beaucoup de détonateurs. Ceci ne fournira pour ρ qu'une borne minima, et encore pas très élevée. Par exemple, avec 10 volées de 100 détonateurs, l'absence de ratés se traduit par $P < 0,26$ (marge à 95 %) soit $\rho > 3,82$.

En pratique, voici ce qu'on pourra faire : d'abord explorer la zone 2,5 à 3,5 au moyen de volées de 20 détonateurs, puis étudier un point au-delà avec des volées de 50 ou même 100 détonateurs.

Voyons par exemple ce qu'on peut faire avec 1000 détonateurs. On en utilisera 600 pour les volées de 20 sur 2 ou 3 intensités et 400 pour 8 volées de 50 sur une intensité. Pour les volées de 20, l'idéal est d'obtenir sur une intensité 8 à 12 ratés sur 15 volées et sur une autre 2 ratés. Voici les marges à 95 % pour :

- 10 volées (de 20) ratées sur 15 : 2,2 (2,4) 2,7
- 2 volées (de 20) ratées sur 15 : 2,7 (3,2) 3,8
- 1 volée (de 50) ratée sur 8 : 3,1 (3,7) 4,7
- 0 volée (de 50) ratée sur 8 : $> 3,3$

La détermination complète de I_n par la méthode directe n'est donc possible que si l'on connaît l'allure de la variation de $\rho(I)$ et qu'il suffit de bien connaître un point de la courbe pour avoir toute la courbe; ou bien à la rigueur si l'on sait que $\rho(I)$ est à peu près linéaire (ce qui est effectivement le cas général), mais alors la précision sur I_{100} sera faible.

Des hypothèses de ce genre sur la variation de $\rho(I)$ sont hasardeuses dans le cas d'une fabrication nouvelle ou modifiée. Elles sont par contre admissibles pour un simple contrôle de I_n , relatif à une fabrication déjà connue, et c'est précisément pourquoi la méthode de tirs en volée trouve son intérêt maximum dans le contrôle de I_n .

TROISIÈME APPLICATION : CONTRÔLE DE LA STABILITÉ D'UNE FABRICATION

Tandis que pour une fabrication nouvelle il est très instructif d'étudier les lois de répartition des délais F_1 et F_2 , le contrôle périodique d'une fabrication donnée, au point de vue du risque de ratés en volées, doit porter davantage sur la stabilité des valeurs I_n que sur celle des lois F_1 et F_2 elles-mêmes. Autrement

dit c'est la fonction $G(I)$ ou $\rho(I)$ qu'il importe avant tout de contrôler, sans s'inquiéter par exemple d'un léger décalage d'ensemble des délais d'amorçage et de rupture, qui ne modifie pas le risque.

De plus, on peut prévoir qu'une perturbation dans une fabrication se traduira par un rapprochement des délais moyens d'amorçage et de rupture ou une augmentation de la dispersion sensiblement indépendante de l'intensité, et par suite par un décalage à peu près uniforme de la fonction $\rho(I)$. L'expérience confirme cette prévision. En conséquence on peut se contenter de vérifier la stabilité de ρ dans une zone limitée des intensités. Par analogie avec le principe de la "limite de contrôle modifiée" du contrôle statistique de fabrication, on contrôlera le risque dans une zone où il n'est pas trop faible. D'après ce qu'on a vu, la méthode directe par volées est tout à fait adaptée à ce problème.

Nous proposons à titre d'exemple le processus de contrôle suivant. Nous chercherons à vérifier la stabilité de I_2 , c'est-à-dire de l'intensité pour laquelle $\rho = 3,3$. Sur l'intensité I_α présumée I_2 , nous tirons 10 volées de 20 détonateurs. La probabilité de raté est censée être égale à 0,1; le nombre "attendu" de volées ratées est donc 1. La loi binômiale donne immédiatement les probabilités respectives des différents résultats possibles :

0 volée ratée	0,3487	1 volée ratée	0,3874
2 volées ratées	0,1937	3 volées ratées	0,0573
4 volées ratées ou plus	0,0129		

Donc, s'il y a 4 volées ratées au moins, on est pratiquement certain que le risque a augmenté. Déjà pour 3 volées ratées il y a présomption de changement.

Si on a 0, 1 ou 2 volées ratées : confirmer par 10 autres volées sur la même intensité I_α (et on tolèrera de 0 à 3 volées ratées dans cette 2° série).

Si on a 3 volées ratées au moins, passer à une intensité plus élevée. Prendre l'intensité I_β présumée I_5 ($\rho = 3,9$). La probabilité de raté avec 20 détonateurs est 0,014. La loi binômiale donne pour 10 volées :

0 volée ratée	0,869	1 volée ratée	0,123	2 volées ratées et plus	0,008
---------------	-------	---------------	-------	-------------------------	-------

Dès qu'il y a une volée ratée la présomption de changement est confirmée. Mais on ne considèrera qu'il est important que s'il y a eu au moins 4 volées ratées sur I_α .

Au contraire pour 3 volées ratées sur I_α et 0 sur I_β on admettra qu'il n'y a pas de changement du tout. Dans tous les autres cas, on considèrera qu'il y a un changement mais faible. En résumé, le plan de contrôle est le suivant :

1ère série	Résultat	2e série	Nouveau résultat	Conclusion
10 volées de 20 sur I_α (I_2 présumée)	0, 1 ou 2 volées ratées	10 autres volées de 20 sur I_α	0 à 3 volées ratées 4 volées ratées ou plus	Pas de changement Faible changement
	3 volées ratées	10 volées sur I_β (I_5 présumée)	0 volée ratée Au moins une volée ratée	Pas de changement Faible changement
	4 ou plus volées ratées	10 volées sur I_β (I_5 présumée)	0 volée ratée Au moins une volée ratée	Faible changement Changement important

Dans l'hypothèse d'un décalage éventuel uniforme des valeurs de ρ (c'est-à-dire une diminution égale de ρ pour I_α et I_β) on peut calculer à l'aide de $P(\rho)$ pour $n = 20$ et de la loi binômiale, les probabilités des différentes conclusions pour différentes diminutions de ρ . Voici ce qu'on obtient :

Diminution de ρ	Probabilité de conclure	Probabilité de conclure	Probabilité de conclure
	Pas de changement	Faible changement	Changement important
0	0,9675	0,0308	0,0017
0,2	0,8298	0,1519	0,0183
0,4	0,4892	0,3950	0,1158
0,6	0,1389	0,4587	0,4024
0,8	0,0164	0,2349	0,7487
1	0,0005	0,0527	0,9468

Donc si on conclut "pas de changement" ρ a tout au plus diminué de 0,7 (I_2 réel égal sensiblement à I_5 présumé; I_{10} réel égal à I_{40} présumé). La fabrication est stable.

Un "faible changement" a des chances raisonnables d'être réel et de ne pas dépasser 1 (c'est-à-dire un I_2 réel égal au I_{10} présumé; et un I_{10} réel égal au I_{100} présumé). La fabrication est à surveiller.

Un "changement important" mérite examen détaillé par la méthode analytique pour voir ce qui a changé dans les lois de répartition des délais.

Il est intéressant de comparer avec la précision d'un contrôle par la méthode analytique. Si on détermine ρ pour I_2 présumé par la méthode analytique avec 400 détonateurs, on a $\left(\frac{\sigma\rho}{\rho}\right)^2 = \frac{1,49}{400}$ soit $\frac{\sigma\rho}{\rho} = 0,061$. En admettant que l'erreur sur ρ suit la loi de Gauss, on en déduit que pour avoir la même probabilité de conclure "Pas de changement" quand ρ n'a effectivement pas changé, il faut tolérer de trouver jusqu'à $\rho = 2,91$. Moyennant quoi on calcule aisément le tableau suivant :

Diminution de ρ	Probabilité de conclure : Pas de changement
0	0,967
0,2	0,841
0,4	0,48
0,6	0,102
0,8	0,004

(En distinguant "faible changement" et "changement important" selon que ρ trouvé est ou non supérieur à 2,65 on compléterait ce tableau à 3 colonnes comme le précédent).

On constate que la précision est tout à fait du même ordre. Comme la méthode par volées représente une économie appréciable de main-d'œuvre et de matériel (aucun appareil de réglage et d'enregistrement de temps n'étant nécessaire), elle s'avère en pratique pour cet usage nettement plus avantageuse.

Notons enfin qu'on peut tirer parti pour le contrôle par volées du nombre de détonateurs ratés dans les volées qui en comportent. On vérifie ainsi que les lois de répartition restent normales, et en particulier qu'il n'y a pas de détonateurs anormaux à délai de rupture très court (qui pourraient faire des ratés jusqu'à des intensités élevées). En utilisant la formule (6) de l'annexe, nous avons calculé

pour 3 valeurs de ρ (et $n = 20$) la probabilité de trouver 1, 2, 3, etc.. détonateurs ratés dans une volée, dans l'hypothèse où elle est ratée. Voici le résultat de ces calculs.

		$\rho = 3,25$	$\rho = 2,97$	$\rho = 2,69$
	Probabilité qu'une volée soit ratée	0,120	0,247	0,438
Probabilité de trouver dans une volée ratée	1 détonateur raté	0,768	0,673	0,546
	2 détonateurs ratés	0,153	0,194	0,227
	3 détonateurs ratés	0,047	0,072	0,104
	4 détonateurs ratés	0,018	0,032	0,053
	5 détonateurs ratés	0,008	0,015	0,029
	6 détonateurs ratés		0,007	0,017
	7 détonateurs ratés			0,010

A partir de ces chiffres on peut calculer quel est avec un niveau de certitude de 95 % le nombre maximum de détonateurs ratés qu'on doit trouver en moyenne par volée ratée :

1° Si ρ n'a pas changé ($\rho \geq 3,3$)

Une volée ratée sur I_α :	maximum	3	détonateurs
Deux volées ratées sur " :	"	2,5	détonateurs en moyenne
Trois " " " :	"	2,33	" "
Quatre " " " :	"	2,25	" "
Cinq " " " :	"	2	" "

2° Si ρ a faiblement diminué ($\rho \geq 2,6$)

Trois volées ratées sur I_α :	maximum	4	détonateurs en moyenne
Quatre " " " :	"	3,75	" "
Cinq " " " :	"	3,6	" "
Six " " " :	"	3,33	" "
Sept " " " :	"	3,28	" "

MÉTHODE DE CONTRÔLE COMBINÉE : ESSAIS EN VOLÉE AVEC MESURE DU DÉLAI DE RUPTURE EFFECTIF

La méthode de contrôle par tirs en volée que nous venons de présenter ne donne aucune indication sur la position d'ensemble des lois F_1 et F_2 ; or, d'une part, un décalage important des lois, même sans changement de ρ , peut être intéressant à déceler pour la surveillance de I_n , d'autre part, la valeur des délais est intéressante en soi (nous complétons habituellement la détermination de I_n par celle de t_n : temps pendant lequel l'exploseur doit fournir le courant pour que la probabilité de raté du fait de l'arrêt volontaire du courant soit inférieure à 0,001).

On peut éventuellement compléter la méthode dans ce sens en mesurant pour chaque volée essayée le délai qui s'écoule entre la mise de courant dans la ligne et son interruption. Pour chaque volée on disposera ainsi de deux résultats : un nombre de détonateurs ratés et une durée de passage effective.

Cette durée de passage est égale au plus court délai de rupture des n détonateurs de la volée. A chaque volée on obtient donc une valeur de la variable : plus petite valeur de n variables indépendantes obéissant à la loi F_2 . La fonction de

répartition de cette variable est classique, c'est $1 - (1 - F_2)^n$. Si F_2 est une loi normale ($m_2; \sigma_2$), la loi de la plus petite de n valeurs aura une moyenne de la forme $m'_2 = m_2 - \alpha_n \sigma_2$ (où α_n est un coefficient numérique ne dépendant que de n), un écart-type $\beta_n \sigma_2$, et des expressions analogues pour les moments centrés d'ordre supérieur. Etant donné le nombre réduit de volées (soit k), le seul paramètre qui sera convenablement estimé est la moyenne. Sa précision est définie par l'erreur-type $\frac{\beta_n \sigma_2}{\sqrt{k}}$

Voici quelques valeurs de α_n et β_n , telles qu'on les trouve dans les tables

n	1	2	5	10	20	40	60	100	200
α_n	0	0,564	1,163	1,539	1,867	2,160	2,319	2,508	2,746
β_n	1	0,826	0,669	0,587	0,525	0,477	0,454	0,429	0,401

Au point de vue du contrôle de ρ , la surveillance de m'_2 est suffisante en ce qui concerne la loi F_2 . En effet, si la variation $\Delta\rho$ est faible, on a :

$$\frac{\Delta\rho}{\rho} = \frac{\Delta m_2}{m_2 - m_1} - \frac{\Delta m_1}{m_2 - m_1} - \frac{\sigma_1}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2} \Delta\sigma_1 - \frac{\sigma_2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2} \Delta\sigma_2$$

ou

$$\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2} \Delta\rho = \left[\Delta m_2 - \frac{\rho\sigma_2}{\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}} \Delta\sigma_2 \right] - \left[\Delta m_1 + \frac{\rho\sigma_1}{\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}} \Delta\sigma_1 \right]$$

En posant

$$\frac{\rho\sigma_1}{\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}} = H_1 \quad \frac{\rho\sigma_2}{\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}} = H_2 \quad \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2} \Delta\rho = \Delta(m_2 - H_2\sigma_2) - \Delta(m_1 + H_1\sigma_1)$$

Ce sont les variations de $m_2 - H_2\sigma_2$ et $m_1 + H_1\sigma_1$ qui déterminent celle de ρ .

$$\text{Pour } \sigma_1 \text{ et } \sigma_2 \text{ voisins, } H_1 = H_2 = \frac{\rho}{\sqrt{2}} = \frac{m_2 - m_1}{2\sigma_1}$$

Donc on aura $H_2 = \alpha_n$	$n = 20$	$\rho = 2,63$
si $\rho = \alpha_n \sqrt{2}$ soit	$n = 40$	$\rho = 3,05$
	$n = 60$	$\rho = 3,28$
	$n = 100$	$\rho = 3,55$

Dans tous les cas, P est voisin de 0,5 (On prend donc ici de préférence des ρ un peu plus faibles que dans le contrôle sans mesure du délai).

Si on pose $m'_2 = m_2 - \alpha_n \sigma_2$ et $m'_1 = m_1 + \alpha_n \sigma_1$, on aura sensiblement :

$$\sqrt{2} \sigma_1 \Delta\rho = \Delta m'_2 - \Delta m'_1$$

Contrôler m'_1 , c'est contrôler la valeur du délai d'amorçage pour lequel $F_1 = G(\alpha_n)$, c'est-à-dire pour :

$n = 20$	$F_1 = 0,969$
$n = 40$	$F_1 = 0,985$
$n = 60$	$F_1 = 0,990$
$n = 100$	$F_1 = 0,994$

Ceci pourra se faire graphiquement en utilisant les résultats de raté. Le tir de chaque volée peut être considéré comme un essai d'amorçage pour n détonateurs sur la durée de passage effective t , donc une estimation de $F_1(t)$. Plus exactement il faut tenir compte de ce que t est fonction des délais de rupture et n'est donc pas indépendant des délais d'amorçage. Ce qu'on mesure, c'est, pour $n-1$ détonateurs dont on sait que leur délai de rupture est supérieur à t , la probabilité pour que leur délai d'amorçage soit inférieur à t . Cette probabilité vaut $\frac{F_1}{1-F_2}$. Bien entendu les délais ainsi "essayés" ne sont pas choisis à volonté. Mais d'après la valeur de ρ , on fixe leur répartition statistique. Pour n et ρ associés comme on a vu plus haut, les délais essayés doivent avoir justement pour espérance mathématique le délai correspondant à m_1^1 .

Ce sont pratiquement les ruptures se produisant après m_1^1 qui ne donneront pas de raté. Il est difficile de chiffrer la précision avec laquelle on confirme que m_1^1 n'a pas changé. Elle est nettement moins bonne que pour m_2^1 . Mais la loi F_1 se trouve ainsi étudiée automatiquement dans sa zone intéressante pour les ratés.

Dans l'étude comparative de la méthode directe et de la méthode analytique que nous avons faite sur un lot de détonateurs (voir plus haut), les 15 volées de 40 détonateurs tirées sur 0,66 A ont donné lieu à une mesure du délai de rupture effectif. Les 15 points obtenus pour F_1 et la valeur de m_2^1 ont été parfaitement cohérents avec les résultats obtenus par tir individuel (confirmation supplémentaire de l'analyse de Taffanel).

CONCLUSION

En fondant statistiquement la méthode directe de détermination du risque de raté dans le tir en volées des détonateurs électriques, nous avons montré comment après avoir déterminé le risque sur une intensité pour des volées d'un nombre fixé de détonateurs, on peut en déduire une estimation du risque pour un nombre différent quelconque, ainsi que la marge de précision de cette estimation. Partant de là, nous avons pu établir que la méthode directe se présentait dans certains cas de façon avantageuse par rapport à la méthode analytique qui utilise des mesures individuelles de délais d'amorçage et de délais de rupture; en particulier le contrôle de la stabilité d'une fabrication est aussi précis par la méthode directe que par la méthode analytique et beaucoup plus économique en matériel et en main-d'œuvre. Par contre, la méthode analytique permet une extrapolation plus rationnelle du risque vers les intensités élevées. Mais on ne doit pas oublier que de toutes façons, aucune méthode ne permet de déceler dans un lot des détonateurs anormaux qui s'y trouveraient dans une proportion par exemple de 1/10.000 et qui entraîneraient pendant une fois sur cent un raté imprévu en volée de 100.

Notre conclusion pratique sera la suivante : la méthode analytique continue à être préférable pour déterminer I_n pour une fabrication nouvelle ou modifiée; la méthode directe est la plus adaptée au contrôle de la stabilité d'une fabrication.

ANNEXE

ÉTUDE MATHÉMATIQUE DE LA LOI DE PROBABILITÉ DU NOMBRE DE RATÉS

LOIS PARENTES

Toutes les formules de probabilité relatives au nombre de ratés dans une volée devront s'exprimer à l'aide des deux lois parentes :

$F_1(t_1)$, probabilité pour qu'un délai d'amorçage T_1 soit $< t_1$

$F_2(t_2)$, probabilité pour qu'un délai de rupture T_2 soit $< t_2$

F_1 et F_2 sont deux fonctions non décroissantes, continues à gauche, allant de 0 à 1, lorsque t_1 et t_2 sont de 0 à $+\infty$.

Considérons la fonction de répartition à deux variables $F(t_1, t_2)$ du couple de délais T_1, T_2 relatifs au même détonateur. C'est la probabilité pour que les deux évènements considérés soient réalisés simultanément. De F , nous savons :

1° que par définition $F_1(t_1) = F(t_1, +\infty)$ $F_2(t_2) = F(+\infty, t_2)$

2° que F satisfait aux diverses propriétés des fonctions de répartition à deux variables.

3° que F est telle que la probabilité de l'évènement (délai d'amorçage $>$ délai de rupture) est nulle.

Cherchons à exprimer cette dernière condition. Pour tout couple t_1, t_2 tel que $t_1 \geq t_2$, on ne peut pas avoir simultanément : $T_1 \geq t_1, T_2 < t_2$. Or on sait exprimer formellement la probabilité de cet évènement :

$$\begin{aligned} \text{Prob} [T_1 \geq t_1, T_2 < t_2] &= \text{Prob} [T_2 < t_2] - \text{prob} [T_1 < t_1, T_2 < t_2] \\ &= F_2(t_2) - F(t_1, t_2) \end{aligned}$$

La condition 3° s'exprime donc par :

$$F(t_1, t_2) = F_2(t_2) \text{ pour } t_1 \geq t_2$$

Les conditions 1 et 2 entraîneront cette égalité pour $t_1 \geq t_2$, si elle est réalisée pour $t_1 = t_2$:

$$(1) \quad F(t, t) \equiv F_2(t)$$

On voit aisément que réciproquement l'identité (1), jointe aux conditions 1 et 2, assure bien la condition 3.

On notera que l'on a l'inégalité pour tout t :

$$(2) \quad F_2(t) = F(t, t) \leq F(t, +\infty) = F_1(t)$$

Cette inégalité limite les couples de lois possibles. En particulier elle élimine les couples de lois normales à écarts-types différents (bien que pratiquement il arrive que deux lois réelles assez écartées puissent être représentées convenablement par deux lois normales d'écarts-types différents dans la zone des chevauchements les plus nombreux).

Réciproquement, on voit aisément que tout couple de fonctions de répartition F_1, F_2 satisfaisant à l'inégalité (2) est un couple possible, parce qu'on peut construire au moins comme distribution ayant les distributions marginales F_1 et F_2 une correspondance stricte entre T_1 et T_2 (avec un ajustement convenable aux points éventuels de discontinuité) telle que $T_1 \leq T_2$.

Indiquons enfin que les probabilités que nous calculerons sont toutes relatives à l'ordre dans lequel se classent des variables obéissant à F_1 ou F_2 , et que par conséquent t n'intervient que comme un repère. Deux couples F_1, F_2 et F_1', F_2' qui se ramènent l'un à l'autre par un même changement de variable croissant et continu donneront des résultats identiques. En définitive, un couple se caractérisera par la courbe plane définie paramétriquement par $F_1(t), F_2(t)$. Il est facile en fonction de ce qui précède de caractériser la famille des courbes possibles. Il est à prévoir que des difficultés particulières surgiront lorsque F_1 et F_2 auront des points communs de discontinuité, car on sera amené à préciser comment rétablir la continuité de la courbe représentative.

FORMULE EXACTE POUR LA PROBABILITÉ QU'IL N'Y AIT PAS DE RATÉ

Etant donné une volée constituée de n détonateurs tirés au hasard de la population considérée, quelle est la probabilité pour qu'il n'y ait pas de raté, c'est-à-dire pour que tous les T_1 soient inférieurs ou égaux à tous les T_2 ?

Cet évènement peut être subdivisé en n cas possibles, en spécifiant le détonateur qui a le plus grand délai d'amorçage. Soit t_1 une valeur possible pour ce délai. Comme le délai de rupture associé ne peut donner lieu à chevauchement, on sera dans les conditions requises si et seulement si chacun des $n-1$ autres détonateurs a son délai d'amorçage inférieur à t_1 et son délai de rupture supérieur ou égal à t_1 . Or on a pour un détonateur :

$$\begin{aligned} \text{Prob} [T_1 < t_1, T_2 \geq t_1] &= \text{Prob} [T_1 < t_1] - \text{Prob} [T_1 < t_1, T_2 < t_1] \\ &= F_1(t_1) - F(t_1, t_1) \\ &= F_1(t_1) - F_2(t_1) \end{aligned}$$

En donnant à t toutes les valeurs t possibles, et en tenant compte de ce que les n cas ont la même probabilité, on obtient :

$$(3) \quad p_0 = n \int_{-\infty}^{+\infty} [F_1(t) - F_2(t)]^{n-1} dF_1(t) = n \int_0^1 [F_1 - F_2(F_1)]^{n-1} dF_1$$

(Il semble que ce raisonnement soit mis en défaut par les cas où plusieurs délais d'amorçage sont simultanément maximum, cas de probabilité non nulle si F_1 est discontinue. Mais on peut voir par passage à la limite que le résultat reste valable à condition de bien considérer qu'on maintient F_2 à sa valeur pour t pendant le saut de F_1 , dans le cas où F_2 est discontinue en même temps que F_1 ; ceci correspond dans la définition du raté au fait qu'un délai de rupture égal à un délai d'amorçage n'entraîne pas de raté).

Nous appelons probabilité de raté P la probabilité pour qu'il y ait au moins un détonateur raté, c'est-à-dire au moins un chevauchement entre un délai d'amorçage et un délai de rupture. On a donc $P = 1 - p_0$. On peut écrire aussi P sous une forme intéressante pour les petites valeurs de P :

$$(4) \quad P = n \int_{-\infty}^{+\infty} \left\{ F_1^{n-1} - [F_1 - F_2]^{n-1} \right\} dF_1$$

On peut démontrer que cette formule est équivalente à une expression donnée dans notre article précédent.

LOI DE PROBABILITÉ DU NOMBRE D DE DÉTONATEURS RATÉS

L'espérance mathématique du nombre D de détonateurs ratés dans une volée est égale à n fois la probabilité pour qu'un détonateur spécifié de la volée soit raté. Un détonateur n'est pas raté si tous les délais de rupture des (n-1) autres sont supérieurs ou égaux au délai d'amorçage de ce détonateur. On déduit de là immédiatement :

$$(5) \quad E(D) = \bar{D} = n \int_{-\infty}^{+\infty} \{1 - [1 - F_2]^{n-1}\} d F_1$$

Calculons la probabilité p_k pour qu'il y ait exactement k ratés (on a déjà calculé p_0). En spécifiant, d'une part, le détonateur qui doit avoir le plus court délai de rupture, d'autre part, les k détonateurs ratés, l'évènement conditionnel pour un délai de rupture minimum t est la combinaison des suivants :

pour k détonateurs, un délai d'amorçage supérieur à t

pour n-1-k détonateurs, simultanément un délai d'amorçage inférieur ou égal à t et un délai de rupture supérieur à t.

En faisant varier t, et en ne spécifiant plus les détonateurs, on obtient :

$$(6) \quad p_k = n C_{n-1}^k \int_{-\infty}^{+\infty} [1 - F_1]^k [F_1 - F_2]^{n-1-k} d F_2$$

(Cette fois, pour tenir compte des discontinuités communes de F_1 et F_2 , il faut maintenir F_1 à sa valeur maximum pendant le saut de F_2 . Ceci revient, si l'on veut, à définir $F_1(t_1)$ par la probabilité pour que $T_1 \leq t_1$. Désormais chaque fois qu'on intégrera par rapport à F_2 ce sera de cette façon, de même que lorsqu'on intégrera par rapport à F_1 ce sera comme pour (3). On peut vérifier que cette façon de faire est cohérente car elle correspond à la même manière de rendre continue la courbe F_1, F_2).

Introduisons une variable auxiliaire x et définissons la fonction génératrice de la loi de D par $\Sigma x^k p_k$. On a :

$$\begin{aligned} \Sigma x^k p_k &= n \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_0^{n-1} C_{n-1}^k x^k [1 - F_1]^k [F_1 - F_2]^{n-1-k} d F_2 \\ &= n \int_{-\infty}^{+\infty} \{x [1 - F_1] + F_1 - F_2\}^{n-1} d F_2 \\ &= n \int_{-\infty}^{+\infty} \{(x-1) [1 - F_1] + [1 - F_2]\}^{n-1} d F_2 \end{aligned}$$

En prenant les dérivées successives par rapport à x pour x = 1 de la fonction génératrice, on aura les moments factoriels de la loi :

$$\begin{aligned} E[D] &= \Sigma k p_k = n \int_{-\infty}^{+\infty} (n-1) [1 - F_1] [1 - F_2]^{n-2} d F_2 \\ &= n \int_{-\infty}^{+\infty} [1 - F_1] d [1 - F_2]^{n-1} \end{aligned}$$

qui s'identifie à (5) en intégrant par parties.

$$(7) \quad E[D(D-1)] = \Sigma k(k-1) p_k = n(n-1) \int_{-\infty}^{+\infty} [1 - F_1]^2 d [1 - F_2]^{n-2}$$

etc...

On peut en déduire en particulier les moments centrés de la loi de D et aussi ceux de la loi du nombre de détonateurs ratés par volée ratée.

ÉTUDE DE LOIS PARTICULIÈRES

Ce qui nous intéresse plus spécialement pour les applications, c'est la variation de P et \bar{D} en fonction de n . Nous avons indiqué dans le texte principal que cette variation était à mettre en comparaison avec celle de \bar{C} , nombre moyen de chevauchements, la variation de \bar{C} étant connue puisqu'on a dans tous les cas :

$$\bar{C} = n(n-1) Q$$

$$(8) \quad \text{où } Q = \int_{-\infty}^{+\infty} F_2 dF_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} (1 - F_1) dF_2$$

(la définition des intégrales étant encore celle précisée pour le cas de discontinuités).

L'étude doit donc porter en fait sur $P(n)$ et $\bar{D}(n)$ pour Q fixé. Une question importante est la suivante : quelles sont les valeurs extrêmes possibles pour P et pour \bar{D} et quels sont les couples de lois qui conduisent à ces valeurs extrêmes ?

Ce problème d'extremum fonctionnel se résout simplement. Considérons le graphique F_1, F_2 (fig. 4a)

Q est égal à l'aire hachurée. Les extremum de P sont ceux de p_0 . On voit immédiatement que p_0 est égal, à un facteur près, au moment d'ordre $(n-1)$ par rapport à OC de la surface ponctuée. Cette surface a une aire donnée : $\frac{1}{2} - Q$. On obtiendra les extremum de P en plaçant cette surface le plus près possible ou le plus loin possible de OC , compte tenu des conditions que doit remplir la courbe. Il est manifeste que les courbes correspondant aux extremum sont du type indiqué sur les figures 4b et 4c.

On obtient de façon analogue les extremum pour \bar{D} (fig. 4d et 4e).

Les couples extremum sont indépendants de n . Le cas P minimum est assez indéterminé, le triangle rectangle pouvant glisser sur OC et prendre en particulier les deux positions limites qui correspondent à \bar{D} maximum et \bar{D} minimum.

Le cas P maximum (P variant le plus vite avec n) est particulièrement intéressant car le cas de deux lois normales de même écart-type en est très voisin. Il est caractérisé par le fait que les distributions de T_1 et T_2 sont égales dans leur partie commune. On établit aisément les formules :

$$Q = \frac{\alpha^2}{2} \quad P = 1 - (1-\alpha)^n - n\alpha(1-\alpha)^{n-1} \quad D = (1-\alpha)^n + n\alpha - 1$$

Avec ces formules nous avons calculé les valeurs du tableau II, qui nous ont servi à interpoler dans le cas des lois normales.

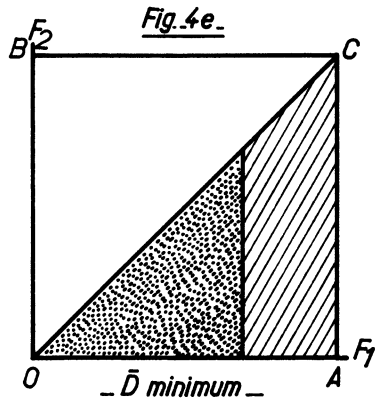
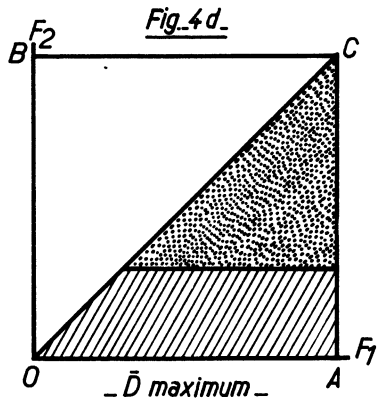
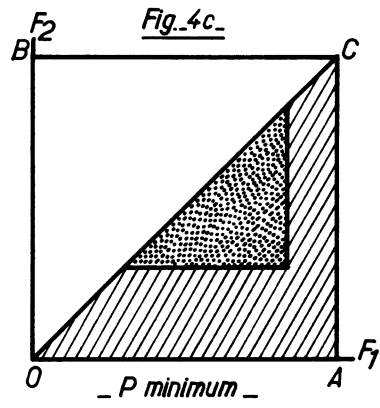
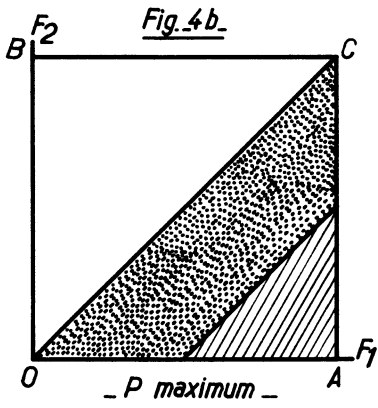
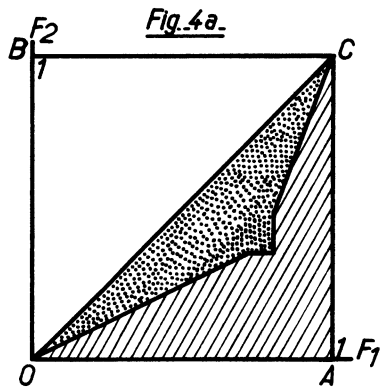
Dans le cas P minimum, on obtient :

$$Q = \beta - \frac{\beta^2}{2} \quad P = 1 - (1-\beta)^n \quad \bar{D}_{\min} = n\beta - \beta^n$$

$$\bar{D}_{\max} = (n-1) \left[1 - (1-\beta)^n \right]$$

RÉALISATION DU CALCUL NUMÉRIQUE

Les formules (3) ou (4), (5) et (8) permettent de calculer P, \bar{D} et Q dès qu'on a des tables numériques de F_2 et F_1 . Il suffit par exemple pour calculer Q de prendre une suite d'intervalles égaux Δt et assez petits et de mettre en regard ΔF_1 et F_2 (t médian), puis d'additionner $\Sigma \Delta F_1 \cdot F_2$. Cette façon de faire permet par glissement relatif des deux colonnes de faire aisément le calcul pour di-



vers écartements des deux lois. Ceci ira bien aussi pour \bar{D} , en prenant la fonction $1 - (1 - F_2)^{n-1}$ à la place de F_2 ; mais les formules (3) ou (4) ne permettent pas de faire de même pour P . Nous avons établi deux formules approchées encadrantes qui peuvent être calculées de cette façon.

On a $F_1 - F_2 = F_1(1 - F_2) - F_2(1 - F_1)$ donc $F_1 - F_2 < F_1(1 - F_2)$

Par suite $F_1^{n-1} - [F_1 - F_2]^{n-1} > F_1^{n-1} - F_1^{n-1} [1 - F_2]^{n-1}$

et $F_1^{n-1} - [F_1 - F_2]^{n-1} \equiv (n-2) \int_0^{F_2} (F_1 - x)^{n-2} dx < (n-2) \int_0^{F_2} [F_1(1-x)]^{n-2} dx \equiv F_1^{n-2} - F_1^{n-2} [1 - F_2]^{n-1}$

D'où l'encadrement :

$$(9) \quad n \int_{-\infty}^{+\infty} [1 - (1 - F_2)^{n-1}] F_1^{n-1} dF_1 < P < n \int_{-\infty}^{+\infty} [1 - (1 - F_2)^{n-1}] F_1^{n-2} dF_1$$

Ces deux formules nous ont servi pour le calcul de P dans le cas de deux lois normales égales (pour $n = 41$). Pour $n = 3$, la formule exacte (4) est utilisable; on a alors :

$$\bar{C} = 6 \int_{-\infty}^{+\infty} F_2 dF_1 \quad \bar{D} = 6 \int_{-\infty}^{+\infty} F_2 dF_1 - 3 \int_{-\infty}^{+\infty} F_2^2 dF_1$$

$$P = 6 \int_{-\infty}^{+\infty} F_1 F_2 dF_1 - 3 \int_{-\infty}^{+\infty} F_2^2 dF_1$$

En raison de la symétrie des lois on a :

$$2 \int F_2 F_1 dF_1 = \int F_2 dF_1^2 = \int (1 - F_1^2) dF_2 = \int [1 - (1 - F_2)^2] dF_1 = 2 \int F_2 dF_1 - \int F_2^2 dF_1$$

$$D'où \quad P = 6 \int_{-\infty}^{+\infty} F_2 dF_1 - 6 \int_{-\infty}^{+\infty} F_2^2 dF_1$$

On a donc à calculer simplement $\int_{-\infty}^{+\infty} F_2^2 dF_1$ pour avoir \bar{D} et P .