Revue de statistique appliquée

G. Delaitre

Détermination de la mise en œuvre moyenne de découpage en longueurs fixes d'un produit linéaire présentant des défauts accidentels

Revue de statistique appliquée, tome 10, nº 1 (1962), p. 49-77
<http://www.numdam.org/item?id=RSA_1962__10_1_49_0>

DÉTERMINATION DE LA MISE EN ŒUVRE MOYENNE DE DÉCOUPAGE EN LONGUEURS FIXES D'UN PRODUIT LINÉAIRES PRÉSENTANT DES DÉFAUTS ACCIDENTELS

G. DELAITRE

Ingénieur E. C. P.
Compagnie Française des métaux

I - EXPOSE DU PROBLEME -

Un atelier d'étirage produit des tubes de cuivre livrés à la clientèle enroulés en "couronnes".

La fabrication de ces tubes se fait à partir de billettes de cuivre de poids pratiquement fixe (la dispersion des poids des billettes autour de la valeur moyenne a une amplitude totale de 1 à 3 % de cette valeur moyenne).

Les chutes des soies d'étirage en cours de fabrication sont la cause d'une perte de métal, mais, pour une section finale de tube déterminée, cette perte est très sensiblement constante pour toutes les billettes, si bien qu'en définitive, pour une section finale donnée, la longueur maximale obtenue en fin d'étirage est constante et égale à $\mathcal{L}$.

Pour les besoins normaux le tube de longueur $\mathcal{L}$ correspondrait à un poids unitaire de couronne trop élevé ; il est alors fractionné en N sous-multiples plus maniables.

Les couronnes de longueur $\mathcal{L}$ ou $\frac{\mathcal{L}}{N}$ présentent malheureusement un certain nombre de défauts accidentels qu'il convient d'éliminer. Cette élimination se fait évidemment par rupture du tube à l'emplacement du défaut.

La fabrication normale produit donc des couronnes de longueurs très variables pour une section donnée. Elles sont comprises entre un minimum au-dessous duquel les couronnes ne sont plus vendables et un maximum égal à $\frac{\mathcal{L}}{N}$. La production normale donne donc des couronnes de longueur "tout venant", assurant la meilleure utilisation de la longueur $\mathcal{L}$.

En règle générale, les clients commandent des tubes enroulés en couronnes de longueur comprise entre λl et l (λ étant un paramètre inférieur à 1).

1) S'il s'agit d'utilisateurs débitant les tubes en faibles longueurs, les commandes seront passées en longueurs "tout venant".

Alors λ est faible. λ varie de 0,1 à 0,3.

2) D'autres clients au contraire ont besoin de tubes en couronnes de longueur fixe l. Ils admettent pourtant une certaine tolérance sur la longueur

4

de livraison si bien que les tubes à livrer auront une longueur comprise entre λl et l, dans ce cas les normes généralement utilisées donnent $\lambda = 0,95$.

3) Un cas intermédiaire se présente parfois : le client, sans avoir besoin de longueurs fixes désire recevoir des couronnes de longueurs "homogènes", ce qui lui permet d'estimer aisément son stock magasin d'après le nombre de couronnes.

Dans ce cas λ varie de 0,7 à 0,8.

Le problème consiste à déterminer la longueur moyenne utilisable $\mathcal{U}$ par tube étiré de longueur $\mathcal{L}$ en fonction de l, λ, de la répartition des défauts et de la façon d'obtenir les couronnes de longueur comprise entre λl et l.

II - PONCTUALITE DES DEFAUTS -

Les défauts rencontrés sur les tubes de cuivre sont en majeure partie ponctuels, de toute façon leur longueur est généralement très faible par rapport à la longueur $\mathcal{L}$.

Nous considèrerons que nous avons affaire à des défauts ponctuels.

III - HYPOTHESE SUR LA REPARTITION DES DEFAUTS SUR UN TUBE DE LONGUEUR -

Les causes de défauts sur un tube de cuivre sont multiples. Il est probable que certains défauts ayant une origine connue doivent se manifester plus fréquemment dans des zônes déterminées.

Cependant, étant donné que dans une fabrication bien réglée, les défauts systématiques sont très atténués et que les causes aléatoires de défauts subsistants sont malgré tout nombreuses, nous pouvons admettre que si nous faisons abstraction de l'origine des défauts ces derniers auront une probabilité d'apparition constante sur toute la longueur $\mathcal{L}$.

Ainsi, si parmi toutes les couronnes de longueur $\mathcal{L}$ nous trions celles ayant α défauts quelconques, nous admettrons que chacun de ces α défauts peut se trouver avec une égale chance en un point quelconque de la longueur $\mathcal{L}$.

IV - HYPOTHESE COMPLEMENTAIRE SUR LA REPARTITION DES DEFAUTS ENTRE TUBES -

Le complément logique de l'hypothèse précédente est d'admettre que les défauts sont répartis au hasard entre les tubes de longueur $\mathcal{L}$.

Ainsi, si nous considérons les tubes d'une section déterminée, étirés en couronnes de longueur $\mathcal{L}$, $\mathcal{N}$ de ces tubes porteront $\mathcal{D}$ défauts au total.

Si nous admettons que ces $\mathcal{D}$ défauts sont répartis au hasard entre les $\mathcal{N}$ couronnes, nous obtenons une répartition binomiale des défauts entre les couronnes.

Lorsque le nombre $\mathcal{N}$ de couronnes examinées augmente, le rapport $\frac{\mathcal{D}}{\mathcal{N}}$ tend vers une limite ν qui est le nombre moyen de défauts par couronne de longueur $\mathcal{L}$ pour la section de tube considérée.

La répartition des défauts entre tubes de longueur $\mathcal{L}$ tend vers une loi de Poisson de moyenne ν.

L'expérience monte, que pour une section de tube déterminée, la répartition des défauts entre couronnes de longueur $\mathcal{L}$ peut s'ajuster à une loi de Poisson avec une approximation acceptable.

Nous admettrons donc que la probabilité d'avoir une couronne de longueur $\mathcal{L}$ portant α défauts est :

$$e^{-\nu} \frac{\nu^{\alpha}}{\alpha !}$$

Nous pouvons traiter le problème du découpage de deux façons : ou bien faire intervenir simultanément les deux hypothèses faites, ou bien étudier d'abord les tubes ayant α défauts accidentels, et faire intervenir la loi de répartition des défauts entre tubes de longueur $\mathcal{L}$ dans un deuxième stade.

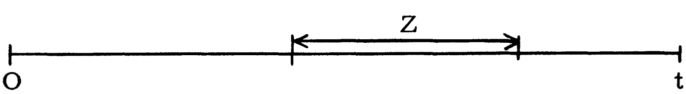
La première méthode conduit dans certains cas à des calculs plus simples ; néanmoins nous utiliserons la deuxième méthode pour les raisons suivantes :

Si la deuxième hypothèse est facile à vérifier, la première l'est moins, mais c'est la seule se prêtant à des calculs simples.

Nous pourrons donc étudier d'abord les tubes de longueur $\mathcal{L}$ ayant α défauts que nous admettrons accidentels ; les résultats obtenus pourront alors être appliqués à une loi de répartition des défauts entre tubes $\mathcal{L}$ différente d'une loi de Poisson.

V - REPARTITION DES LONGUEURS DES SEGMENTS ISSUS D'UN TUBE AYANT α DEFAUTS ACCIDENTELS -

Etudions d'abord le problème suivant ; étant donné un tube de longueur t portant α défauts accidentels, quel est le nombre moyen de segments de longueur supérieure à une valeur $Z \leqslant t$?



Considérons un défaut quelconque. La probabilité pour que ce défaut ponctuel, considéré comme seul, laisse à sa droite un segment libre au moins égal à Z est $\left(1 - \frac{Z}{t}\right)$.

Ceci étant réalisé, la probabilité conditionnelle pour que les $(\alpha - 1)$ autres défauts soient situés en dehors du segment Z est $\left(1 - \frac{Z}{t}\right)^{\alpha - 1}$. Il s'ensuit, que la probabilité qu'un défaut quelconque soit suivi d'un segment de longueur au moins égale à Z est

$$\left(1 - \frac{Z}{t}\right)^{\alpha} \qquad (1)$$

La probabilité qu'un segment pris au hasard soit supérieur à Z s'identifie à l'espérance mathématique d'une variable aléatoire prenant la valeur 0 si le segment est inférieur à Z et 1 s'il est supérieur à Z.

Comme il y a $(\alpha + 1)$ segments, l'espérance mathématique du nombre du nombre de segments supérieurs à Z est donc égale à

$$(\alpha + 1) \left(1 - \frac{Z}{t}\right)^{\alpha} \tag{2}$$

On déduit de la formule (2) que le nombre moyen de segments de longueur comprise entre Z et Z + dz, issus d'un tube de longueur t ayant α défauts accidentels est :

$$dy_{\alpha} = (\alpha + 1) \frac{\alpha}{t} \left(1 - \frac{z}{t}\right)^{\alpha - 1} dz \tag{3}$$

La longueur moyenne de l'ensemble des segments de longueur comprise entre Z_1 et Z_2 est égale à :

$$\alpha(\alpha + 1) \int_{Z_1}^{Z_2} \frac{Z}{t} \left(1 - \frac{Z}{t}\right)^{\alpha - 1} dz =$$

$$(\alpha + 1) \left\{ Z_1 \left(1 - \frac{Z_1}{t}\right)^{\alpha} - Z_2 \left(1 - \frac{Z_2}{t}\right)^{\alpha} \right\} + t \left\{ \left(1 - \frac{Z_1}{t}\right)^{\alpha + 1} - \left(1 - \frac{Z_2}{t}\right)^{\alpha + 1} \right\} \tag{4}$$

Si $Z_2 = t$ et $Z_1 = \lambda t$ avec λ 1, la formule (4) devient :

$$t(1 - \lambda)^{\alpha} (\alpha \lambda + 1) \tag{5}$$

Longueur moyenne de l'ensemble des segments de longueur comprise entre λt et t sur un tube de longueur t ayant α défauts accidentels.

VI - DEFINITION DES DIVERS MODES DE DECOUPAGE POSSIBLES D'UN TUBE DE LONGUEUR $\mathcal{L}$

Prenons toute la population des tubes de longueur $\mathcal{L}$ ayant α défauts accidentels.

Nous voulons déterminer quelle est, en moyenne, la longueur $\mathcal{U}$ utilisable sur la couronne $\mathcal{L}$ quand nous voulons découper à partir de cette longueur des segments compris entre λl et l.

Ainsi posé, le problème a plusieurs solutions selon la façon dont nous opérerons pour obtenir les segments de longueur comprise entre λl et l.

1) Découpage rationnel

Le découpage assurant intuitivement la meilleure utilisation de la longueur   consiste à examiner entièrement le tube de longueur   préalablement à tout découpage. Deux défauts ponctuels consécutifs étant séparés par la distance u, le segment de longueur u sera théoriquement entièrement utilisable si on peut trouver un nombre entier M, tel que si on divise le segment u en M segments égaux, leur longueur soit comprise entre λl et l.

Cette condition se traduit par

$$\lambda l \leqslant \frac{u}{M} \leqslant l$$

Les segments totalement utilisables ont donc une longueur u telle que

$$M \lambda l \leqslant u \leqslant M l \tag{6}$$

Les segments ayant une longueur u ne respectant pas les conditions (6) présentent une "chute"

Par exemple si

$$Ml \leqslant u < (M + 1)\lambda l \tag{7}$$

la longueur maximale que nous pourrons utiliser sur le segment u sera égale à Ml.

La "chute" sera donc égale à :

$$u - Ml$$

Une telle façon de procéder au découpage, bien qu'assurant la meilleure utilisation du tube de longueur $\mathcal{L}$ est pratiquement difficile à réaliser. $\mathcal{L}$ peut être en effet de plusieurs centaines de mètres, mettons 300 à 400 m. La localisation de tous les défauts avant découpage nécessiterait un chantier de contrôle très long.

Nous appellerons ce mode de découpage, découpage rationnel.

2) Découpage rationnel pratique

Comme dans le cas du découpage rationnel, nous couperons le tube de longueur $\mathcal{L}$ à chaque défaut rencontré.

A partir d'une extrêmité ou d'un défaut, nous couperons des segments de longueur l. Si la distance entre la dernière coupe et le défaut suivant est inférieure à λl, nous aurons une chute ; si par contre elle est comprise entre λl et l, elle pourra être entièrement utilisée.

La différence avec le découpage rationnel tient au fait que, nous ne jouons que sur la tolérance du dernier segment coupé.

Ce mode de découpage est évidemment facile à réaliser : il ne nécessite qu'un examen du tube en cours de déroulage. Nous l'appellerons découpage rationnel pratique.

Un segment u séparant 2 défauts consécutifs sera entièrement utilisé s'il existe un entier M tel que

$$Ml + \lambda l \leqslant u \leqslant (M + 1)l \tag{8}$$

Par contre, les segments tels que

$$Ml \leqslant u < (M + \lambda)l$$

auront une longueur utilisable Ml et une chute égale à

$$u - Ml$$

3) Découpage a priori

C'est le mode de découpage le plus généralement utilisé. Il consiste à découper le tube de longueur $\mathcal{L}$ en segments de longueur l préalablement à tout examen.

Les segments 1 sont ensuite contrôlés et éventuellement récupérés, lorsqu'ils portent des défauts à une longueur comprise entre $\lambda 1$ et 1.

4) Autre mode de découpage

Nous pourrions être tentés, en procédant comme dans le découpage rationnel pratique, de couper des segments de longueur $\lambda 1$.

Nous nous interdisons ainsi toute récupération possible, et ce mode de découpage donne des résultats inférieurs au découpage rationnel pratique.

VII - ETUDE DES DIVERS MODES DE DECOUPAGE -

Prenons l'ensemble des couronnes de longueur $\mathcal{L}$ ayant α défauts accidentels et déterminons la longueur moyenne utilisable $\mathcal{V}$ de la couronne $\mathcal{L}$ lorsque nous faisons avec cette couronne des segments de longueur comprise entre $\lambda 1$ et 1, dans les divers modes de découpage énumérés ci-dessus.

Nous poserons dans tout ce qui suit

$$\frac{\mathcal{L}}{1} = \Gamma$$

et nous désignerons par n la partie entière de Γ

$$n \leqslant \Gamma < n + 1$$

1) Découpage rationnel

Supposons d'abord la longueur $\mathcal{L}$ aussi grande que nous voulons, et posons

$$1 - \frac{1}{n_0} \leqslant \lambda < 1 - \frac{1}{n_0 + 1}$$

n_0 étant entier.

Nous pouvons dresser le tableau suivant

Tableau I

Longueur du segment	Longueur utilisable
$0 < u < \lambda 1$	0
$\lambda 1 \leqslant u \leqslant 1$	u
$1 \leqslant u < 2\lambda 1$	1
$2\lambda 1 \leqslant u \leqslant 21$	u
...	...
$(n_0 - 1)\lambda 1 \leqslant u \leqslant (n_0 - 1)1$	u
$(n_0 - 1)1 \leqslant u < n_0 \lambda 1$	$(n_0 - 1)1$
$n_0 \lambda 1 \leqslant u < \mathcal{L}$	u

Trois cas sont possibles :

a) $n_0\ \lambda 1 \leqslant \mathcal{L}$ soit $n_0 \lambda \leqslant \Gamma$

Le tableau ci-dessus convient.

b) $\underline{n_0 \lambda l > \mathcal{L}}$ soit $n_0\lambda > \Gamma$

Le tableau ci-dessus doit alors être tronqué. Comme $n < \Gamma < n + 1$ nous pouvons formuler 2 hypothèses :

1) $\underline{(n + 1) \lambda l < \mathcal{L} < (n + 1) l}$

soit

$$\lambda < \frac{\Gamma}{n + 1}$$

Le segment dont la longueur est comprise entre $(n + 1)\lambda l$ et $\mathcal{L}$ est alors entièrement utilisable.

2) $\underline{n l \leqslant \mathcal{L} < (n + 1) \lambda l}$

soit

$$\lambda > \frac{\Gamma}{n + 1}$$

le segment dont la longueur est comprise entre nl et $\mathcal{L}$ a une longueur utilisable égale à nl.

Ceci étant établi, la valeur moyenne de la somme des segments issus de la couronne de longueur $\mathcal{L}$, ayant α défauts accidentels, dont la longueur est comprise entre $j\lambda l$ et jl est d'après la formule (4)

$$l \left\{ (\alpha + 1) \left[j\lambda \left(1 - \frac{j\lambda}{\Gamma}\right)^{\alpha} - j \left(1 - \frac{j}{\Gamma}\right)^{\alpha} \right] + \Gamma \left[\left(1 - \frac{j\lambda}{\Gamma}\right)^{\alpha+1} - \left(1 - \frac{j}{\Gamma}\right)^{\alpha+1} \right] \right\} \qquad (9)$$

D'autre part, d'après la formule (1) le nombre moyen de segments de longueur comprise entre $(j - 1)l$ et $j\lambda l$ issus de la couronne $\mathcal{L}$ est ·

$$(\alpha + 1) \left[\left(1 - \frac{j - 1}{\Gamma}\right)^{\alpha} - \left(1 - \frac{j\lambda}{\Gamma}\right)^{\alpha} \right]$$

chacun de ces segments a une longueur utilisable égale à

$$(j - 1)l$$

Si bien que la longueur moyenne utilisable de l'ensemble des segments de longueur comprise entre $(j - 1)l$ et $j\lambda l$ issus de la couronne de longueur $\mathcal{L}$ ayant α défauts est égale à

$$l(\alpha + 1) (j - 1) \left[\left(1 - \frac{j - 1}{\Gamma}\right)^{\alpha} - \left(1 - \frac{j\lambda}{\Gamma}\right)^{\alpha} \right] \qquad (10)$$

Nous en déduisons les longueurs moyennes utilisables dans les 3 cas possibles

a) $\underline{\text{Si } n_0\lambda \leqslant \Gamma}$

$$\mathcal{V} = \frac{\mathcal{L}}{\Gamma}\left\{(\alpha + 1)\sum_{j=1}^{j=n_0}(j\lambda - j + 1)\left(1 - \frac{j\lambda}{\Gamma}\right)^{\alpha} + \Gamma\left[\sum_{j=1}^{j=n_0}\left(1 - \frac{j\lambda}{\Gamma}\right)^{\alpha+1} - \sum_{j=1}^{j=n_0-1}\left(1 - j\right)^{\alpha+1}\right]\right. \tag{11}$$

<u>b) Si $n_0\ \lambda > \Gamma$</u>

1) <u>Si $\lambda < \dfrac{\Gamma}{n + 1}$</u>

$$\mathcal{V} = \frac{\mathcal{L}}{\Gamma}\left\{(\alpha + 1)\sum_{j=1}^{j=n+1}(j\lambda - j + 1)\left(1 - \frac{j\lambda}{\Gamma}\right)^{\alpha} + \Gamma\left[\sum_{j=1}^{j=n+1}\left(1 - \frac{j\lambda}{\Gamma}\right)^{\alpha+1} - \sum_{j=1}^{j=n}\left(1 - \frac{j}{\Gamma}\right)^{\alpha+1}\right]\right\} \tag{12}$$

2) <u>Si $\lambda > \dfrac{\Gamma}{n + 1}$</u>

$$\mathcal{V} = \frac{\mathcal{L}}{\Gamma}\left\{(\alpha + 1)\sum_{j=1}^{j=n}(j\lambda - j + 1)\left(1 - \frac{j\lambda}{\Gamma}\right)^{\alpha} + \Gamma\left[\sum_{j=1}^{j=n}\left(1 - \frac{j\lambda}{\Gamma}\right)^{\alpha+1} - \sum_{j=1}^{j=n}\left(1 - \frac{j}{\Gamma}\right)^{\alpha+1}\right]\right\} \tag{13}$$

Dans le cas particulier où $\lambda = 1$, n_0 est infini nous sommes alors dans le cas (b), et de plus $1 > \dfrac{\Gamma}{n + 1}$. Il convient donc d'appliquer la formule b) 2), l'expression de $\mathcal{V}$ se simplifie

$$\mathcal{V} = \frac{\mathcal{L}}{\Gamma}(\alpha + 1)\left[\left(1 - \frac{1}{\Gamma}\right)^{\alpha} + \left(1 - \frac{2}{\Gamma}\right)^{\alpha} + \dots + \left(1 - \frac{n}{\Gamma}\right)^{\alpha}\right] \tag{14}$$

2) <u>Découpage rationnel pratique</u>

Dans le cas du découpage rationnel pratique, nous pouvons dresser le tableau ci-dessous

Tableau II

Longueur du segment	Longueur utilisable
$0 \leqslant u < \lambda l$	0
$\lambda l \leqslant u \leqslant l$	u
$l \leqslant u < l + \lambda l$	l
$l + \lambda l \leqslant u \leqslant 2l$	u
$jl + \lambda l \leqslant u \leqslant (j + 1)l$	u
$(j + 1)l \leqslant u < (j + 1 + \lambda)l$	$(j + 1)l$
$nl \leqslant u < \mathcal{L}$ si $n \leqslant \Gamma < n + \lambda$	nl
$(n + \lambda)l \leqslant u \leqslant \mathcal{L}$ Si $n + \lambda < \Gamma < n + 1$	u

Il y a donc 2 cas à considérer suivant que $\Gamma < n + \lambda$ ou que $n + \lambda < \Gamma < n + 1$.

Comme dans le découpage rationnel, les formules (1) et (4) nous permettent de donner la valeur de la longueur moyenne utilisable en découpage rationnel pratique.

a) Si $\Gamma \leqslant n + \lambda$

$$\mathcal{V} = \frac{\mathcal{L}}{\Gamma}\left\{(\alpha+1)\lambda \sum_{j=0}^{j=n-1}\left(1-\frac{j+\lambda}{\Gamma}\right)^{\alpha} + \Gamma\left[\sum_{j=0}^{j=n-1}\left(1-\frac{j+\lambda}{\Gamma}\right)^{\alpha+1} - \sum_{j=1}^{j=n}\left(1-\frac{j}{\Gamma}\right)^{\alpha+1}\right]\right\} \tag{15}$$

b) Si $n + \lambda \leqslant \Gamma < n + 1$

$$\mathcal{V} = \frac{\mathcal{L}}{\Gamma}\left\{(\alpha+1)\lambda \sum_{j=0}^{j=n}\left(1-\frac{j+\lambda}{\Gamma}\right)^{\alpha} + \Gamma\left[\sum_{j=0}^{j=n-1}\left(1-\frac{j+\lambda}{\Gamma}\right)^{\alpha+1} - \sum_{j=1}^{j=n}\left(1-\frac{j}{\Gamma}\right)^{\alpha+1}\right]\right\} \tag{16}$$

Dans le cas particulier où $\lambda = 1$, il faut appliquer l'expression (15) car $\Gamma < n + 1$; il est facile de voir que dans ces conditions on retombe sur la formule (14), ce qui était prévisible, car alors il n'y a pas de distinction entre découpage rationnel et découpage rationnel pratique.

Remarque - Le quatrième mode de découpage signalé s'apparente à un découpage rationnel où $\lambda = 1$.

Si nous posons

$$n' \leqslant \frac{\Gamma}{\lambda} < n' + 1$$

il est facile de voir, d'après la formule (14) que la longueur moyenne utilisable par couronne de longueur sera

$$\mathcal{V} = \frac{\mathcal{L}}{\Gamma}\lambda(\alpha+1)\left[\left(1-\frac{\lambda}{\Gamma}\right)^{\alpha} + \left(1-\frac{2\lambda}{\Gamma}\right)^{\alpha} + \ldots + \left(1-\frac{n'\lambda}{\Gamma}\right)^{\alpha}\right] \tag{17}$$

3) Découpage a priori

La couronne de longueur $\mathcal{L}$ est scindée en n segments de longueur l et une "chute" de longueur $\mathcal{L} - nl = \mathcal{L}\left(1 - \frac{n}{\Gamma}\right)$.

Prenons l'ensemble des couronnes de longueur $\mathcal{L}$ portant α défauts accidentels. La probabilité d'avoir $\alpha - k$ défauts quelconques sur la "chute" et k défauts quelconques répartis sur les n segments découpés est

$$C_{\alpha}^{k}\left(1-\frac{n}{\Gamma}\right)^{\alpha-k}\left(\frac{n}{\Gamma}\right)^{k}$$

Il faut distinguer 2 cas

a) La "chute" de longueur $\mathcal{L}\left(1 - \frac{n}{\Gamma}\right)$ est inférieure à λl et ne peut par conséquent servir dans aucun cas.

Ceci est réalisé si

$$\mathcal{L}\left(1-\frac{n}{\Gamma}\right) < \lambda l$$

soit

$$\lambda > \Gamma - n$$

b) Par contre si $\lambda < \Gamma - n$ la "chute peut être alors utilisée en tout ou en partie.

Etudions d'abord le premier cas

a) $\lambda > \Gamma - n$

La longueur $\mathcal{L}\left(1 - \frac{n}{\Gamma}\right)$ est perdue dans tous les cas.

Par conséquent, les défauts situés sur cette longueur ne sont pas génants.

Le problème est ramené à celui de la nocivité de k défauts sur une longueur capable de n segments de longueur 1.

Si nous avons K défauts accidentels situés sur n segments, la probabilité pour qu'un segment déterminé porte μ défauts quelconques est

$$C_k^\mu \frac{1}{n^\mu}\left(1 - \frac{1}{n}\right)^{k-\mu} = C_k^\mu \frac{(n - 1)^{k-\mu}}{n^k}$$

Le nombre moyen de tronçons portant μ défauts accidentels est donc :

$$n\, C_k^\mu \frac{(n - 1)^{k-\mu}}{n^k} = C_k^\mu \frac{(n - 1)^{k-\mu}}{n^{k-1}}$$

Or, d'après la formule (5), la longueur moyenne de l'ensemble des segments de longueur supérieure à $\lambda 1$, situés sur un tube de longueur 1 ayant μ défauts accidentels est égale à

$$1(1 - \lambda)^\mu (\lambda\mu + 1)$$

Il s'ensuit que la longueur moyenne utilisable d'une longueur nl, divisée en n segments, portant k défauts accidentels, servant à faire des segments de longueur comprise entre $\lambda 1$ et 1, est égale à :

$$\sum_{\mu=0}^{\mu=k} C_k^\mu \frac{(n - 1)^{k-\mu}}{n^{k-1}} 1(1 - \lambda)^\mu (\lambda\mu + 1) \tag{18}$$

En remarquant que :

$$C_k^\mu = k\, C_{k-1}^{\mu-1}$$

La formule (18) peut se mettre sous la forme :

$$1 \frac{(n - \lambda)^{k-1}}{n^{k-1}} [n - \lambda + \lambda k(1 - \lambda)] \tag{19}$$

La longueur moyenne utilisable de la couronne de longueur $\mathcal{L}$ est alors déterminée par $\left(\text{en remplaçant 1 par } \frac{\mathcal{L}}{\Gamma}\right)$:

$$\frac{\mathcal{L}}{\Gamma}\sum_{k=0}^{k=a} C_a^k \left(1 - \frac{n}{\Gamma}\right)^{a-k}\left(\frac{n}{\Gamma}\right)^k \left(\frac{n - \lambda}{n}\right)^{k-1} [n - \lambda + k\lambda(1 - \lambda)] \tag{20}$$

Expression qui peut se mettre sous la forme :

$$\mathcal{V} = \mathcal{L}\frac{n}{\Gamma}\left(1 - \frac{\lambda}{\Gamma}\right)^{\alpha-1}\left[1 + \frac{(\alpha - 1)\lambda - \alpha\lambda^2}{\Gamma}\right] \tag{21}$$

L'expression (21) est valable si $\lambda > \Gamma - n$.

b) $\lambda \leqslant \Gamma - n$

La "chute" de longueur $\mathcal{L}\left(1 - \frac{n}{\Gamma}\right)$ peut alors être utilisée partiellement ou totalement.

Lorsque la "chute" porte K défauts accidentels, sa longueur moyenne utilisable pour faire des segments de longueur supérieure à λl est, d'après la formule (5)

$$\mathcal{L}\left(1 + \frac{K\lambda - n}{\Gamma}\right)\left(1 - \frac{\lambda}{\Gamma - n}\right)^k$$

Au total, la longueur moyenne utilisable de la "chute" d'une couronne de longueur $\mathcal{L}$ portant α défauts accidentels est égale, tous calculs faits, à :

$$= \mathcal{L}\left(1 - \frac{n}{\Gamma}\right)\left(1 - \frac{\lambda}{\Gamma}\right)^{\alpha} + \mathcal{L}\frac{\alpha\lambda}{\Gamma}\left(1 - \frac{n + \lambda}{\Gamma}\right)\left(1 - \frac{\lambda}{\Gamma}\right)^{\alpha-1}$$

Cette utilisation de la "chute" $\mathcal{L}\left(1 - \frac{n}{\Gamma}\right)$ s'ajoute évidemment à la longueur moyenne donnée par la formule (21).

Si bien qu'au total, lorsque $\lambda < \Gamma - n$ la longueur moyenne utilisable du tube $\mathcal{L}$ portant α défauts est

$$\mathcal{V} = \mathcal{L}\left(1 - \frac{\lambda}{\Gamma}\right)^{\alpha-1}\left[1 + \frac{(\alpha - 1)}{\Gamma} - \frac{\alpha(n + 1)\lambda^2}{\Gamma^2}\right] \tag{22}$$

Si $\lambda = 1$, il convient évidemment d'appliquer la formule (21) quel que soit Γ.

Alors

$$\mathcal{V} = \mathcal{L}\frac{n}{\Gamma}\left(1 - \frac{1}{\Gamma}\right)^{\alpha}$$

VIII - DETERMINATION DES MISES EN ŒUVRE DES DIVERS MODES DE DECOUPAGE

Pour un mode de découpage déterminé, la longueur moyenne utilisable de l'ensemble des couronnes de longueur $\mathcal{L}$ sera égale à :

$$\mathcal{U} = \sum_{\alpha=0}^{\infty} e^{-\nu}\frac{\nu^{\alpha}}{\alpha!}\mathcal{V}(\alpha)$$

$\mathcal{V}(\alpha)$ étant donné par une des formules précédemment établies.

Les fabricants de tubes ne parlent pas de longueur moyenne utilisable, mais de la mise en œuvre par rapport aux couronnes de longueur $\mathcal{L}$.

Cette mise en œuvre $\mathcal{M}$ est définie par

$$\mathcal{M} = \frac{\mathcal{L}}{\mathcal{U}}$$

La détermination de $\mathcal{M}$ est particulièrement importante pour l'établissement des prix de revient.

1) Découpage rationnel et découpage rationnel pratique

Dans le cas du découpage rationnel $\mathcal{V}(\alpha)$ est donné par les formules (11), (12) ou (13) suivant la valeur de λ.

Pour le découpage rationnel pratique $\mathcal{V}(\alpha)$ est déterminé par les expressions (15) ou (16).

Les valeurs correspondantes de $\mathcal{U}$ s'obtiennent sans difficulté. Elles sont pourtant assez compliquées et nous ne les indiquerons pas.

Dans le cas où $\lambda = 1$, découpage rationnel et découpage rationnel pratique coïncident ; $\mathcal{V}$ est alors donné par la formule (14)

$$\mathcal{V}(\alpha) = \frac{\mathcal{L}}{\Gamma}(\alpha + 1)\sum_{j=1}^{j=n}\left(1 - \frac{j}{\Gamma}\right)^{\alpha}$$

Alors

$$\mathcal{U} = \frac{\mathcal{L}}{\Gamma} e^{-\nu}\sum_{j=1}^{j=n}\sum_{\alpha=0}^{\infty}\frac{\nu^{\alpha}}{\alpha!}\left(1 - \frac{j}{\Gamma}\right)^{\alpha} = \frac{\mathcal{L}}{\Gamma}(1 + \nu)\sum_{j=1}^{j=n} e^{-j\frac{\nu}{\Gamma}} - \frac{\mathcal{L}}{\Gamma^2}\nu\sum_{j=1}^{j=n} j e^{-j\frac{\nu}{\Gamma}}$$

Or

$$\sum_{j=1}^{j=n} e^{-j\frac{\nu}{\Gamma}} = \frac{1 - e^{-n\frac{\nu}{\Gamma}}}{e^{\frac{\nu}{\Gamma}} - 1}$$

et

$$\sum_{j=1}^{j=n} j e^{-j\frac{\nu}{\Gamma}} = \sum_{j=0}^{j=n} j e^{-j\frac{\nu}{\Gamma}} = -\Gamma\frac{d}{d\nu}\left(\sum_{j=0}^{j=n} e^{-j\frac{\nu}{\Gamma}}\right)$$

Finalement

$$\mathcal{U} = \frac{\mathcal{L}}{\Gamma} e^{-\frac{\nu}{\Gamma}}\left\{\frac{1 + \nu - \left[1 + \nu\left(1 - \frac{n}{\Gamma}\right)\right] e^{-n\frac{\nu}{\Gamma}}}{1 - e^{-\frac{\nu}{\Gamma}}} - \frac{\nu}{\Gamma}\frac{1 - e^{-n\frac{\nu}{\Gamma}}}{\left(1 - e^{-\frac{\nu}{\Gamma}}\right)^2}\right\} \qquad (24)$$

Nous en déduisons l'expression de la mise en œuvre.

2) Découpage a priori

Les expressions de la longueur moyenne utilisable $\mathcal{U}$ s'obtiennent immédiatement à partir de la formule (21) et (22). Néanmoins, nous allons les établir directement.

Les couronnes de longueur $\mathcal{L}$ ayant en moyenne ν défauts, les couronnes de longueur $l = \frac{\mathcal{L}}{\Gamma}$ en ont en moyenne $\frac{\nu}{\Gamma}$, et la chute de longueur $\mathcal{L} - nl = \mathcal{L}\left(1 - \frac{n}{\Gamma}\right)$ en porte en moyenne $\nu\left(1 - \frac{n}{\Gamma}\right)$.

Deux cas sont à considérer suivant la valeur de λ.

1) $\lambda > \Gamma - n$

La longueur $\mathcal{L} - nl = \mathcal{L}\left(1 - \frac{n}{\Gamma}\right)$ est inutilisable.

La loi de répartition des défauts entre les couronnes de longueur l est une loi de Poisson de moyenne $\frac{\nu}{\Gamma}$.

D'après (5) la longueur moyenne utilisable d'une couronne de longueur l ayant α défauts accidentels est

$$l(1 - \lambda)^{\alpha}(\lambda\alpha + 1)$$

La longueur moyenne utilisable de l'ensemble des couronnes de longueur l sera donc égale à :

$$l\sum_{\alpha=0}^{\infty} e^{-\frac{\nu}{\Gamma}} \frac{\left(\frac{\nu}{\Gamma}\right)^{\alpha}}{\alpha!} (1 - \lambda)^{\alpha}(\lambda\alpha + 1) = l\, e^{-\frac{\nu\lambda}{\Gamma}}\left[1 + \frac{\nu\lambda}{\Gamma}(1 - \lambda\right]$$

La longueur moyenne utilisable de l'ensemble des couronnes de longueur l sera donc

$$\mathcal{U}' = \mathcal{L}\,\frac{n}{\Gamma}\, e^{-\frac{\nu\lambda}{\Gamma}}\left[1 + \frac{\nu\lambda}{\Gamma}(1 - \lambda)\right] \tag{25}$$

La mise en œuvre correspondante sera :

$$\boxed{\mathcal{M} = \frac{\Gamma}{n}\,\frac{e^{\frac{\nu\lambda}{\Gamma}}}{1 + \frac{\lambda\nu}{\Gamma}(1 - \lambda)}} \tag{26}$$

2) $\lambda \leqslant \Gamma - n$

La "chute" de longueur $\mathcal{L}\left(1 - \frac{n}{\Gamma}\right)$ peut être alors partiellement utilisée. Elle aura une longueur moyenne utilisable $\mathcal{U}'$ qui s'ajoutera à $\mathcal{U}$ donné par (25).

$\mathcal{U}'$ peut se déterminer à partir de la formule (25) où :

$\mathcal{L}$ est remplacé par $\mathcal{L} = \mathcal{L}\left(1 - \frac{n}{\Gamma}\right)$

Γ est remplacé par $\Gamma' = 1$

ν est remplacé par $\nu' = \nu\left(1 - \frac{n}{\Gamma}\right)$

λ est remplacé par $\lambda' = \frac{\lambda l}{l(\Gamma - n)} = \frac{\lambda}{\Gamma - n}$

Par conséquent :

$$\mathcal{U} = \mathcal{L}\left(1 - \frac{n}{\Gamma}\right) e^{-\frac{\nu\lambda}{\Gamma}}\left[1 + \frac{\nu\lambda}{\Gamma}\left(1 - \frac{\lambda}{\Gamma - n}\right)\right]$$

Tous calculs faits, la longueur moyenne utilisable est alors donnée par l'expression suivante :

$$\mathcal{U} = \mathcal{L}\, e^{-\frac{\nu\lambda}{\Gamma}} \left[1 + \frac{\nu\lambda}{\Gamma}\left(1 - \frac{n+1}{\Gamma}\lambda\right)\right] \tag{27}$$

La mise en œuvre devient :

$$\boxed{\mathcal{M} = \frac{e^{\frac{\nu\lambda}{\Gamma}}}{1 + \frac{\nu\lambda}{\Gamma}\left(1 - \frac{n+1}{\Gamma}\lambda\right)}} \tag{28}$$

Cas où une mise à poids préalable est possible

La formule (26) a été établie dans le cas général où Γ n'est pas entier. Or, dans l'étirage des tubes, il est possible, dans certains cas, de faire une mise à poids préalable de l'ébauche initiale.

L'ébauche est alors découpée, à un certain stade de la fabrication, en 2 tronçons dont un capable de β longueurs 1 en tube fini, le deuxième tronçon étant employé à d'autres fabrications.

La mise en œuvre par rapport à l'ébauche capable de β longueurs 1 de tube fini s'obtiendra en appliquant la formule (26), Γ étant remplacé par $\Gamma' = \beta$ et ν par $\nu' = \frac{\nu\beta}{\Gamma}$

On trouve

$$\boxed{\mathcal{M} = \frac{e^{\frac{\nu\lambda}{\Gamma}}}{1 + \frac{\nu\lambda}{\Gamma}(1 - \lambda)}} \tag{29}$$

IX - ETUDE DE LA FONCTION MISE EN ŒUVRE $\mathcal{M}$ DU DECOUPAGE A PRIORI

$\mathcal{M}(\Gamma, \lambda, \nu)$ est une fonction de trois variables :

$\Gamma \doteq \frac{\mathcal{L}}{1}$ rapport entre la longueur $\mathcal{L}$ obtenue à l'étirage et la longueur nominale demandée par le client.

λ rapport entre la plus petite longueur acceptée par le client et la longueur nominale demandée ; nous désignerons ce paramètre par coefficient d'homogénéité de la livraison.

ν apparaît comme le nombre moyen de défauts par couronne de longueur $\mathcal{L}$: c'est un indice de qualité ou de difficulté d'obtention d'une section de tube déterminée.

En règle générale ν croît avec le rapport.

$$\frac{\text{diamètre extérieur du tube}}{\text{épaisseur du tube}}$$

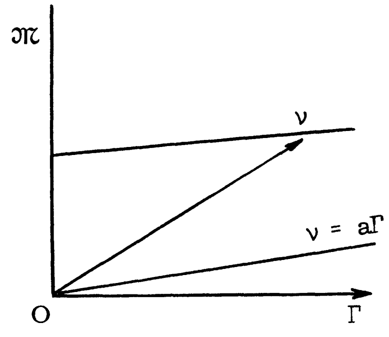
Alors

1) <u>Cas où on fait une mise à poids préalable de l'ébauché</u>

Alors :

$$\mathfrak{M} = \frac{e^{\frac{\nu\lambda}{\Gamma}}}{1 + \frac{\nu\lambda}{\Gamma}(1 - \lambda)}$$

Pour un coefficient d'homogénéité λ donné, la surface représentant $\mathfrak{M}$ en fonction de Γ et de ν est une surface réglée.



En effet dans le système d'axes représenté ci-dessus, les plans verticaux d'équation $\nu = a\Gamma$ coupent la surface $\mathfrak{M}$ suivant une droite perpendiculaire à l'axe $o\mathfrak{M}$ (axe qui est la ligne de striction de la surface réglée).

Bien entendu, dans le problème posé, seule nous intéresse la portion de cette surface située à droite du plan $\Gamma = 1$ dans la région où $\nu > o$.

Si nous posons $\frac{\nu\lambda}{\Gamma} = x$

$$\mathfrak{M} = \frac{e^{x}}{1 + x(1 - \lambda)}$$

Il est facile de voir sous cette forme que $\mathfrak{M}$ est une fonction croissante de ν et une fonction décroissante de Γ.

2) <u>Cas général où il n'y a pas de mise à poids préalable</u>

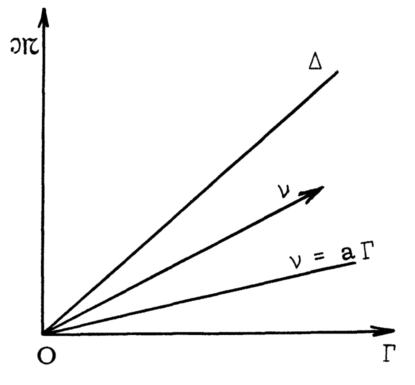
Suivant les valeurs de λ et de Γ, $\mathfrak{M}$ est donné par une des deux formules (26) ou (28).

Il est à noter que pour un coefficient d'homogénéité λ donné tel que $\lambda < \Gamma - n$, la surface représentant $\mathfrak{M}$ en fonction de ν et de Γ est un cône.

En effet, si $\lambda < \Gamma - n$

$$\mathfrak{M} = \frac{\Gamma}{n} \frac{e^{\frac{\nu\lambda}{\Gamma}}}{1 + \frac{\lambda\nu}{\Gamma}(1 - \lambda)}$$

Le plan $\nu = a\Gamma$ coupe la surface $\mathfrak{M}$ suivant la droite Δ passant par l'origine et contenue dans le plan d'équation :



$$\mathcal{M} = \frac{\Gamma}{n} \frac{e^{a\lambda}}{1 + \lambda a(1 - \lambda)}$$

Dans chaque intervalle n, n + λ, $\mathcal{M}$ est un fragment de cône.

a) Continuité de la fonction $\mathcal{M}$ pour les valeurs entières de Γ.

Si $\Gamma = n + 1$ nous devons appliquer la formule (26)

$$\mathcal{M} = \frac{e^{\frac{\nu\lambda}{n+1}}}{1 + \frac{(1 - \lambda)\lambda\nu}{n + 1}}$$

Par contre lorsque Γ tend vers n + 1 par valeurs inférieures, à partir du moment où $n + \lambda < \Gamma < n + 1$ nous devons appliquer la formule (28), et

$$\text{limite de } \mathcal{M} \text{ quand } \Gamma \longrightarrow n + 1 = \frac{e^{\frac{\nu\lambda}{n+1}}}{1 + \frac{\nu\lambda(1 - \lambda)}{n + 1}}$$

La fonction $\mathcal{M}(\nu, \Gamma, \lambda)$ est donc continue pour Γ entier.

b) Discontinuités de la fonction mise en œuvre

Il est de même facile de voir que

$$\mathcal{M}_{\Gamma = n+\lambda} < \text{limite de } \mathcal{M} \text{ quand } \Gamma \longrightarrow n + \lambda \text{ par valeurs inférieures}$$

Les discontinuités de $\mathcal{M}$ pour les valeurs de $\Gamma = n + \lambda$ ne font que traduire l'utilisation possible de la "chute" de longueur $\mathcal{L}\left(1 - \frac{n}{\Gamma}\right)$.

c) Variations de la fonction mise en œuvre $\mathcal{M}$ dans l'intervalle $n \leqslant \Gamma < n + 1$

Nous supposerons que le coefficient d'homogénéité λ a une valeur bien déterminée.

Dans l'intervalle $n \leqslant \Gamma < n + \lambda$ on vérifie sans peine que $\mathcal{M}$ aura un minimum pour les valeurs de ν telles que

$$\frac{2n}{\lambda(1+\sqrt{5-4\lambda})} \leqslant \nu < \frac{2(n+\lambda)}{\lambda(1+\sqrt{5-4\lambda})}$$

Si $\nu < \frac{2n}{\lambda(1+\sqrt{5-4\lambda})}$, la fonction $\mathcal{M}(\Gamma)$ est décroissante dans l'intervalle n, $n + \lambda$: la chute systématique $\mathcal{L}\left(1 - \frac{n}{\Gamma}\right)$ est plus importante que les chutes dues aux défauts.

Si par contre $$\nu > \frac{2(n+\lambda)}{\lambda(1+\sqrt{5-4\lambda})}$$

la fonction $\mathcal{M}(\Gamma)$ est croissante dans l'intervalle n, $n + \lambda$. Les chutes dues aux défauts sont plus importantes que la chute systématique.

Dans l'intervalle $n + \lambda \leqslant \Gamma < n + 1$ on peut voir que $\mathcal{M}$ est une fonction décroissante de Γ.

d) Evolution générale de la fonction $\mathcal{M}$

Plaçons nous dans le cas où $\Gamma = n$

$$\mathcal{M} = \frac{e^{\frac{\nu\lambda}{n}}}{1 + \lambda \frac{(1-\lambda)}{n} \nu}$$

$\mathcal{M}$ est une fonction décroissante de n.

X - REPARTITION DES LONGUEURS DE LIVRAISON DANS LE CAS DU DECOUPAGE A PRIORI -

Considérons une section de tubes bien déterminée, ν et $\Gamma = \frac{\mathcal{L}}{1}$ étant fixes.

Les longueurs moyennes utilisables par couronne de longueur maximale $\mathcal{L}$ seront données suivant la valeur de λ par la formule (25) ou la formule (27).

Les variations de la longueur moyenne utilisable $\mathcal{U}$ en fonction de λ nous indiquent la répartition moyenne des longueurs de livraison.

Dans tous les cas $\mathcal{U}$ est une fonction décroissante de λ, et également une fonction décroissante de ν.

Par ailleurs, on peut voir facilement que

$$\mathcal{U}_{\lambda=\Gamma-n} > \text{limite } \mathcal{U}_{\lambda\to\Gamma-n \text{ par valeurs supérieures}}$$

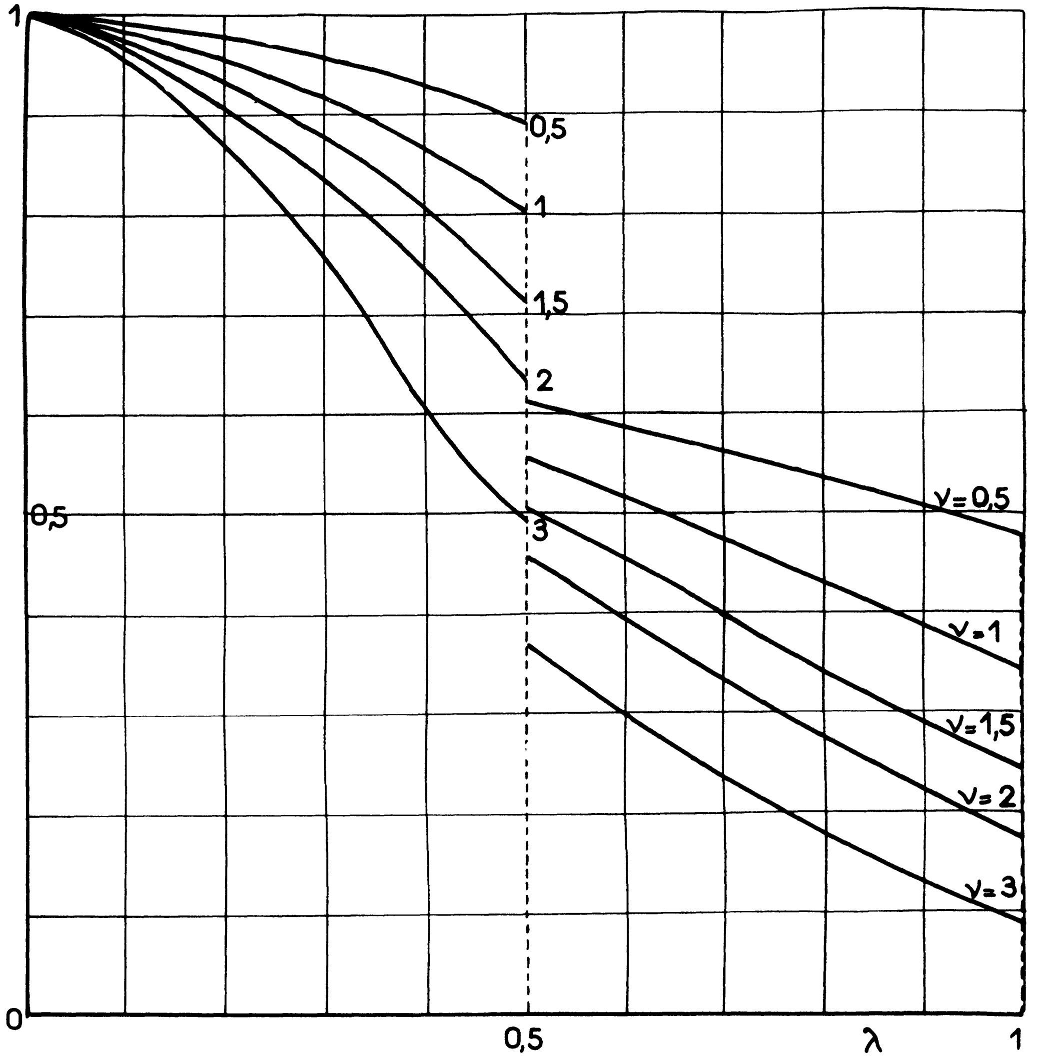
On en déduit la forme des courbes représentant $\mathcal{U}(\lambda)$. (Le graphique 1 représente $\mathcal{U}(\lambda)$ pour $\Gamma = 1,5$ et pour quelques valeurs de ν).

Si un client accepte les tubes en couronnes de longueur comprise entre $\lambda_0 l$ et 1, la proportion moyenne en poids de couronnes de longueur 1 dans la livraison sera :

$$\frac{\mathcal{U}(1)}{\mathcal{U}(\lambda_0)} = \frac{\mathcal{L} n e^{-\frac{\nu}{\Gamma}}}{\Gamma \mathcal{U}(\lambda_0)}$$

La proportion moyenne en poids, de couronnes de longueurs comprises entre $\lambda_1 l$ et $\lambda_2 l$ (avec $\lambda_0 < \lambda_1 < \lambda_2$) sera

$$\frac{\mathcal{U}(\lambda_1) - \mathcal{U}(\lambda_2)}{\mathcal{U}(\lambda_0)}$$



Graphique 1 Variations de $\frac{\mathcal{U}(\lambda)}{\mathcal{L}}$ pour $\Gamma = 1,5$

XI - LONGUEUR MOYENNE DE LIVRAISON DANS LE CAS DU DECOUPAGE A PRIORI

Les formules (25) et (27) donnent la longueur moyenne utilisable $\mathcal{M}$ des couronnes de longueurs $\mathcal{L}$ dans le cas du découpage a priori.

Déterminons le nombre moyen $\mathcal{R}$ de couronnes de longueurs comprises entre λl et l, obtenues à partir d'une couronne $\mathcal{L}$ dans le cas du découpage a priori.

Opérons comme pour la détermination de la longueur moyenne utilisable.

D'après (2) le nombre moyen de segments de longueur supérieure à λl situés sur un tube de longueur l ayant α défauts accidentels est

$$(\alpha + 1)(1 - \lambda)^{\alpha}$$

Deux cas sont à considérer

1) $\lambda > \Gamma - n$

Le nombre moyen de couronnes de longueurs comprises entre λl et l par couronne de longueur   est :

$$\mathcal{R} = n \sum_{\alpha=0}^{\infty} \frac{e^{-\frac{\nu}{\Gamma}} \left(\frac{\nu}{\Gamma}\right)^{\alpha}}{\alpha !} (\alpha + 1)(1 - \lambda)^{\alpha} \tag{30}$$

Soit

$$\boxed{\mathcal{R} = n e^{-\frac{\nu\lambda}{\Gamma}} \left[1 + \frac{\nu}{\Gamma}(1 - \lambda)\right]} \tag{31}$$

2) Pour $\lambda < \Gamma - n$

Il faut tenir compte des couronnes provenant de la "chute systématique" de longueur $\mathcal{L}\left(1 - \frac{n}{\Gamma}\right)$.

Nous pouvons utiliser la formule (31) et considérer la "chute" comme une couronne de grande longueur, à condition de remplacer ν par

$$\nu' = \nu\left(1 - \frac{n}{\Gamma}\right)$$

et λ par

$$\lambda' = \frac{\lambda l}{\mathcal{L}\left(1 - \frac{n}{\Gamma}\right)} = \frac{\lambda}{\Gamma - n}$$

et Γ par $\Gamma' = n' = 1$.

Le nombre moyen de couronnes de longueurs supérieures à λl provenant de la "chute" est alors

$$\mathcal{R}' = e^{-\frac{\nu\lambda}{\Gamma}} \left[1 + \nu\left(1 - \frac{n + \lambda}{\Gamma}\right)\right] \tag{32}$$

Le nombre moyen total de couronnes de longueurs comprises entre λl et l est égal alors à

$$\mathcal{R} + \mathcal{R}'$$

soit

$$\boxed{e^{-\frac{\nu\lambda}{\Gamma}}\left[(n+1)\left(1 - \frac{\nu\lambda}{\Gamma}\right) + \nu\right]} \qquad (33)$$

La longueur moyenne de livraison est le rapport entre la longueur moyenne utilisable $\mathcal{U}$ et le nombre moyen de couronnes $\mathcal{R}$:

$$l_{moy.} = \frac{\mathcal{U}(\lambda)}{\mathcal{R}(\lambda)}$$

Si $\lambda > \Gamma - n$

$$\boxed{l_{moy.} = \frac{\mathcal{L}}{\Gamma} \frac{1 + \lambda(1-\lambda)\frac{\nu}{\Gamma}}{1 + (1-\lambda)\frac{\nu}{\Gamma}}} \qquad (34)$$

Si $\lambda \leqslant \Gamma - n$

$$\boxed{l_{moy.} = \frac{\mathcal{L}}{n+1} \frac{1 + \frac{\nu\lambda}{\Gamma}\left(1 - \frac{n+1}{\Gamma}\lambda\right)}{1 + \frac{\nu}{n+1}\left(1 - \frac{n+1}{\Gamma}\lambda\right)}} \qquad (35)$$

On vérifie aisément que, quelle que soit la valeur de λ entre 0 et 1, $l_{moy.}$ est une fonction croissante de λ et une fonction décroissante de ν.

Il est intuitif et facile à vérifier que $l_{moy.}$ présente une discontinuité pour $\lambda = \Gamma - n$.

La limite de $l_{moy.}$ lorsque λ tend vers $\Gamma - n$ par valeurs supérieures est plus grande que la valeur de $l_{moy.}$ pour $\lambda = \Gamma - n$.

Les variations de $l_{moy.}$ en fonction de λ sont représentées par le graphique 2.

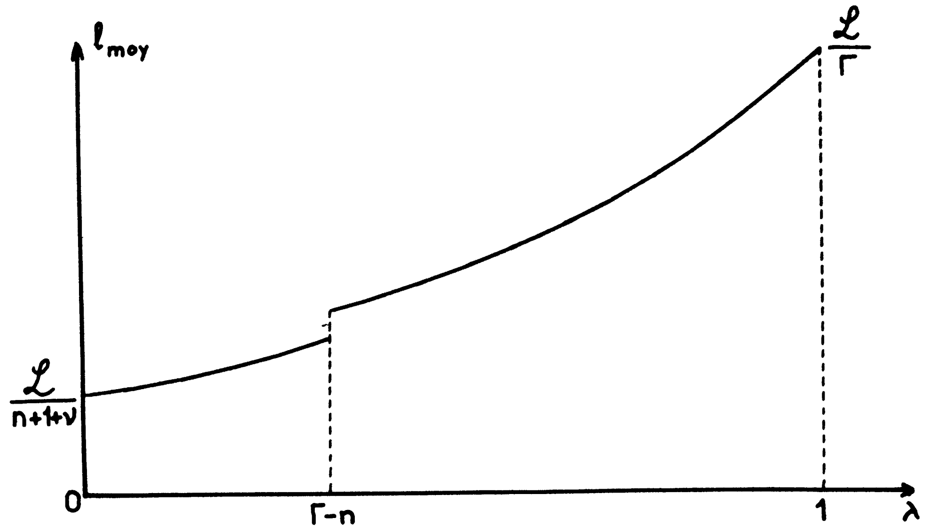
Lorsque λ tend vers zéro, $l_{moy.}$ tend vers $\frac{\mathcal{L}}{n+1+\nu}$, résultat intuitif.

Pour λ et Γ donnés, les variations de $l_{moy.}$ en fonction de ν sont représentées par un arc d'hyperbole.

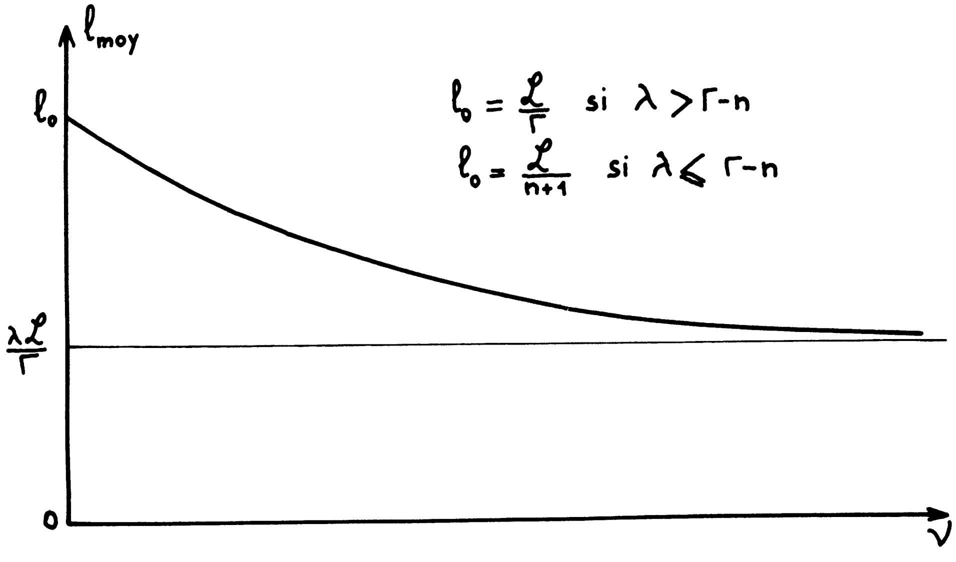
Les variations de la longueur moyenne de livraison $l_{moy.}$ en fonction de ν sont représentées sur le graphique 3.

XII - COMPARAISON ENTRE LES DIVERS MODES DE DECOUPAGE -

Il est intuitif et facile à vérifier dans chaque cas, que si nous considérons les couronnes de longueur $\mathcal{L}$ ayant α défauts accidentels, et que nous



Graphique 2 Variations de la longueur moyenne de livraison l_{moy} en fonction du coefficient d'homogénéité λ



Graphique 3 Variations de la longueur moyenne de livraison l_{moy} en fonction de ν

voulions découper à partir de ces couronnes des segments de longueur comprise entre λl et l, la longueur moyenne utilisable $\mathcal{V}$ sera croissante dans l'ordre découpage a priori, découpage rationnel pratique, découpage rationnel.

Il en est de même évidemment pour l'ensemble des couronnes de longueur $\mathcal{L}$ ayant en moyenne ν défauts accidentels par couronne.

Cependant, l'intérêt du découpage rationnel ou du découpage rationnel pratique diminue si l'indice de qualité ν diminue, ou si $\Gamma = \frac{\mathcal{L}}{l}$ augmente, ou si la tolérance sur longueur de livraison augmente (c'est-à-dire si λ diminue).

Tableau I

Valeur du rapport $\frac{\mathcal{V}_\alpha}{\mathcal{L}}$ pour les différents modes de découpage dans le cas où $\Gamma = 3$.

α	Mode de découpage \ λ	I	0,95	0,90	0,80	0,50	0,30	0,20	0,10
1	DR	0,667	0,729	0,784	0,871	0,972	0,990	0,996	0,999
	DRP	0,667	0,699	0,730	0,787	0,917	0,970	0,987	0,997
	DP	0,667	0,699	0,730	0,787	0,917	0,970	0,987	0,997
2	DR	0,556	0,622	0,651	0,748	0,926	0,972	0,987	0,997
	DRP	0,556	0,589	0,622	0,687	0,861	0,946	0,975	0,994
	DP	0,444	0,488	0,532	0,616	0,778	0,924	0,967	0,992
3	DR	0,444	0,497	0,537	0,635	0,868	0,948	0,976	0,994
	DRP	0,444	0,482	0,519	0,594	0,808	0,922	0,963	0,990
	DP	0,296	0,341	0,388	0,480	0,752	0,899	0,952	0,987
4	DR	0,350	0,392	0,437	0,521	0,804	0,919	0,961	0,990
	DRP	0,350	0,387	0,426	0,506	0,752	0,895	0,949	0,986
	DP	0,198	0,238	0,281	0,373	0,675	0,860	0,932	0,982
5	DR	0,272	0,310	0,352	0,443	0,737	0,886	0,944	0,985
	DRP	0,272	0,308	0,345	0,426	0,695	0,866	0,934	0,982
	DP	0,132	0,166	0,204	0,289	0,599	0,809	0,895	0,956

α = Nombre de défauts accidentels sur une couronne de longueur $\mathcal{L}$.
DR = Découpage rationnel.
DRP = Découpage rationnel pratique.
DP = Découpage a priori.

Le gain apporté par les découpages rationnels peut n'être pas suffisant pour justifier une installation permettant le contrôle avant découpage.

Les tableaux I, II et III indiquent pour certaines valeurs du rapport $\Gamma = \frac{\mathcal{L}}{1}$ et du coefficient d'homogénéité λ, la valeur du rapport $\frac{\mathcal{V}_a}{\mathcal{L}}$

Ces tableaux peuvent servir à comparer rapidement les divers modes de découpage dans quelques cas particuliers, et à estimer l'intérêt d'un chantier adapté aux découpages rationnels.

Tableau II

Valeur du rapport $\frac{\mathcal{V}_a}{\mathcal{L}}$ pour les différents modes de découpage pour un coefficient d'homogénéité λ = 0,95

α	Mode de découpage \ Γ	4	5	6	7	8
1	DR	0,808	0,855	0,885	0,907	0,923
	DRP	0,774	0,820	0,850	0,871	0,887
	DP	0,774	0,820	0,850	0,871	0,887
2	DR	0,704	0,768	0,812	0,843	0,872
	DRP	0,684	0,744	0,784	0,814	0,836
	DP	0,600	0,672	0,722	0,759	0,787
3	DR	0,610	0,707	0,742	0,782	0,813
	DRP	0,595	0,669	0,720	0,757	0,786
	DP	0,464	0,550	0,613	0,661	0,698
4	DR	0,524	0,613	0,677	0,725	0,761
	DRP	0,514	0,598	0,658	0,703	0,737
	DP	0,359	0,451	0,521	0,576	0,614
5	DR	0,459	0,545	0,616	0,670	0,711
	DRP	0,441	0,533	0,601	0,651	0,690
	DP	0,278	0,369	0,442	0,501	0,549

α = Nombre de défauts accidentels sur une couronne de longueur $\mathcal{L}$.
DR = Découpage rationnel.
DRP = Découpage rationnel pratique.
DP = Découpage a priori.

Tableau III

Valeur du rapport $\frac{\mathcal{V}_a}{\mathcal{L}}$ pour les différents modes de découpage pour un coefficient d'homogénéité λ = 0,90

α	Mode découpage Γ	4	5	6	7	8
	DR	0,856	0,898	0,925	0,943	0,956
1	DRP	0,798	0,838	0,865	0,884	0,899
	DP	0,798	0,838	0,865	0,884	0,899
	DR	0,752	0,814	0,855	0,884	0,906
2	DRP	0,711	0,767	0,804	0,831	0,852
	DP	0,636	0,702	0,748	0,782	0,808
	DR	0,657	0,735	0,788	0,827	0,855
3	DRP	0,628	0,697	0,744	0,779	0,805
	DP	0,505	0,588	0,647	0,691	0,726
	DR	0,571	0,661	0,724	0,770	0,806
4	DRP	0,549	0,630	0,687	0,728	0,760
	DP	0,403	0,492	0,559	0,611	0,652
	DR	0,493	0,592	0,663	0,716	0,757
5	DRP	0,478	0,568	0,632	0,680	0,716
	DP	0,320	0,411	0,483	0,540	0,586

α = Nombre de défauts accidentels sur une couronne de longueur $\mathcal{L}$.
DR = Découpage rationnel.
DRP = Découpage rationnel pratique.
DP = Découpage a priori.

Ainsi supposons qu'un tube de section donnée soit obtenu en longueurs maximales $\mathcal{L}$ = 210 m. Nous voulons le découper en longueurs de 70 m avec un coefficient d'homogénéité de 0,80 ; c'est-à-dire que nous livrerons des tubes de longueur comprise entre 56 m et 70 m.

Pour la section de tube considérée, les résultats de contrôle donnent par exemple un indice de qualité ν = 0,80.

La loi de Poisson de moyenne 0,80 correspond approximativement aux fréquences suivantes :

Nombre α de défauts pour tube de longueur $\mathcal{L}$	Fréquence d'apparition
0	44,9 %
1	35,9 %
2	14,4 %
3	3,8 %
4	0,8 %
5	0,2 %

Le tableau I permet de déterminer la longueur moyenne utilisable pour l'ensemble des longueurs $\mathcal{L}$ dans les différents modes de découpage.

Ainsi dans le cas présent :

Mode de découpage	Longueur moy. utilisable	Mise en œuvre moy.
Découpage rationnel	0,8986 $\mathcal{L}$ = 188,7 m	111,3 %
Découpage rationnel pratique	0,8579 $\mathcal{L}$ = 180,2 m	116,6 %
Découpage à priori	0,8420 $\mathcal{L}$ = 176,8 m	118,7 %

La comparaison des mises en œuvre moyennes permet d'estimer si le gain procuré par les découpages rationnels est suffisant pour justifier l'installation d'un chantier spécial. En règle très générale le découpage a priori est le mode de découpage le plus répandu, sinon le seul utilisé.

XIII - UTILITE DES FORMULES DU DECOUPAGE A PRIORI -

D'application facile, les formules du découpage a priori permettent de déterminer, d'une part les quantités de tubes à lancer en fabrication compte tenu des exigences de la clientèle, d'autre part les plus-values à appliquer par rapport aux prix des tubes de longueur tout-venant.

Dans la majorité des cas, la détermination de la mise en œuvre totale se fait aisément à partir de la connaissance de la fonction mise en œuvre partielle $\mathcal{M}(\nu, \Gamma, \lambda)$.

Les résultats de contrôle de tubes ont permis d'établir un abaque indiquant, en fonction du diamètre et de l'épaisseur du tube l'indice de qualité ν.

Un client commande par exemple, des tubes correspondant à un indice de qualité $\nu = 0,7$ et à une longueur maximale $\mathcal{L} = 200$ m. Il demande ces tubes en longueur de 165 m, la tolérance sur la longueur étant de 5 % en moins.

Or, le prix de revient standard des tubes de cette section a été établi pour des longueurs normales de livraison de 15 à 20 m (soit pour $\Gamma = 10$ et $\lambda = 0,75$).

Pour ces longueurs normales de livraison, l'application de la formule (26) donne une mise en œuvre moyenne $\mathcal{M}$, de 104 % par rapport au tube en couronne de longueur $\mathcal{L} = 200$ m.

Alors que pour les longueurs demandées par le client (correspondant à $\Gamma = \frac{200}{165} \simeq 1,212$ et $\lambda = 0,95$) l'application de la formule (26) conduit à une mise en œuvre $\mathfrak{M}_2 \simeq 204,2$ % par rapport au tube en couronne de longueur $\mathcal{L} = 200$ m.

La comparaison des mises en œuvre $\mathfrak{M}_1$ et $\mathfrak{M}_2$ permet de déterminer le prix de revient des tubes en longueur de 165 m à partir du prix de revient standard des tubes de longueur normale de livraison (15 à 20 mètres). La détermination de la mise en œuvre $\mathfrak{M}$ est parfois plus délicate ; nous allons étudier deux cas pouvant se rencontrer en pratique :

1) Le client commande des tubes (correspondant à l'indice de qualité ν et à la longueur maximale $\mathcal{L}$) en couronnes de longueur l (avec un coefficient d'homogénéité λ)

Toutefois, il est disposé à accepter une certaine fraction f du tonnage total de la livraison en couronnes de longueur supérieure à l', avec

$$\frac{l'}{l} = \lambda', \ (\lambda' < \lambda)$$

D'après le paragraphe (10) la proportion moyenne de couronnes de longueurs comprises entre $\lambda' l$ et λl issues de la fabrication est :

$$\frac{\mathfrak{U}(\nu, \Gamma, \lambda') - \mathfrak{U}(\nu, \Gamma, \lambda)}{\mathfrak{U}(\nu, \Gamma, \lambda')} = 1 - \frac{\mathfrak{M}(\nu, \Gamma, \lambda')}{\mathfrak{M}(\nu, \Gamma, \lambda)}$$

Deux cas sont alors à considérer :

a) ou bien

$$1 - \frac{\mathfrak{M}(\nu, \Gamma, \lambda')}{\mathfrak{M}(\nu, \Gamma, \lambda)} \leqslant f$$

En mettant toutes les couronnes de longueur supérieure à $\lambda' l = l'$ les conditions du client sont respectées.

La mise en œuvre partielle par rapport aux couronnes de longueur maximale est bien égale à $\mathfrak{M}(\nu, \Gamma, \lambda')$.

b) ou bien

$$1 - \mathfrak{M}\frac{(\nu, \Gamma, \lambda')}{(\nu, \Gamma, \lambda)} > f$$

On ne peut alors expédier au client qu'une partie des couronnes de longueur comprise entre $\lambda' l$ et λl ; le reste doit être considéré comme inutilisable.

En se limitant à la fraction tolérée, on voit facilement que la mise en œuvre partielle à prendre en considération est égale à

$$(1 - f)\,\mathfrak{M}(\nu, \Gamma, \lambda)$$

Reprenons l'exemple précédent : le client commande des tubes en couronnes de 165 m avec un coefficient d'homogénéité $\lambda = 0,95$.

Toutefois, il accepte de recevoir au maximum 20 % de la livraison en longueurs plus faibles, mais supérieures à 120 m.

Dans ces conditions,

$$\lambda' = \frac{120}{165} \simeq 0,73$$

et

$$\mathfrak{M}(\nu,\ \Gamma,\ \lambda') = 165,5\ \%$$

Alors

$$1 - \frac{\mathfrak{M}(\nu,\ \Gamma,\ \lambda')}{\mathfrak{M}(\nu,\ \Gamma\ \lambda)} \simeq 0,19$$

La proportion moyenne dans la fabrication de tubes de longueur inférieure à la longueur spécifiée (165 m, tolérance - 5 %) est inférieure aux 20 % acceptés par le client. La mise en œuvre partielle moyenne à prendre en considération pour la détermination du prix de revient prévisionnel est donc

$$\mathfrak{M}(\nu,\ \Gamma,\ \lambda') = 165,5\ \%$$

Si par contre, le client tolérait seulement 10 % de la livraison en tubes de longueur inférieure à 165 m 0,95 mais supérieure à 120 m, une partie des tubes acceptables serait à éliminer pour respecter la limite de 10 %.

La mise en œuvre partielle moyenne à envisager serait alors :

$$(1 - 0,10)\mathfrak{M}(\nu,\ \Gamma,\ \lambda) = 0,90 \times 204,2\ \% \simeq 183,8\ \%$$

2) Le client commande des tubes de longueur 1 (avec un coefficient d'homogénéité λ) avec possibilité de livrer des couronnes de longueurs sous-multiples

$$\frac{1}{p},\ \frac{2l}{p}\ \ldots,\ \frac{p-1}{p}\,l$$

p étant un nombre entier, (avec le même coefficient d'homogénéité λ).

Nous supposerons que les diverses zones de longueurs de livraison ne se recouvrent pas (graphique 4).

Les segments de longueurs comprises entre $\frac{\lambda il}{p}$ et $\frac{il}{p}$ sont entièrement utilisables.

Leur contribution à la longueur moyenne utilisable des couronnes $\mathcal{L}$ est

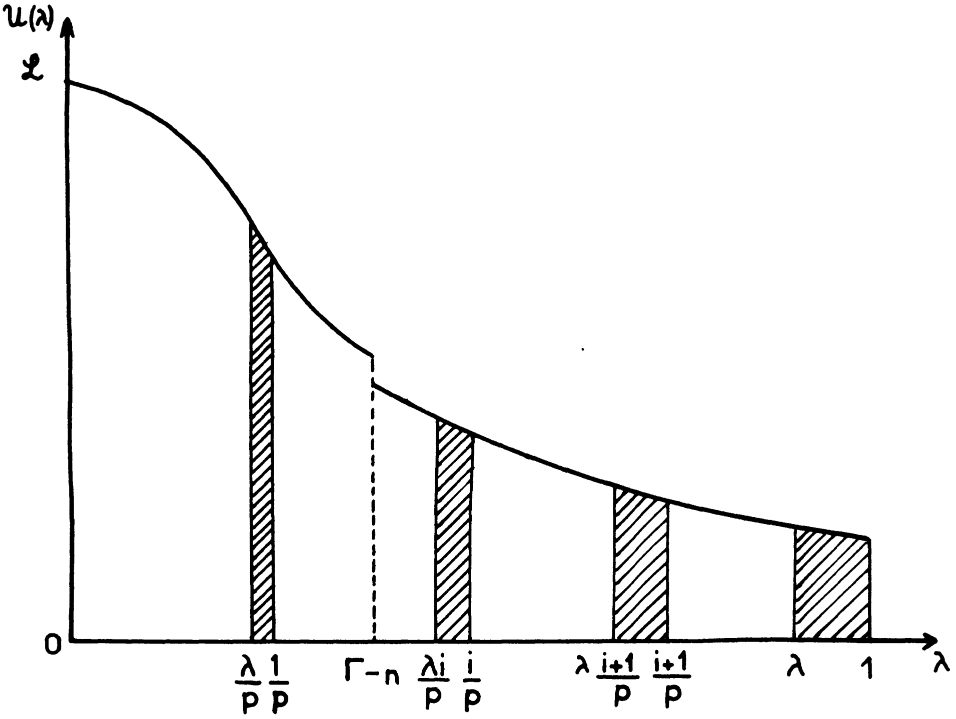
$$\mathcal{U}\left(\nu,\ \Gamma,\ \frac{\lambda i}{p}\right) - \mathcal{U}\left(\nu,\ \Gamma,\ \frac{i}{p}\right)$$

Soit, en notations abrégées, Γ et ν étant donnés

$$\mathcal{U}\left(\frac{\lambda i}{p}\right) - \mathcal{U}\left(\frac{i}{p}\right)$$

Par contre, les segments qui après contrôle ont une longueur comprise entre $\frac{il}{p}$ et $\lambda\ \frac{i+1}{p}$ 1 doivent être coupés à la longueur $\frac{il}{p}$ avant livraison.

Le nombre moyen de ces segments est



Graphique 4

$$\mathcal{R}\left(\frac{i}{p}\right) - \mathcal{R}\left(\frac{i+1}{p}\lambda\right)$$

$\mathcal{R}$ étant donné par les formules (31) ou (33).

Leur longueur moyenne utilisable est

$$\left[\mathcal{R}\left(\frac{i}{p}\right) - \mathcal{R}\left(\frac{i+1}{p}\lambda\right)\right]\frac{il}{p}$$

Au total, la longueur moyenne utilisable des couronnes de longueur est :

$$\frac{\mathcal{L}}{\Gamma}\left\{\sum_{i=1}^{i=p-1}\left[\mathcal{R}\left(\frac{i}{p}\right) - \mathcal{R}\left(\lambda\,\frac{i+1}{p}\right)\right]\frac{i}{p}\right\} + \sum_{i=1}^{i=p-1}\left[\mathcal{U}\left(\frac{\lambda i}{p}\right) - \mathcal{U}\left(\frac{i}{p}\right)\right] + \mathcal{U}(\lambda)$$

On en déduit la mise en œuvre moyenne à prendre en considération.

Reprenons toujours l'exemple initial en modifiant les exigences du client :

supposons que ce dernier commande des tubes de 165 m (avec un degré d'homogénéité $\lambda = 0,95$). Il accepte toutefois d'être livré en tubes de longueurs sous-multiples, par exemple : 55 m ou 110 m (avec le même degré d'homogénéité sur ces longueurs sous-multiples).

L'application de la méthode précédents conduit à une longueur moyenne utilisable de 142,2 m par couronne de longueur initiale 200 m, soit une mise en œuvre partielle moyenne de 140,6 %.

Nous tenons à remercier Monsieur Pilé qui nous a suggéré la présentation particulièrement simple du paragraphe (5).