

# REVUE DE STATISTIQUE APPLIQUÉE

P. FERIGNAC

## **Cartes de contrôle par cumul des observations**

*Revue de statistique appliquée*, tome 11, n° 3 (1963), p. 5-39

[http://www.numdam.org/item?id=RSA\\_1963\\_\\_11\\_3\\_5\\_0](http://www.numdam.org/item?id=RSA_1963__11_3_5_0)

© Société française de statistique, 1963, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « *Revue de statistique appliquée* » (<http://www.sfds.asso.fr/publicat/rsa.htm>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

*Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques*  
<http://www.numdam.org/>

# CARTES DE CONTROLE PAR CUMUL DES OBSERVATIONS

P. FERIGNAC

Statisticien

## 1 - INTRODUCTION -

1.1 - La carte de contrôle de Shewart est utilisée principalement dans les contrôles en cours de fabrication. Elle fournit une règle d'action objective avec une efficacité qu'il est facile de calculer. Les échantillons successifs sont indépendants et, de ce fait, un dérèglement survenant à un instant donné est décelé avec la même probabilité quel que soit le rang de l'échantillon, postérieur à l'apparition du dérèglement. La carte de contrôle ne tient donc pas compte des observations qui précèdent chaque prélèvement.

Plusieurs auteurs ont cherché à améliorer l'efficacité des cartes de contrôle classiques en mettant sous contrôle une fonction des  $n$  dernières valeurs observées. On a proposé, en particulier, la moyenne géométrique mobile pondérée mais la fonction la plus simple, celle qui a donné lieu aux développements les plus importants, est la somme des observations.

1.2 - La  $i$ ème mesure de la caractéristique  $X$  étant représentée par  $x_i$ , et sa moyenne par  $\mu$ , on contrôle  $S_m = \sum_{i=1}^m (x_i - \mu)$ .

Remarquons que  $x_i$  peut être une mesure faite sur un article ou la moyenne des mesures effectuées sur un échantillon d'effectif  $n$ , ou une variable aléatoire prenant les valeurs 0 ou 1 selon qu'un article est bon ou défectueux. Nous étudierons par la suite les diverses cartes de contrôle  $S_m$  classées selon les lois de distribution usuelles qui gouvernent  $x_i$ .

Lorsque la fabrication est bien réglée sur la valeur nominale  $\mu$  de  $X$  on a :  $E(S_m) = 0$ .

Supposons qu'à un instant donné la machine subisse un dérèglement permanent  $\Delta\mu$  on a alors, à partir de cet instant :

$$E(S_m) = m \cdot \Delta\mu$$

Nous voyons donc que si l'on traduit les données recueillies sur un graphique en portant les points  $M$  d'abscisse  $m$  et d'ordonnée  $S_m$  ils auront :

- avant le dérèglement une répartition aléatoire autour de la droite  $S_m = 0$

- après le dérèglement une répartition aléatoire autour de la droite  $S_m = m \cdot \Delta\mu$

Dans ce dernier cas,  $E(S_m)$  est une fonction linéaire croissante ou décroissante de  $m$ , selon le signe de  $\Delta\mu$ , et sa pente est une estimation du dérèglement  $\Delta\mu$ .

Quelques propriétés essentielles distinguent donc la carte de contrôle de Shewart de la carte de contrôle des sommes, dans cette dernière :

- 1/ le dérèglement est cumulé à partir de son apparition,
- 2/ l'apparition du dérèglement peut être située par l'abscisse du point  $M$  à partir duquel la moyenne de  $S_m$  cesse d'être horizontale,
- 3/ le dérèglement peut être estimé pour l'ajustement d'une droite aux dernières observations.

*La propriété la plus importante est le cumul du dérèglement  $\Delta\mu$  qui a pour conséquence un accroissement de l'efficacité des cartes de contrôle des sommes par rapport aux cartes de contrôle habituelles.*

Revenons sur l'hypothèse de la discontinuité du réglage qui se traduit par l'apparition soudaine d'un saut  $\Delta\mu$ . L'expérience montre que souvent cette hypothèse est vérifiée. Ce sera le cas du changement de lot de matière première, du changement d'ouvrier, d'une variation brusque dans le dosage des ingrédients d'un processus chimique...

Dans de nombreux cas, cette hypothèse n'est pas vérifiée. En effet, le plus souvent, le point de réglage se déplace lentement sous l'effet d'une cause continue telle que l'usure de l'outil, le desserage de boulons, ... Alors,  $\Delta\mu$  est une fonction monotone et croissante du temps soit  $\Delta\mu(t)$ . A un instant  $\Delta\mu(t)$  sera supérieure à une valeur  $\Delta\mu$  qu'on juge ne pas devoir tolérer. C'est cette valeur que nous considérerons dans la théorie des cartes de contrôle des sommes. Un accroissement  $\Delta\mu(t) > \Delta\mu$  se traduira par un accroissement de  $S_m$  supérieur à l'accroissement correspondant de la forme linéaire que nous avons envisagée,  $S_m = m \cdot \Delta\mu$ , et nous conduira à une estimation minorée du dérèglement qui sera signalé plus tôt que s'il était constant.

L'hypothèse de la discontinuité étant vérifiée ou, au pis aller, n'ayant pas d'inconvénient majeur sera conservée par la suite.

### 1.3 - Exemple numérique.

Nous empruntons à R. A. Freund [2]<sup>(1)</sup> l'exemple numérique reproduit dans le tableau 1. On considère une population normale de moyenne  $\mu = 0$  et d'écart-type  $\sigma = 2$  dans laquelle on prélève des échantillons de 4 pièces, une par une en remettant la pièce après chaque mesure. Dans la seconde colonne on porte les moyennes  $\bar{x}_i$ . Les 10 premiers échantillons suivent une loi normale  $N(0 ; 1)$ . A partir du 11ème échantillon, on introduit un dérèglement de la moyenne  $\Delta\mu = 1,5$ , les échantillons 11 à 20 suivent une loi normale  $N(1,5 ; 1)$ . La troisième colonne donne les moyennes cumulées  $\Sigma(\bar{x}_i - \mu)$ , soit ici  $\Sigma(\bar{x}_i - 0)$ .

-----  
(1) Les chiffres entre crochets sont des renvois aux références citées à la fin de l'article.

Tableau I

Echantillon N°	Moyenne $\bar{x}_i$	$\Sigma(x_i - 0)$	Echantillon N°	Moyenne $\bar{x}_i$	$\Sigma(x_i - 0)$
1	1,6	1,6	11	0,4	0,1
2	0,4	2,0	12	2,1	2,2
3	-1,1	0,9	13	-0,2	2,0
4	-0,7	0,2	14	2,4	4,4
5	1,6	1,8	15	1,9	6,3
6	0,1	1,9	16	1,1	7,4
7	-1,4	0,5	17	-0,1	7,3
8	0,8	1,3	18	2,4	9,7
9	-0,2	1,1	19	2,9	12,6
10	-1,4	-0,3	20	1,4	14,0

Représentons les résultats du contrôle :

1/ sur une carte de contrôle des moyennes de Shewart avec limites de contrôle à  $\pm 3,09 \sigma_{\bar{x}}$  (figure 1).

2/ sur un graphique où nous portons les points ayant pour abscisse le rang  $m$  de l'échantillon et pour ordonnée la moyenne cumulée correspondante  $S_m$  (figure 2).

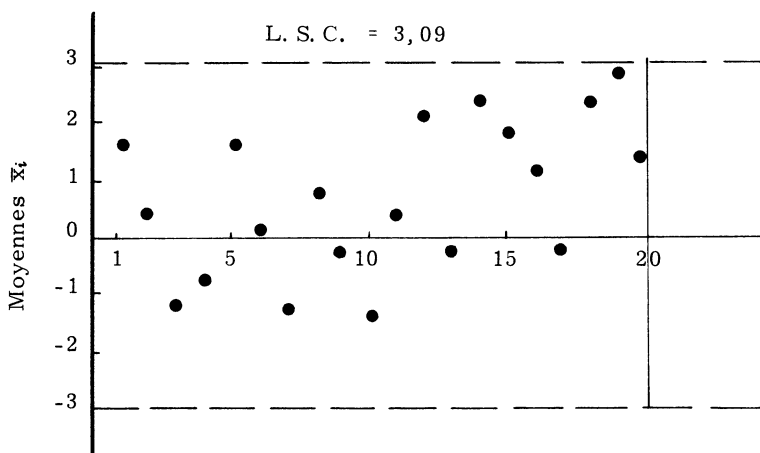


Figure 1 - Carte de contrôle des moyennes.

Nous constatons que si nous adoptons la règle d'action : régler la machine dès qu'un point sort des limites de contrôle de la carte des moyennes nous aurons laissé passer 10 échantillons provenant d'une machine dérégulée sans intervenir. Cet événement n'a rien d'exceptionnel : on a environ 6 chances sur 100 d'observer une moyenne de la population dérégulée au-dessus de la limite supérieure de contrôle et environ 54 chances sur 100 pour que, sur 10 moyennes consécutives, aucune ne signale que la machine est hors contrôle. On peut pallier le manque de

sensibilité de la carte des moyennes en ajoutant à la règle précédente d'autres consignes, par exemple régler si deux points consécutifs se situent entre les limites de contrôle et de surveillance.

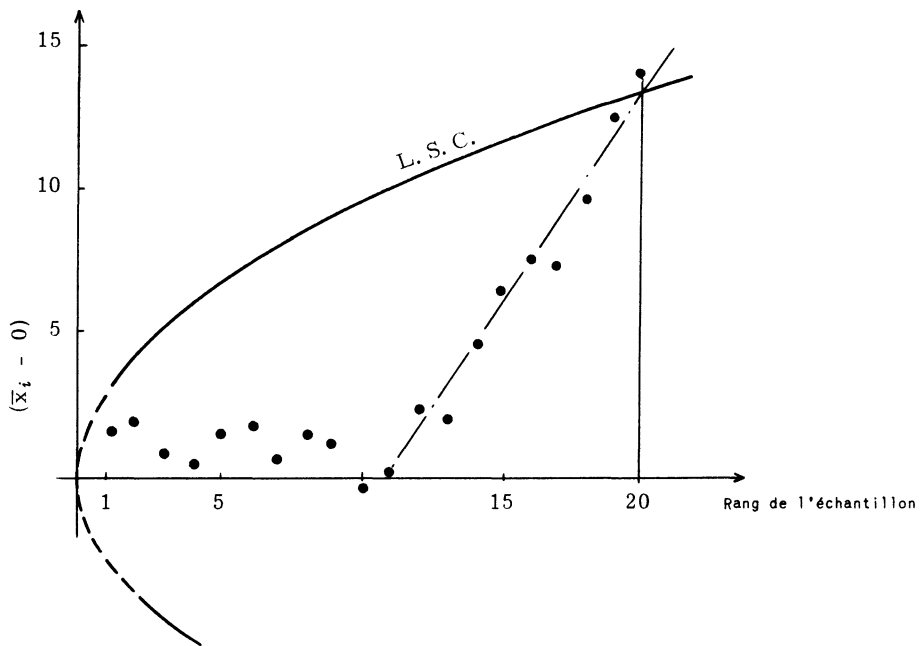


Figure 2 - Graphique des moyennes cumulées.

Si nous examinons le graphique des moyennes cumulées nous voyons que l'addition du dérèglement qui suit le 10ème échantillon se manifeste par la dispersion des points autour d'une droite. De la pente de cette droite on conclut que  $\Delta\mu$  est positif. Ajustons au jugé une droite aux 10 derniers points (figure 2). Sa pente, mesurée sur le graphique, environ 1,4, est une estimation du dérèglement qui fournit une indication pour la correction du processus. Le graphique indique en outre que le dérèglement se situe probablement entre le 11ème et le 12ème échantillon.

Ces simples constatations conduisent à penser que le contrôle des observations cumulées permet vraisemblablement de visualiser rapidement un dérèglement et d'estimer, au moins grossièrement, la date de son apparition et sa valeur.

Cependant ces résultats ne sont pas suffisants pour justifier une décision eu égard à des risques donnés à l'avance. Restent à fixer les règles rationnelles du contrôle de  $S_m$ , ce sujet a été abordé par de nombreux auteurs, cités en références, nous nous efforçons de rendre compte des principaux résultats de leurs travaux.

## 2 - LIMITES DE CONTROLE PARABOLIQUES -

2.1 - Distribution des sommes  $S_m$ . Les variables d'observation  $x_i$  étant supposées indépendantes nous admettrons que leur somme a une

distribution normale ou tout au moins telle qu'un intervalle de 3 écarts-types autour de la valeur centrale contienne environ 99 % des observations. Dans le cas d'une distribution de X poissonnienne ou binomiale, pour lesquelles l'approximation normale est sans valeur dans tout le domaine de la variable aléatoire, on constate que les limites de contrôle au seuil 0,998 diffèrent au plus de une unité des limites de contrôle à 3 écarts-types de la valeur centrale pour n (effectif de l'échantillon) variant de 10 à 100 et le pourcentage, p, de défectueux variant de 0,5 % à 20 %. L'approximation est donc suffisante dans la pratique du contrôle. Comme d'autre part, elle tend à resserrer les limites de contrôle, elle ne présente pas de danger quant au maintien de la qualité.

Si nous représentons par  $\sigma$  l'écart-type de X, l'écart-type sur  $S_m = \sum_{i=1}^m (x_i - \mu)$  est  $\sigma_{S_m} = \sigma \sqrt{m}$  et les limites de contrôle sont déterminées par les 2 branches de la parabole  $S_m = \pm 3\sigma \sqrt{m}$  ( $m \geq 1$ ).

2.2 - Carte de contrôle. On porte en abscisse le rang i de la variable X et en ordonnée  $S'_m = S_m/\sigma$ ; la parabole de contrôle d'équation  $S'_m = \pm 3\sqrt{m}$  est alors indépendante de  $\sigma$ ,  $S'_m$  est la somme cumulée de la variable réduite  $y_i = \frac{x_i - \mu}{\sigma}$ .

Reprenant les données du tableau 1, nous avons reporté sur la figure 2 les limites de contrôle paraboliques. Le 20ème échantillon est hors des limites de contrôle, nous avons dû aller jusqu'au 10ème échantillon avant que le dérèglement  $\Delta\mu = 1,5$  soit signalé. L'allure du graphique permettrait de suspecter plus tôt le dérèglement de la machine. La règle adoptée bien que, dans cet exemple, plus efficace que la carte de contrôle de la moyenne ne semble pas être d'une efficacité très satisfaisante.

2.3 - Efficacité. Pour juger de l'efficacité du contrôle nous considérons le délai moyen égal au nombre moyen d'échantillons à prélever avant qu'un point représentatif sorte des limites de contrôle. Par exemple, lorsque la machine ne subit aucun dérèglement, la probabilité de franchir l'une quelconque des limites de contrôle est 0,002; on peut traduire ceci en disant que le délai moyen est  $1/0,002 = 500$ . Tous les 500 échantillons en moyenne, le contrôle conclura à tort à un dérèglement de la machine.

Il est assez facile de calculer le délai moyen après dérèglement, le plus important puisqu'il nous permet d'estimer le nombre moyen de pièces défectueuses qui peuvent passer à travers les mailles du contrôle.

Considérons la variable réduite  $y$  ( $y = \frac{x - \mu}{\sigma}$ ) et mettons sous contrôle la somme  $S'_m$ . Nous admettrons que le contrôle commence sur une fabrication centrée sur la valeur nominale  $\mu$  [ $E(y) = 0$ ], qu'elle est stable durant k échantillons, puis qu'elle subit un dérèglement  $\Delta\mu$  (ce qui signifie que la variable d'observation, X, subit une translation  $\Delta\mu \times \sigma$ ) à partir du kième échantillon. Soit h le délai moyen après dérèglement, on a évidemment  $m = k + h$ . L'indication d'un dérèglement est donnée lorsque :

$$3\sqrt{k+h} \leq |S'_m|$$

ou, en moyenne, lorsque :

$$3\sqrt{k+h} = E(S'_m) = h \cdot \Delta\mu \quad (\Delta\mu \neq 0)$$

ou encore :

$$h^2 (\Delta\mu)^2 - 9h - 9k = 0$$

Si l'on ne considère que la racine positive, on a :

$$h = \frac{9 + 3\sqrt{9 + 4k(\Delta\mu)^2}}{2(\Delta\mu)^2} \quad (1)$$

La valeur de  $h$  dépend donc de  $k$  et de  $\Delta\mu$ .

Exemple numérique - D'après les données du tableau 1,  $\sigma = 1$ ,  $k = 10$ ,  $\Delta\mu = 1,5$ , on a  $h = 9$ , puisque  $h$  ne peut prendre que des valeurs entières.

Remarque - Si l'on admet que la distribution de  $S_m$  est symétrique, cette valeur de  $h$  est telle qu'on a une chance sur deux de déceler le dérèglement précisément dans le délai moyen calculé ci-dessus. Cette méthode ne nous fournit aucune indication sur la distribution du délai autour de sa moyenne.

La formule précédente montre que  $h$  croît avec  $k$  et, par conséquent, que le délai moyen après dérèglement est d'autant plus long qu'il suit une période plus longue de fonctionnement satisfaisant de la machine. En d'autres termes, l'efficacité du contrôle décroît lorsque  $k$  croît.

2.4 - Modification de la carte de contrôle des sommes. Le gros inconvénient de la carte de contrôle de  $S'_m$  que nous venons de décrire réside dans le fait que les conséquences d'un dérèglement sont atténuées par la série des échantillons de moyenne  $\mu$  qui le précèdent. On peut remédier à ce défaut : pour cela, il suffit de contrôler à rebours de la série chronologique des échantillons, c'est-à-dire, à partir du dernier point représentatif de la carte de contrôle.

En effet, on a :

$$S'_m - S'_{m-i} = y_m + y_{m-1} + \dots + y_{m-i+1} \quad (i \text{ termes})$$

L'écart-type de cette différence dans l'hypothèse que nous avons admise au début de cette étude est donc  $\sqrt{i}$ . Par conséquent, si nous plaçons le sommet de la parabole de contrôle de la figure 2 au dernier point du diagramme de contrôle, son axe parallèle à l'axe des abscisses et de sens opposé, tous les points du graphique doivent être situés avec une quasi certitude dans la région intérieure de cette parabole. Tout point situé sur la parabole ou dans la région extérieure est interprété comme un dérèglement de la machine.

La figure 3 représente la carte de contrôle modifiée par le compte à rebours des échantillons.

Nous constatons que la carte indique une fabrication hors contrôle dès le 15ème échantillon ou encore un délai de 5 échantillons après le dérèglement au lieu de 10 que nous avons observé avec la carte de contrôle de la figure 2, d'où, dans cet exemple, une efficacité largement accrue par l'adoption du dispositif rétrograde des limites de contrôle.

Le délai moyen  $h$  se déduit de la formule (1) dans laquelle il suffit de faire  $k = 0$ , on obtient alors :

$$h = \frac{9}{(\Delta\mu)^2} \quad (\Delta\mu \neq 0) \quad (2)$$

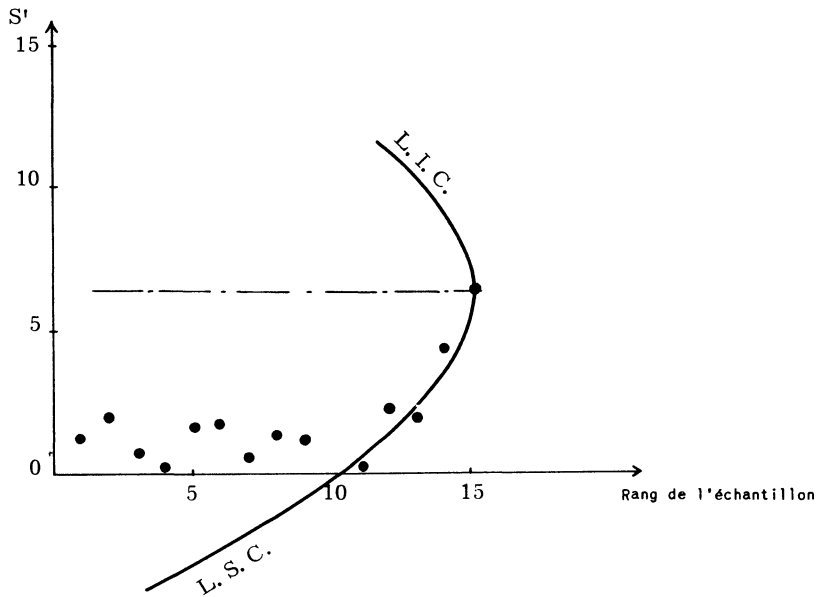


Figure 3 - Carte de contrôle des sommes de la variable réduite,  $S'$ .

Exemple numérique - Dans l'exemple donné dans le tableau 1, on a

$$h = \frac{9}{2,25} = 4$$

au lieu de 9 trouvé dans le cas de la carte de contrôle de sens direct.

Remarque - Les formules (1) et (2) nous conduisent au résultat absurde  $h = \infty$  si  $\Delta\mu = 0$ . Cela tient au fait que nous avons calculé la valeur moyenne de  $h$  sans prendre en considération la dispersion de  $S'_m$  autour de sa moyenne. Nous avons indiqué plus haut que si la distribution de  $S'_m$  était symétrique pour la valeur de  $h$  calculée  $S'_m$  sortira de la limite de confiance avec la probabilité 0,5.

Bien qu'il soit possible de simplifier l'application de la carte de contrôle à limites paraboliques que nous venons de décrire (en prenant  $\sigma$  comme unité sur l'axe des ordonnées et en reportant sur calque une parabole valable pour tous les cas) les auteurs qui ont introduit la carte de contrôle des sommes se sont orientés vers des limites rectilignes. La théorie mise en oeuvre fait appel à des notions plus avancées de statistique, nous exposons ci-dessous le résultat de leurs recherches.

### 3 - CARTE DE CONTROLE DES SOMMES A LIMITES DE CONTROLE RECTILIGNES EXPERIMENTALES -

G. A. Barnard propose d'adopter pour le contrôle bilatéral d'une variable aléatoire un cache en forme de V [1]. Il applique le cache sur le graphique des sommes cumulées de manière que sa bissectrice soit



parallèle à l'axe des abscisses, passe par le point figuratif de la  $m^{\text{e}}$  observation ( $m, S_m$ ) et que celui-ci soit à une distance  $d$  du sommet. Le demi-angle aigu formé par les branches du V est égal à  $\vartheta$  (voir figure 4).

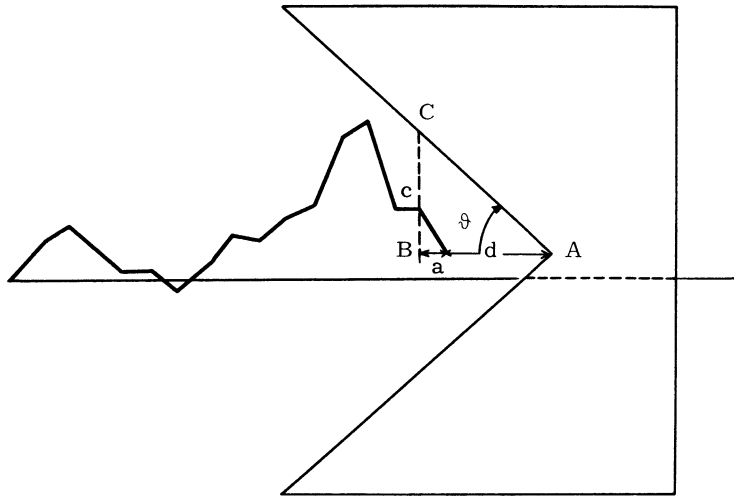


Figure 4 - Méthode graphique pour le contrôle des sommes  $S_m$ .

On poursuit sans réglage si le chemin des points figuratifs reste à l'intérieur de l'angle  $2\vartheta$ . Dès que ce chemin rencontre un des côtés du V on procède au réglage. On recommence le cumul des observations à partir du dernier réglage ; on obtient  $S_1, S_2, \dots, S_m \dots$  auxquelles s'applique à nouveau la règle précédente.

Nous retrouvons donc ici le contrôle dans le sens rétrograde des observations dont nous avons vu l'intérêt au § 2.4. La sévérité du contrôle dépend des 2 paramètres  $d$  et  $\vartheta$ . G. A. Barnard pense que l'expérience conduit à une bonne estimation de  $d$  et  $\vartheta$ . Il propose de suivre les sommes sur un graphique et d'ajuster les valeurs de  $d$  et  $\vartheta$  de manière qu'un dérèglement inadmissible soit rapidement décelé ("try and cut"). Toutefois, il suggère, afin d'abrégier les essais, de fixer un écart  $c$  entre la cote nominale,  $\mu$ , et une valeur de la variable observée,  $x$ , qu'on désire mettre en évidence rapidement on a alors, dans le triangle ABC de la figure 4 :

$$c = \rho (d + a) \operatorname{tg} \vartheta \quad (3)$$

où  $a$  est l'équidistance des points sur l'axe des abscisses, et  $\rho$  un facteur de correspondance d'échelle sur les 2 axes de coordonnées de manière à conserver l'angle  $\vartheta$  introduit par sa tangente.

La relation (3) étant vérifiée par  $d$  et  $\vartheta$ , le masque ne dépend alors que d'un seul paramètre, et le travail de mise au point peut être simplifié.

Cette méthode laisse une grande part à l'appréciation de l'expérimentateur et ne présente donc pas toutes les garanties d'objectivité qu'on désire trouver dans le contrôle de la qualité. Les travaux de N. L. Johnson et F. C. Leone, fondés sur des concepts rationnels, pallient cet

inconvéniént ; ils permettent de déterminer  $d$  et  $\vartheta$  dès qu'on se fixe, à l'avance, des risques acceptés. L'exposé de leur méthode est le but essentiel du présent article.

#### 4 - RAPPEL DE QUELQUES NOTIONS SUR LES TESTS D'HYPOTHESES PROGRESSIFS -

On se propose de juger, d'après un échantillon, laquelle des deux hypothèses  $H_0$  et  $H_1$  doit être retenue. Le choix est sujet à deux types d'erreur :

- erreur de 1ère espèce : accepter  $H_1$  quand  $H_0$  est vrai, représentons par  $\alpha$  la probabilité de cette éventualité ;

- erreur de 2ème espèce : accepter  $H_0$  quand  $H_1$  est vrai ; représentons par  $\beta$  la probabilité de cette éventualité.  $\alpha$  et  $\beta$  sont deux risques que nous fixons à l'avance et que nous sommes décidés à courir. Ils sont attachés à tous les raisonnements inductifs.

Soit un échantillon d'effectif  $m$ , la probabilité d'observer les valeurs échantillonnées  $x_1, x_2, \dots, x_m$  si  $H_0$  est vérifiée est :

$$\Pr(x_1, x_2, \dots, x_m / H_0) = L_{0m},$$

la probabilité d'observer ces valeurs si  $H_1$  est vérifiée est :

$$\Pr(x_1, x_2, \dots, x_m / H_1) = L_{1m}$$

$L_{0m}$  et  $L_{1m}$  sont les vraisemblances de l'échantillon prélevé dans les hypothèses respectives  $H_0$  et  $H_1$ .

Le rapport de vraisemblance  $H_1/H_0$  est :

$$\lambda = \frac{L_{1m}}{L_{0m}}$$

Compte tenu des risques  $\alpha$  et  $\beta$  définis plus haut, selon la théorie de A. Wald sur les tests progressifs, on peut aboutir à 3 conclusions :

- accepter  $H_0$  si  $\lambda < \frac{\beta}{1 - \alpha}$

- accepter  $H_1$  si  $\lambda \geq \frac{1 - \beta}{\alpha}$

- ne pas conclure et faire une observation supplémentaire si

$$\frac{\beta}{1 - \alpha} < \lambda < \frac{1 - \beta}{\alpha}$$

#### 5 - CARTE DE CONTROLE DE LA MOYENNE -

5.1 - Base théorique. On représente par  $x_i$  la moyenne des mesures pour le  $i$ ème échantillon, les échantillons sont de même effectif qui peut

être égal à un s'il s'agit d'observations individuelles. Nous conservons les notations du § 2 :

$$S_m = \sum_{i=1}^m (x_i - \mu)$$

$$y_i = \frac{x_i - \mu}{\sigma}$$

$$S'_m = \sum_{i=1}^m y_i$$

hypothèse  $H_0$  = la caractéristique  $x$  est centrée sur  $\mu$

hypothèse  $H_1$  = la caractéristique  $x$  est centrée sur  $\mu + \sigma \cdot \Delta\mu$

Admettant pour  $x$  une distribution normale d'écart-type  $\sigma$ , Johnson N. L., Leone F.C. calculent [4] et [5] :

$$L_{0m} = (2\pi)^{-\frac{m}{2}} e^{-\frac{1}{2} \sum_1^m y_i^2}$$

$$L_{1m} = (2\pi)^{-\frac{m}{2}} e^{-\frac{1}{2} \sum_1^m (y_i - \Delta\mu)^2}$$

d'où 
$$\lambda = \frac{L_{1m}}{L_{0m}} = e^{-\frac{1}{2} \sum_1^m [-2y_i \cdot \Delta\mu + (\Delta\mu)^2]},$$

soit en passant aux logarithmes népériens :

$$\log_e \lambda = \Delta\mu \cdot \sum_1^m y_i - \frac{m}{2} (\Delta\mu)^2$$

On conclura à un dérèglement si :

$$\Delta\mu \cdot S'_m - \frac{m}{2} (\Delta\mu)^2 \geq \log_e \frac{1 - \beta}{\alpha} \quad (4)$$

Il y a lieu de distinguer 2 cas pour les limites de contrôle de  $S'_m$  d'après la relation (4) selon le signe de  $\Delta\mu$ .

1er cas :  $\Delta\mu > 0$

$$S'_m \geq \frac{1}{\Delta\mu} \log_e \frac{1 - \beta}{\alpha} + m \cdot \frac{\Delta\mu}{2} \quad (5)$$

2ème cas :  $\Delta\mu < 0$

$$S'_m \leq \frac{1}{\Delta\mu} \log_e \frac{1 - \beta}{\alpha} + m \cdot \frac{\Delta\mu}{2} \quad (6)$$

$\Delta\mu$  étant fixé ainsi que les risques  $\alpha$  et  $\beta$  qu'on est décidé à accepter, nous voyons que la frontière de la région d'acceptation du dérèglement  $\Delta\mu$  sur la variable réduite  $y(\sigma \cdot \Delta\mu$  sur la variable mesurée  $X$ ) est une fonction linéaire de  $m$  de coefficient angulaire  $\frac{\Delta\mu}{2}$  croissante ou décroissante selon le sens du dérèglement, et d'ordonnée à l'origine  $\frac{1}{\Delta\mu} \log_e \frac{1 - \beta}{\alpha}$

De la même manière, suivant la théorie des tests progressifs d'hypothèses, nous délimitons une région d'acceptation de  $H_0$  (pas de dérèglement) et une région d'indécision par l'addition de deux droites parallèles aux précédentes, tirées de l'inéquation en  $m$  :

$$\Delta\mu \cdot S'_m - \frac{m}{2} (\Delta\mu)^2 \leq \log_e \frac{\beta}{1 - \alpha},$$

nous avons :

1er cas :  $\Delta\mu > 0$

$$S'_m \leq \frac{1}{\Delta\mu} \log_e \frac{\beta}{1 - \alpha} + m \cdot \frac{\Delta\mu}{2}$$

2ème cas :  $\Delta\mu < 0$

$$S'_m \geq \frac{1}{\Delta\mu} \log_e \frac{\beta}{1 - \alpha} + m \cdot \frac{\Delta\mu}{2}$$

La distinction des deux régions ainsi introduites présente peu d'intérêt du point de vue du contrôle en cours de fabrication puisqu'elles nous conduisent à la décision, continuer la fabrication sans procéder à un nouveau réglage de la machine, décision déjà obtenue par l'une des équations (5) ou (6), représentées sur la figure 5 par les droites PAB et P A' B'.

Remarque - On ne sait pas a priori dans quel sens s'opérera le dérèglement, si nous désignons par  $H_1$  l'hypothèse d'un dérèglement  $\Delta\mu > 0$ , par  $H_{-1}$  l'hypothèse d'un dérèglement  $\Delta\mu < 0$ , nous devons donc discriminer entre trois hypothèses  $H_0$ ,  $H_1$  et  $H_{-1}$ . Si  $\alpha$  est le risque de 1ère espèce de chacun des événements

accepter  $H_1$  quand  $H_0$  est vrai,  
accepter  $H_{-1}$  quand  $H_0$  est vrai,

le risque total d'accepter  $H_1$  ou  $H_{-1}$  quand  $H_0$  est vrai est égal à  $2\alpha$  puisque les deux événements sont exclusifs. La probabilité de faire un réglage inutile est donc  $2\alpha$ .

5.2 - Carte de contrôle des sommes cumulées. Dans la pratique, le risque  $\beta$ , laisser passer inaperçu le dérèglement  $|\Delta\mu|$  sur la variable réduite  $y$ , est très faible par hypothèse.

Johnson et Leone [4] et [5] admettent que  $\log_e (1 - \beta) \sim 0$ . Les équations des limites de contrôle de  $S'_m$  sont alors :

$$P A B \longrightarrow S'_m = - \frac{1}{|\Delta\mu|} \log_e \alpha + \frac{|\Delta\mu|}{2} m \quad (7)$$

$$P A' B' \longrightarrow S'_m = \frac{1}{|\Delta\mu|} \log_e \alpha - \frac{|\Delta\mu|}{2} m. \quad (8)$$

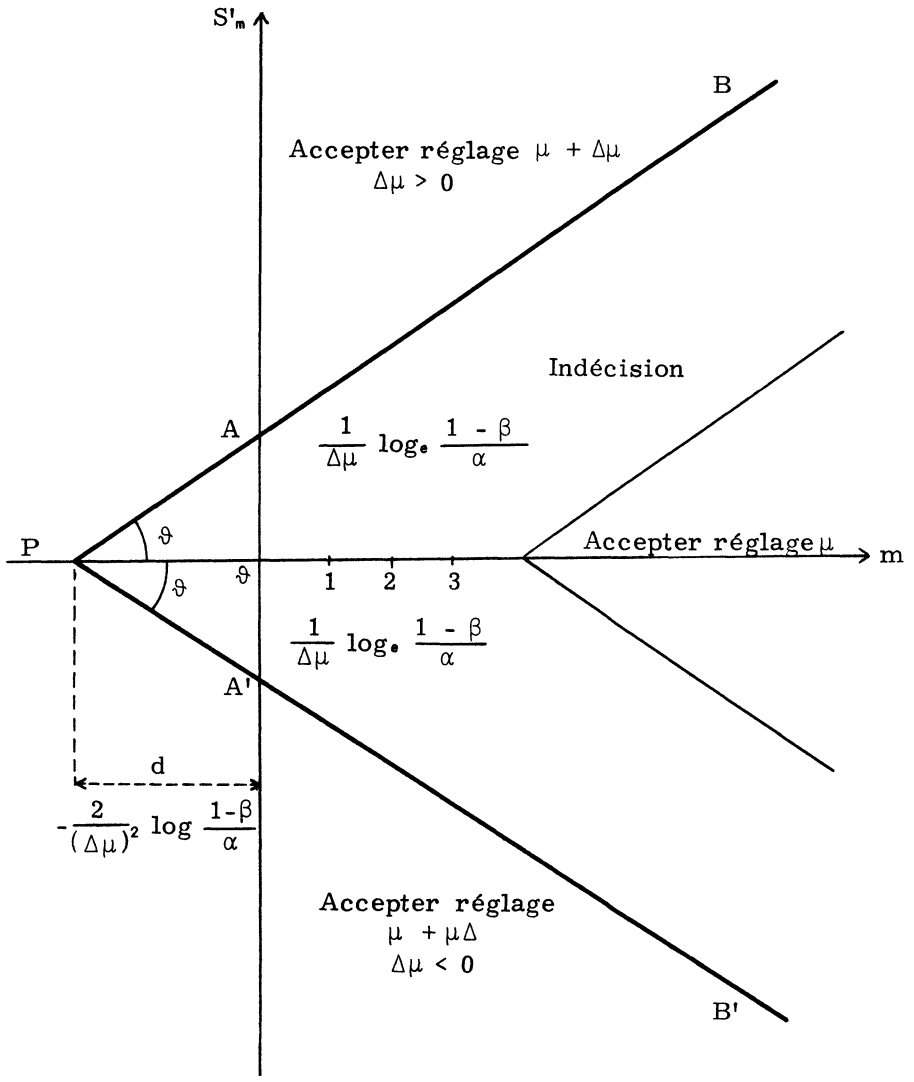


Figure 5 - Schéma du contrôle progressif des sommes.

Pour remédier à l'effet d'atténuation sur l'efficacité du contrôle qui résulte de la série des observations qui précèdent le dérèglement, nous avons vu qu'il suffisait d'appliquer le cache dans le sens rétrograde. Les deux paramètres  $d$  et  $\vartheta$  sont définis par les équations (7) et (8),

$$d = - \frac{2}{(\Delta\mu)^2} \log_e \alpha. \quad (9)$$

$$\operatorname{tg} \vartheta = \frac{|\Delta\mu|}{2} \quad (10)$$

Les équations (9) et (10) déterminent le masque représenté sur la figure (4). L'angle aigu  $\vartheta$  dépend uniquement de la valeur absolue du dérèglement réduit  $\Delta\mu$  qu'on désire mettre rapidement en évidence, alors que  $d$  dépend de  $\Delta\mu$  et du risque de lère espèce  $\alpha$  qu'on est décidé à accepter. La méthode revient à substituer aux paramètres expérimentaux  $d$  et  $\vartheta$  du  $\varphi$  3, les paramètres  $\Delta\mu$  et  $\alpha$  dont le sens concret oriente le choix du contrôleur selon la qualité acceptable des produits fabriqués.

La table 1 publiée par Johnson et Leone [5] donne les valeurs de  $\vartheta$  et  $d$  en fonction de  $\Delta\mu$  et  $\alpha$ .

Table I

Limites des cartes de contrôle de la moyenne par sommes cumulées

$\Delta\mu$	$\vartheta$	Valeurs de $d$						
		$2\alpha = 0,10$	$2\alpha = 0,05$	$2\alpha = 0,02$	$2\alpha = 0,01$	$2\alpha = 0,0027$	$2\alpha = 0,002$	$2\alpha = 0,001$
		$\alpha = 0,05$	$\alpha = 0,025$	$\alpha = 0,01$	$\alpha = 0,005$	$\alpha = 0,00135$	$\alpha = 0,001$	$\alpha = 0,0005$
0,2	5° 43'	149,8	184,4	230,6	264,9	(1) 330,4	345,4	380,0
0,4	11° 19'	37,4	46,1	57,6	66,2	82,6	86,3	95,0
0,6	16° 42'	16,6	20,5	25,6	29,4	36,7	38,4	42,2
0,8	21° 48'	9,36	11,5	14,4	16,6	20,6	21,6	23,8
1,0	26° 34'	5,99	7,38	9,21	10,6	13,2	13,8	15,2
1,2	30° 58'	4,16	5,12	6,40	7,36	9,18	9,59	10,6
1,4	35° 0'	3,06	3,76	4,70	5,41	6,74	7,05	7,76
1,6	38° 40'	2,34	2,88	3,60	4,14	5,16	5,40	5,94
1,8	41° 59'	1,85	2,28	2,84	3,27	4,08	4,26	4,69
2,0	45° 0'	1,50	1,84	2,30	2,65	3,30	3,45	3,80
2,2	47° 44'	1,24	1,52	1,90	2,19	2,73	2,85	3,14
2,4	50° 12'	1,04	1,28	1,60	1,84	2,29	2,40	2,64
2,6	52° 26'	0,89	1,09	1,36	1,57	1,95	2,04	2,25
2,8	54° 28'	0,76	0,94	1,17	1,35	1,69	1,76	1,94
3,0	56° 19'	0,67	0,82	1,02	1,18	1,47	1,54	1,69

(1) Ces valeurs correspondent à la carte de contrôle des moyennes de Shewart, avec limites à  $3\sigma$ .

Il y a lieu de noter que si l'on désire introduire l'angle  $\vartheta$  (au lieu de sa tangente) on doit prendre la même échelle sur les 2 axes de coordonnées, faute de quoi l'angle  $\vartheta$  ne serait pas conservé. On peut ne pas prendre la même échelle sur les 2 axes à condition de définir  $\vartheta$  par sa tangente.

La plupart des auteurs recommandent de choisir l'unité sur l'axe  $S'_m$  de manière permettre à cette variable des écarts pouvant atteindre 6 unités.

Enfin, on peut, grâce à un choix convenable des échelles sur les axes, représenter les points  $(m, S'_m)$  et éviter ainsi la division des sommes cumulées par  $\sigma$ .

5.3 - Délai moyen après dérèglage. La table II [5] donne les délais moyens après dérèglage pour des valeurs de  $\Delta\mu$  échelonnées de 0,5 à 1,5 et pour certaines valeurs du risque  $\alpha$ . Les chiffres d'une même colonne ne correspondent pas au même masque V puisqu'une valeur donnée de  $\Delta\mu$  détermine l'angle  $\vartheta$ . Les délais donnés dans la table sont égaux à la valeur de  $d$  d'après l'équation (9). On peut justifier la conclusion des auteurs par un raisonnement analogue à celui que nous avons fait au § 2.3. Après un dérèglage  $\Delta\mu$  sur la variable réduite  $y$  on a  $E(S'_h) = h \cdot \Delta\mu$ , remplaçant  $S'_h$  par sa valeur moyenne dans l'équation des limites de contrôle, on a :

$$h \cdot \Delta\mu = - \frac{1}{\Delta\mu} \log_e \alpha + h \cdot \frac{\Delta\mu}{2}$$

soit : 
$$h = - \frac{2}{(\Delta\mu)^2} \log_e \alpha \quad (h = \text{délai moyen après dérèglage}).$$

qui est la valeur de  $d$  fournie par (9).

Table II

Délai moyen après dérèglage  $\Delta\mu$  sur la moyenne de la variable réduite.

$\Delta\mu$	$\alpha$						
	0,05	0,025	0,01	0,005	règle "36" 0,00135	0,001	0,0005
0,5	7,9 24,0	13,9 29,5	29,5 36,8	52,7 42,4	161 52,9	209 55,3	380 60,8
0,75	5,4 10,6	8,8 13,1	17,4 16,4	29,5 18,8	81,8 23,5	104 24,6	181 27,0
1,0	3,8 6,0	5,9 7,4	10,8 9,2	17,4 10,6	44,0 13,2	54,6 13,8	90,9 15,2
1,25	2,9 3,8	4,0 4,7	7,1 5,9	10,8 6,8	25,0 8,5	30,4 8,8	48,4 9,7
1,5	2,4 2,7	3,1 3,3	4,9 4,1	7,1 4,7	7,1 5,9	17,9 6,1	27,3 6,8

Les chiffres de la ligne supérieure se rapportent à une carte de contrôle unilatérale du type classique, au risque de 1ère espèce  $\alpha$ .

Les chiffres de la 2ème ligne sont relatifs aux cartes de contrôle par cumul des observations dont les limites sont définies dans la table I.

On constate la plus grande sensibilité des cartes de contrôle des sommes cumulées pour de petites valeurs de  $\alpha$ . Dans la pratique, on utilise des valeurs de l'ordre de 0,001 pour lesquelles la carte de contrôle des sommes cumulées est plus efficace que la carte de contrôle des moyennes de Shewart pour des dérèglages inférieurs à  $3\sigma$ . La figure 6 tirée de l'article de H. M. Truax [9] illustre cette propriété, elle concerne une carte de Shewart et une carte de contrôle des sommes présentant le même risque  $\alpha$ .

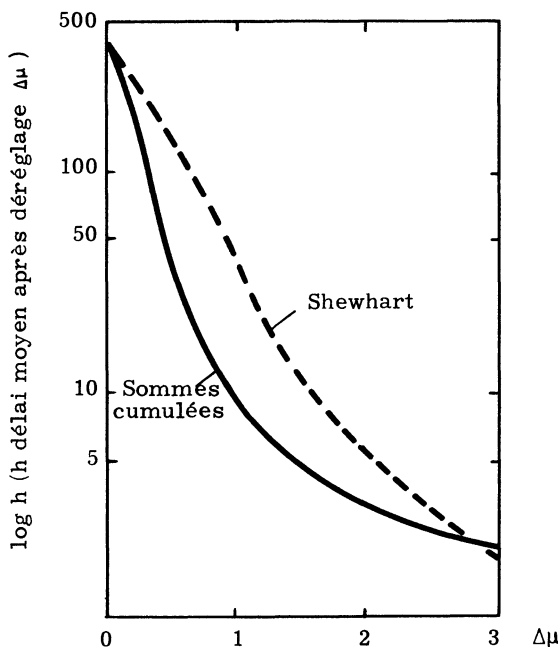


Figure 6 -

5.4 - Procédure pour le choix d'un masque. Pour la construction d'un masque on envisage successivement :

- le plus petit dérèglage de la variable X qu'on veut rapidement déceler soit D, on en déduit le dérèglage correspondant  $\Delta\mu$  sur la variable réduite y :  $\Delta\mu = \frac{D}{\sigma}$ ,

- on se fixe le risque 1ère espèce  $\alpha$  qui est la probabilité d'effectuer un réglage inutile

- on lit alors dans la table I les valeurs de  $\vartheta$  et d qui définissent le masque ou bien on les calcule d'après les formules (9) et (10)

Le délai moyen de détection d'un dérèglage est égal à d.

5.5 - Exemple numérique. Reprenons les données du tableau 1, dans lequel  $\sigma = 1$  et admettons que nous voulions détecter rapidement le dérèglage  $\Delta\mu = 1,5$ . On a :

$$\text{tg } \vartheta = 0,75$$



Prenons  $\alpha = 0,00135$  qui correspond aux limites de contrôle de la carte de contrôle à 3 écarts-types, on lit dans la table II :  $d = 5,7$ .

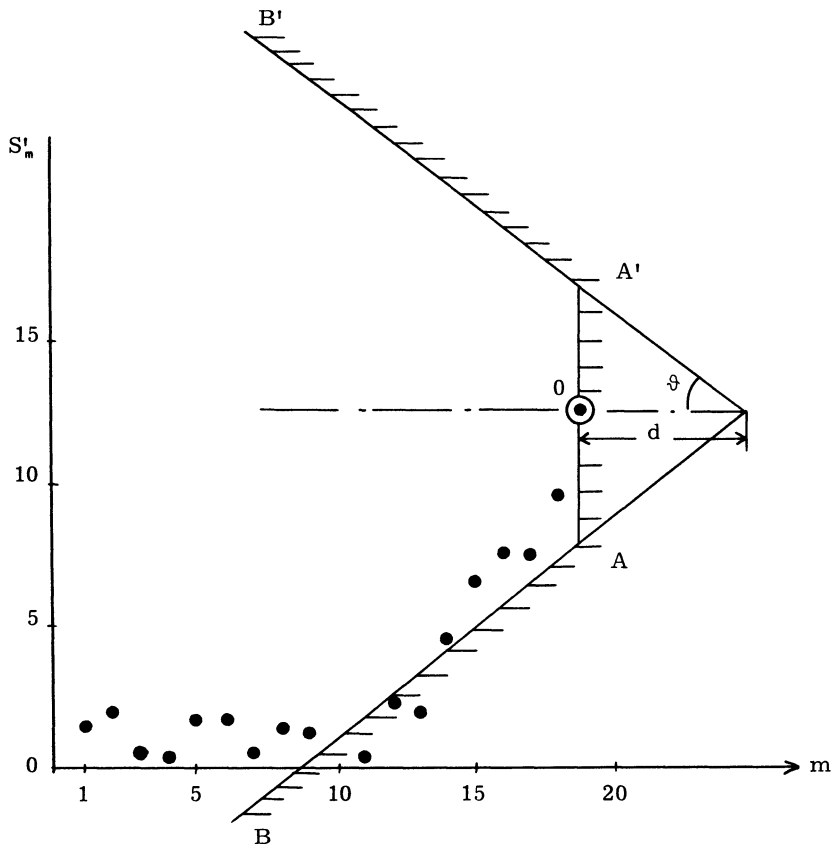


Figure 7 - Carte de contrôle des sommes cumulées.

Nous appliquons le masque sur le graphique, le dernier point représentatif étant en 0. La 19ème observation nous indique que la fabrication est hors contrôle. (Voir figure 7). Le 10ème point étant hors de la limite AB donne une indication sur la date du dérèglement.

Le délai après dérèglement est ici de 9 échantillons sensiblement plus grand que sa valeur moyenne 5,9 et supérieur au délai trouvé avec les limites paraboliques qui était dans le même cas égal à 5.

## 6 - CONTROLE DE LA DISPERSION -

### 6.1 - Contrôle par cumul des variances.

#### 6.1.1 - Base théorique.

Les résultats exposés sont dus à Johnson N. L. et Leone F. C. [4] et [5]. Représentons par  $V_i$  la variance estimée d'après le ième échan-

tillon supposé extrait d'une population normale. Nous nous proposons de choisir entre deux hypothèses :

- $H_0$  l'écart-type de la population est à sa valeur standard  $\sigma_0$ ,
- $H_1$  l'écart-type de la population est égal à  $\sigma_1 > \sigma_0$ .

Le risque de 1ère espèce  $\alpha$  est la probabilité d'accepter  $H_1$  quand  $H_0$  est vrai ;

Le risque de 2ème espèce  $\beta$  est la probabilité d'accepter  $H_0$  quand  $H_1$  est vrai.

On tire de la population  $m$  échantillons d'effectifs  $N_1, N_2, \dots, N_m$ . On calcule les variances :

$$V_i = \frac{1}{N_i - 1} \sum_{j=1}^{N_i} (x_{ij} - \bar{x}_i)^2,$$

$x_{ij}$  étant la jème mesure et  $\bar{x}_i$  la moyenne du ième échantillon,

Le rapport de vraisemblance  $\lambda$  de  $H_1/H_0$  est :

$$\lambda = \left(\frac{\sigma_0}{\sigma_1}\right)^{\sum_1^m (N_i - 1)} e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{1}{\sigma_1^2} - \frac{1}{\sigma_0^2}\right) \sum_1^m (N_i - 1) V_i}$$

On conclura par la présence du dérèglement de la dispersion,  $\sigma_1/\sigma_0$ , si l'on a :

$$\left(\frac{\sigma_0}{\sigma_1}\right)^{\sum_1^m (N_i - 1)} e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{1}{\sigma_1^2} - \frac{1}{\sigma_0^2}\right) \sum_1^m (N_i - 1) V_i} \geq \frac{1 - \beta}{\alpha}$$

Posant  $v_i = N_i - 1$  et passant aux logarithmes népériens, il vient :

$$\sum_1^m V_i \log_e \sigma_0/\sigma_1 - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\sigma_1^2} - \frac{1}{\sigma_0^2}\right) \sum_1^m v_i V_i > \log_e \frac{1 - \beta}{\alpha}$$

équation de la limite de contrôle :

$$\frac{1}{\sigma_0^2} \sum_1^m v_i V_i = \frac{2}{1 - (\sigma_0/\sigma_1)^2} \log_e \frac{1 - \beta}{\alpha} + \frac{2 \log_e \sigma_1/\sigma_0}{1 - (\sigma_0/\sigma_1)^2} \sum_1^m v_i$$

Compte tenu de  $1 - \beta \sim 1$  on a :

$$\frac{1}{\sigma_0^2} \sum_1^m v_i V_i = - \frac{2 \log_e \alpha}{1 - (\sigma_0/\sigma_1)^2} + \frac{2 \log_e \sigma_1/\sigma_0}{1 - (\sigma_0/\sigma_1)^2} \sum_1^m v_i \quad (11)$$

L'équation (11) nous montre que l'expression  $\frac{1}{\sigma_0^2} \sum_1^m v_i V_i$  est une fonction linéaire croissante de  $\sum_1^m v_i$ . Tout point situé au-dessus de la droite PQ (figure 8) est interprété comme un accroissement de l'écart-type qu'on ne veut pas tolérer. On pourrait, comme pour le contrôle des moyennes cumulées, distinguer deux régions dans la région de refus de  $H_1$ . Nous avons vu que cette distinction est inutile dans le contrôle en cours de fabrication.

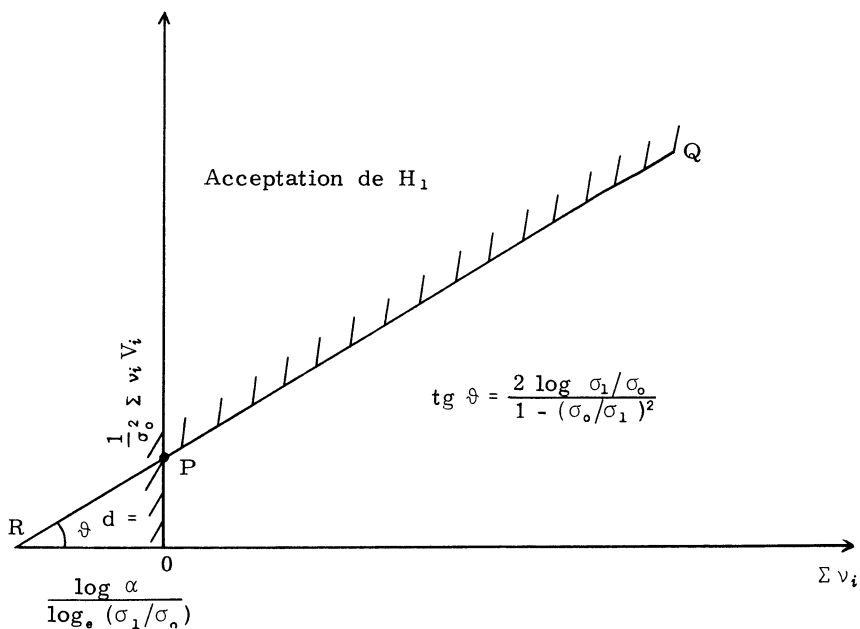


Figure 8 - Schéma du contrôle de la variance.

5. 1. 2 - Carte de contrôle de la variance.

L'équation (11) nous donne les 2 éléments qui nous permettent de construire la carte de contrôle de la variance, soit :

$$d = - \frac{\log_{\sigma} \alpha}{\log_{\sigma} \sigma_1/\sigma_0} \tag{12}$$

$$\text{tg } \vartheta = \frac{2 \log_{\sigma} \sigma_1/\sigma_0}{1 - (\sigma_0/\sigma_1)^2} \tag{13}$$

On porte sur la carte les points  $M \left( \sum_1^m v_i, \frac{1}{\sigma_0^2} \sum_1^m v_i V_i \right)$ , la dispersion cesse d'être sous contrôle lorsque le chemin suivi par le point M franchit la limite de contrôle du masque appliqué dans le sens rétrograde (voir figure 9).

La même méthode permet de déterminer une seconde limite de contrôle afin de mettre en évidence une diminution de la dispersion  $\sigma_1 < \sigma_0$ . On se borne ici au test unilatéral qui correspond aux besoins pratiques du maintien de la qualité.

Les formules (12) et (13) montrent que  $\vartheta$  ne dépend que du dérèglement  $\sigma_1/\sigma_0$  alors que  $d$  dépend du risque  $\alpha$  et du dérèglement. La table III [4] et [5] donne les valeurs de  $\vartheta$  et  $d$  en fonction de  $\sigma_1/\sigma_0$  et  $\alpha$ .

Table III  
 Contrôle des variances cumulées.

$\sigma_1/\sigma_0$	$\phi$	Valeurs de d						
		$\alpha = 0,05$	$\alpha = 0,025$	$\alpha = 0,01$	$\alpha = 0,005$	$\alpha = 0,00135$	$\alpha = 0,001$	$\alpha = 0,0005$
0,25	10°28'	2,16	2,66	3,32	3,82	4,77	4,98	5,48
0,5	24°48'	4,32	5,32	6,64	7,64	9,53	9,97	11,0
0,75	36°31'	10,4	12,8	16,0	18,4	23,0	24,0	26,4
1,2	50° 2'	16,4	20,2	25,3	29,1	36,2	37,9	41,7
1,4	52°37'	8,90	11,0	13,7	15,7	19,6	20,5	22,6
1,6	57° 2'	6,37	7,85	9,80	11,3	14,1	14,7	16,2
1,8	59°32'	5,10	6,28	7,83	9,01	11,2	11,8	12,9
2,0	61°35'	4,32	5,32	6,64	7,64	9,53	9,97	11,0
2,5	65°23'	3,27	4,03	5,03	5,78	7,21	7,54	8,30
3,0	67°57'	2,73	3,36	4,19	4,82	6,01	6,29	6,92
3,5	69°52'	2,39	2,94	3,68	4,23	5,27	5,51	6,07
4,0	71°19'	2,16	2,66	3,32	3,82	4,77	4,98	5,48

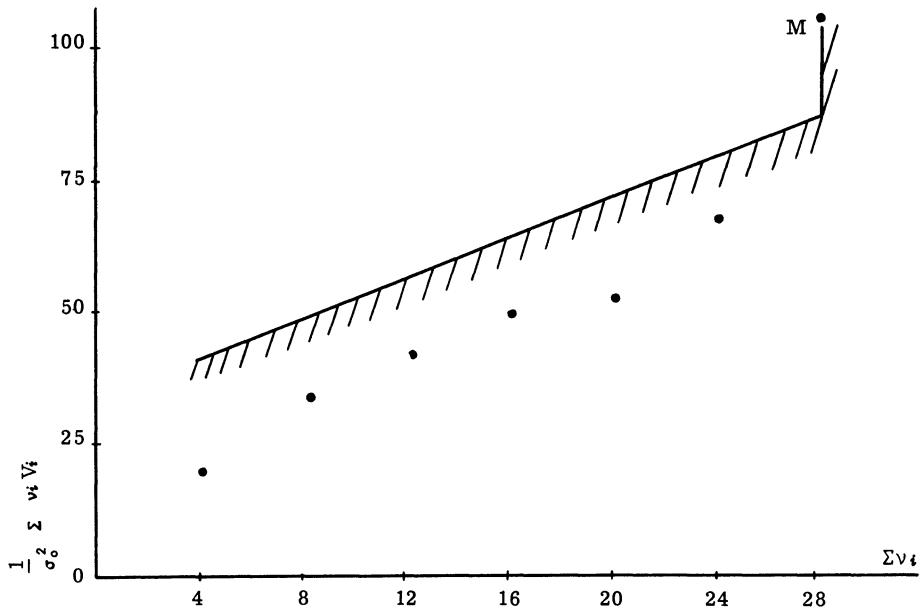


Figure 9 - Carte de contrôle des variances cumulées.

### 6. 1. 3 - Délai moyen après dérèglement.

Johnson et Leone ont calculé le nombre moyen total d'observations nécessaire avant d'avoir un point hors contrôle pour quelques valeurs de  $\sigma_1/\sigma_0$  et pour  $\alpha = 0,005$ ,  $\alpha = 0,001$  lorsque les échantillons sont de même effectif 4, 6 ou 8. Si h est le nombre moyen d'échantillons la table IV donne les valeurs 4h, 6h ou 8h [5].

Table IV

Délai moyen après dérèglement de la dispersion

$\sigma_1/\sigma_0$	N	$\alpha = 0,005$			$\alpha = 0,001$		
		Cartes de contr. de l'écart-type de Shewart	Sommes cumulées		Cartes de contr. de l'écart-type de Shewart	Sommes cumulées	
			Variances	Etendues		Variances	Etendues
1,2	4	131	187	191	388	244	248
	6	149	169	180	423	220	234
	8	161	161	180	440	210	234
1,3	4	72,6	85,5	86,9	181	111	113
	6	77,1	77,0	82,0	182	100	107
	8	79,5	73,3	82,0	179	96,5	107
1,4	4	45,6	49,2	50,0	99,3	64,2	65,2
	6	46,6	44,3	47,2	95,1	57,8	61,5
	8	47,0	42,2	47,2	90,9	55,0	61,5
1,5	4	31,5	32,2	32,7	61,6	42,0	42,6
	6	31,6	29,0	30,9	57,4	37,8	40,2
	8	31,8	27,6	30,8	54,2	36,0	40,2
2,0	4	11,1	8,8	8,9	15,7	11,4	11,6
	6	11,5	7,9	8,4	15,0	10,3	10,9
	8	12,3	7,5	8,4	15,0	9,8	10,9
2,5	4	7,1	4,1	4,2	8,8	5,4	5,5
	6	8,0	3,7	4,0	9,1	4,9	5,2
	8	9,3	3,5	4,0	10,1	5,6	5,2

Les chiffres indiquent le nombre total des observations soit N.h si h est le nombre moyen d'échantillons prélevés avant détection du dérèglement.

D'autre part, ces auteurs donnent pour la valeur du délai moyen après dérèglement h (nombre moyen d'échantillons).

$$h = - \frac{\log_e \alpha}{\sqrt{\left\{ \frac{1}{2} [(\sigma_1/\sigma_0)^2 - 1] - \log_e \sigma_1/\sigma_0 \right\}}} \quad (14)$$

On retrouve cette valeur de h en partant de l'équation (11). Après dérèglement on a, en effet,  $E \left( \sum_1^m v_i V_i \right) = \sigma_1^2 \sum_1^m v_i$ , portant cette valeur dans l'équation (11), on a :

$$\frac{\sigma_1^2}{\sigma_0^2} \sum_1^m v_i = - \frac{2 \log_e \alpha}{1 - (\sigma_0/\sigma_1)^2} + \frac{2 \log \sigma_1/\sigma_0}{1 - (\sigma_0/\sigma_1)^2} \sum_1^m v_i$$

d'où l'on tire :

$$\sum_1^m v_i = - \frac{\log_e \alpha}{\frac{1}{2} [ (\sigma_1/\sigma_0)^2 - 1 ] - \log_e \sigma_1/\sigma_0}$$

d'où se déduit immédiatement la formule (14) en posant  $v = v_1 = v_2 = \dots = v_n$ .

La table IV montre que le contrôle par variances cumulées est plus efficace que le contrôle classique des variances pour les petites petites valeurs du risque de lère espèce  $\alpha$ .

#### 6. 1. 4 - Exemple numérique.

La fabrication est supposée réglée sur une dispersion caractérisée par  $\sigma_0 = 2$ , nous nous proposons de vérifier expérimentalement le comportement de la carte de contrôle des variances cumulées en présence d'un dérèglement qui fait passer l'écart-type de  $\sigma_0 = 2$  à  $\sigma_1 = 4$ . Pour cela nous tirons de la population normale  $N(0, 4)$  une série d'échantillons d'effectif 5 et arrêtons l'expérience dès qu'un point franchit la limite de contrôle unilatérale, avec le risque  $\alpha = 0,001$  de faire un réglage inutile.

On lit sur la table IV pour  $\sigma_1/\sigma_0 = 2$ ,  $\alpha = 0,001$  :

$$\vartheta = 61^\circ 35', \quad d = 9,97, \quad \text{tg } \vartheta = 1,84$$

Les observations sont consignées dans le tableau 2.

Tableau 2

N° de l'échantillon	Observations					Moyenne	$\Sigma v_i$	$v_i V_i$	$\Sigma v_i V_i$	$\frac{1}{\sigma_0^2} \Sigma v_i V_i$
1	-1	4	-8	-3	-1	-1,8	4	79,8	79,8	19,95
2	2	-7	-5	0	-2	-2,4	8	53,2	133,0	33,25
3	-2	-1	0	0	-7	-2,0	12	34	167,0	41,75
4	1	-4	2	-3	-3	-1,4	16	29,2	196,2	49,05
5	1	-1	-3	-3	0	-1,2	20	12,8	209,0	52,25
6	-5	4	3	1	-3	0,0	24	60,0	269,0	67,25
7	-2	7	2	-2	-10	-1,0	28	156,0	425,0	106,25

La carte de contrôle des variances cumulées est représentée dans la figure 9. Le 7ème échantillon met en évidence le dérèglement. L'application de la formule (14) nous donne comme valeur moyenne du délai  $h \sim 2$ , dans le cas particulier de l'expérience le hasard ne nous a pas favorisé, nous trouvons, en effet, les 6 premières variances inférieures à leur valeur théorique 16. Tous les points étant au-dessus de la limite de contrôle nous pouvons raisonnablement admettre que la dispersion est dérèglée depuis l'échantillon n° 1.

## 6.2 - Contrôle par cumul des étendues.

6.2.1 - La loi de distribution de l'étendue  $w_i$  d'échantillons tirés d'une population normale est compliquée et ne permet pas une détermination simple des limites de contrôle. Johnson et Leone considèrent deux distributions approchées de  $w_i$  données par E. S. Pearson. Nous donnons ici les résultats concernant la seconde qui exige des calculs plus simples et qui, d'après ces auteurs, fournit une précision suffisante pour les problèmes de contrôle.

On admet que :

$$\Pr(w < w_p = c' \chi_p^2) = P \text{ si } \Pr(\chi^2 < \chi_p^2) = P.$$

où  $\chi^2$  est distribué avec  $\nu'_1$  degrés de liberté. Les paramètres  $c'$  et  $\nu'_1$  sont donnés dans la table V pour des effectifs d'échantillons  $N$  variant de 3 à 10. Il découle de cela que tous les échantillons doivent être de la même taille.

Table V

Paramètres pour le contrôle des étendues cumulées

Effectif des échantillons $N$	$c'$	$\nu'_1$
3	0,233	7,27
4	0,188	10,95
5	0,160	14,49
6	0,142	17,86
7	0,128	21,08
8	0,118	24,11
9	0,110	27,01
10	0,103	29,82

Cette approximation étant admise on fera la carte de contrôle des étendues cumulées en portant en abscisse pour le  $m^{\text{ième}}$  échantillon  $m \nu'$  et en ordonnée  $\frac{1}{\sigma_0 c'} \sum_{i=1}^m w_i$ . Le cache en  $V$  est défini par les deux paramètres :

$$d = \frac{\log_e \alpha}{\log \sigma_1 / \sigma_0} \quad (15)$$

$$\text{tg } \vartheta = \frac{\log_e \sigma_1 / \sigma_0}{1 - \sigma_0 / \sigma_1} \quad (16)$$

Les formules (15) et (16) nous montrent qu'on peut utiliser la table III qui concerne les variances cumulées en remplaçant  $\sigma_1 / \sigma_0$  par  $\sqrt{\sigma_1 / \sigma_0}$ .

Le délai moyen après dérèglement peut être calculé de façon analogue par la formule (14) en remplaçant  $\nu$  par  $\nu'_1$ . Quelques valeurs du délai moyen sont indiquées dans la table IV, ils montrent que l'efficacité du contrôle des étendues est du même ordre de grandeur que celle du contrôle des variances.

6.2.2 - Exemple numérique. Mettons sous contrôle les étendues cumulées en partant des données du tableau 2 avec les mêmes garanties que celles que nous avons demandées dans l'exemple du § 6.1.4.

$$\sigma_1/\sigma_0 = 2 \quad \alpha = 0,001$$

Nous entrons dans la table III par la ligne  $\sqrt{\sigma_1/\sigma_0} = 1,41$  et nous avons :

$$d = 20,2, \quad \vartheta = 53^\circ, \quad \text{tg } \vartheta = 1,33$$

qui nous permettent de contruire le cache.

Nous lisons dans la table V, pour  $N = 5$  ;  $c' = 0,16$  et  $v'_1 = 14,49$ .

Les calculs nécessaires au contrôle des étendues cumulées sont récapitulés dans le tableau 3.

Tableau 3

N° de l'échantillon	$w_i$	$\Sigma v'_1$	$\Sigma w_i$	$\frac{1}{\sigma_0 c'} \Sigma w_i$
1	12	14,49	12	39
2	9	28,98	21	65
3	7	"	28	82
4	6	"	34	106
5	4	"	38	118
6	9	"	47	146
7	17	101,43	64	200

Les points figuratifs des échantillons successifs sont représentés sur la figure 10, le cache nous montre qu'il faut attendre le 7ème échantillon avant que le contrôle signale le dérèglement de l'étendue. La conclusion est donc la même que celle que nous avons obtenue par le contrôle des variances.



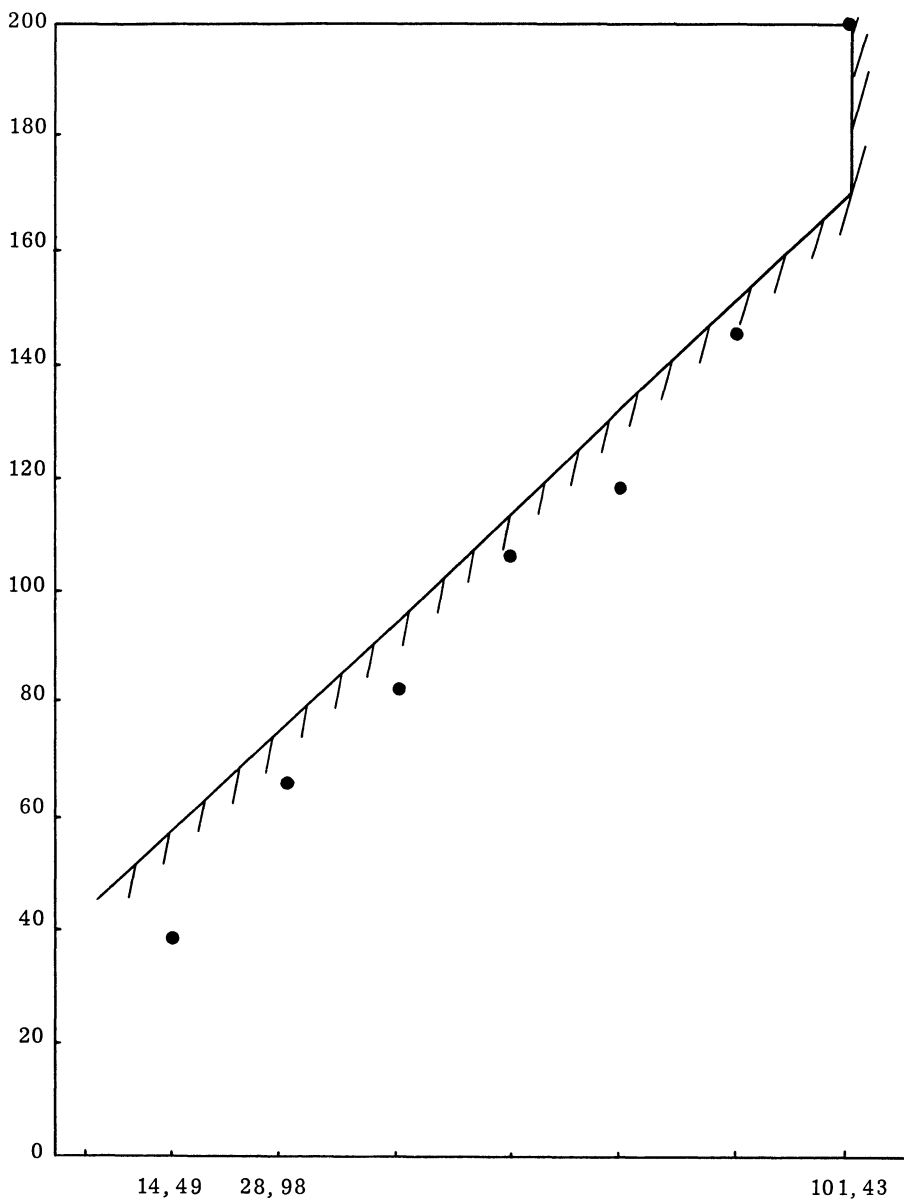


Figure 10 - Carte de contrôle des étendues cumulées.

## 7 - CONTROLE DE VARIABLES SUIVANT UNE LOI DE POISSON -

7.1 - Base théorique [5]. Dans beaucoup de cas, on contrôle le nombre  $x$  d'articles défectueux par échantillon ou le nombre de défauts par unité. La variable aléatoire discrète  $x$  est souvent bien décrite par la loi de Poisson :

$$p(x) = e^{-\mu} \frac{\mu^x}{x!} \quad (x = 0, 1, 2, \dots)$$

On peut au lieu de contrôler  $x$  à l'aide de la carte habituelle de Shewart mettre sous contrôle la variable aléatoire  $X_m = \sum_{i=1}^m x_i$ . La méthode déjà appliquée du rapport de vraisemblance dans deux hypothèses  $H_0$  et  $H_1$  correspondant respectivement aux moyennes  $\mu = \mu_0$  et  $\mu = \mu_1$  conduit à la construction de limites pour l'acceptation de l'hypothèse  $H_1$  avec un risque de 1ère espèce  $\alpha$  (acceptation de  $H_1$  quand  $H_0$  est vrai) et un risque de 2ème espèce  $\beta$  (acceptation de  $H_0$  quand  $H_1$  est vrai).

Au  $m$ ème échantillon, le rapport de vraisemblance  $\lambda$  est :

$$\lambda = e^{-m(\mu_1 - \mu_0)} \prod_{i=1}^m \left( \frac{\mu_1}{\mu_0} \right)^{x_i}$$

La région d'indécision est définie par :

$$\frac{\beta}{1 - \alpha} < e^{-m(\mu_1 - \mu_0)} \prod_{i=1}^m \left( \frac{\mu_1}{\mu_0} \right)^{x_i} < \frac{1 - \beta}{\alpha}$$

On acceptera donc l'hypothèse de la moyenne des défauts égale à  $\mu_1$  si l'on a :

$$-m(\mu_1 - \mu_0) + \sum_{i=1}^m x_i \log_e \frac{\mu_1}{\mu_0} \geq \log_e \frac{1 - \beta}{\alpha}$$

Lorsque  $\mu_1 > \mu_0$  on accepte  $\mu_1$  si :

$$\sum_{i=1}^m x_i \geq \frac{\log_e \frac{1 - \beta}{\alpha}}{\log_e \mu_1 / \mu_0} + \frac{m(\mu_1 - \mu_0)}{\log_e \mu_1 / \mu_0}$$

Lorsque  $\mu_1 < \mu_0$  on accepte  $\mu_1$  si :

$$\sum_{i=1}^m x_i \leq \frac{\log_e \frac{1 - \beta}{\alpha}}{\log_e \mu_1 / \mu_0} + \frac{m(\mu_1 - \mu_0)}{\log_e \mu_1 / \mu_0}$$

La frontière d'acceptation de  $\mu_1$  est donc la fonction linéaire de  $m$  :

$$X_m = - \frac{\log_e \alpha}{\log_e \mu_1 / \mu_0} + \frac{\mu_1 - \mu_0}{\log_e \mu_1 / \mu_0} m \quad (17)$$

Dans l'équation (17) on a admis que  $1 - \beta \sim 1$ , suivant l'approximation retenue dans les contrôles précédents.

Le test peut être bilatéral correspondant aux deux éventualités  $\mu_1 / \mu_0 > 1$  et  $\mu_1 / \mu_0 < 1$ , le risque de 1ère espèce est alors égal à  $2\alpha$ . Les limites de contrôle des défauts cumulés sont les droites parallèles PQ et P'Q' de la figure 11.

Dans le contrôle courant, où l'on désire être alerté en cas de dégradation de la qualité on n'utilise que la limite PQ.

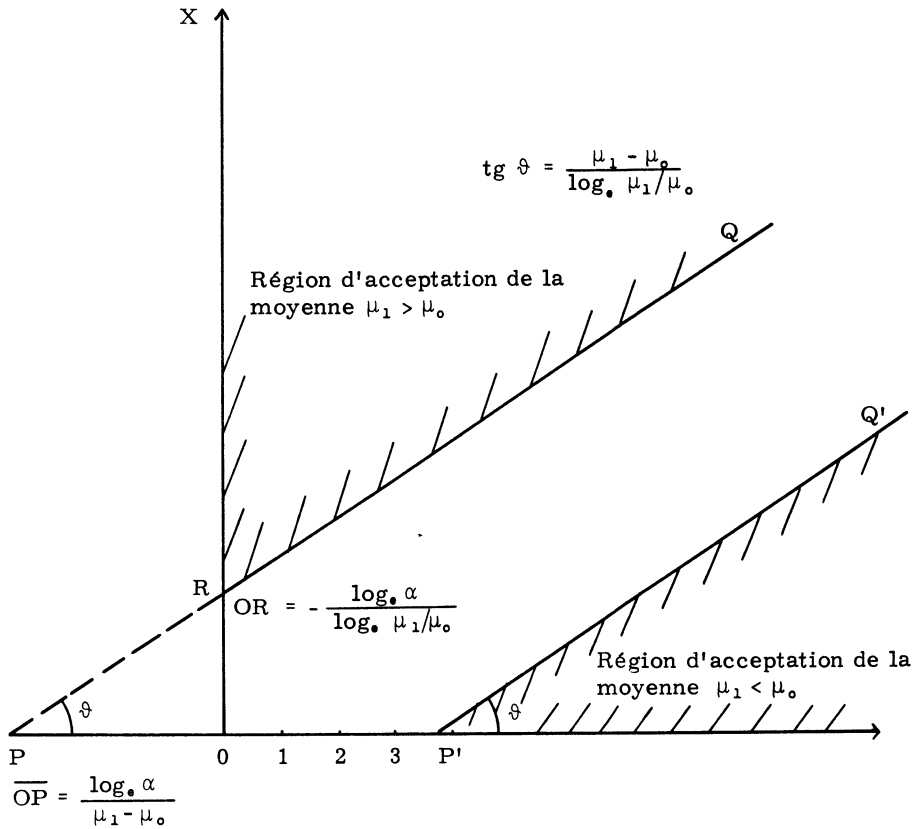


Figure 11 - Schéma de la carte de contrôle de la moyenne d'une distribution de Poisson.

De la formule (17) on déduit immédiatement :

$$d = - \frac{\log_e \alpha}{\mu_1 - \mu_0} \quad (18)$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\mu_1 - \mu_0}{\log_e \mu_1 / \mu_0} \quad (19)$$

Les valeurs de  $d$  et  $\varphi$  qui correspondent à des situations courantes sont données dans la table VI. [5]. Le masque étant construit, on le place dans le sens rétrograde à partir de la dernière observation comme pour les cas précédents.

## 7.2 - Délai moyen après dégradation de la qualité.

Johnson et Leone [5] donnent pour valeur du délai moyen  $h$  lorsque la moyenne du nombre de défauts passe de  $\mu_0$  à  $\mu_1$  la formule suivante :

$$h = - \frac{\log_e \alpha}{\mu_1 \log_e \mu_1 / \mu_0 - (\mu_1 - \mu_0)} \quad (20)$$

Table VI

Limites de contrôle pour des variables suivant la loi de Poisson.  
a) Valeurs de d

$\mu_1 - \mu_0$	$\alpha = 0,05$	$\alpha = 0,025$	$\alpha = 0,01$	$\alpha = 0,005$	$\alpha = 0,00135$	$\alpha = 0,001$	$\alpha = 0,005$
0,5	6,00	7,38	9,21	10,6	13,2	13,8	15,2
1,0	3,00	3,69	4,61	5,30	6,61	6,91	7,60
1,5	2,00	2,46	3,07	3,53	4,40	4,61	5,07
2,0	1,50	1,84	2,30	2,65	3,30	3,45	3,80
2,5	1,20	1,48	1,84	2,12	2,64	2,76	3,04
3,0	1,00	1,23	1,54	1,77	2,20	2,30	2,53
3,5	0,86	1,05	1,32	1,51	1,89	1,97	2,03
4,0	0,75	0,92	1,15	1,32	1,65	1,73	1,90
4,5	0,68	0,82	1,02	1,18	1,47	1,53	1,69
5	0,60	0,74	0,92	1,06	1,32	1,38	1,52
6	0,50	0,61	0,77	0,88	1,10	1,15	1,27
7	0,43	0,53	0,66	0,76	0,94	0,99	1,09
8	0,37	0,46	0,58	0,66	0,83	0,86	0,95
9	0,33	0,41	0,51	0,59	0,73	0,77	0,84
10	0,30	0,37	0,46	0,53	0,66	0,69	0,76

b) Valeurs de  $\phi$  (indépendantes de  $\alpha$ )

$\mu_0$	$\mu_1$									
	1	2	3	4	5	6	8	10	12	15
0,5	35°48'	47°15'	54°22'	59°17'	62°54'	65°41'	69°43'	72°30'	74°33'	76°48'
1,0	-	55°16'	61°13'	65°12'	68° 5'	70°17'	73°27'	75°39'	77°16'	79° 3'
1,5	-	60° 5'	65°12'	68°35'	71° 1'	72°53'	75°33'	77°25'	78°48'	80°19'
2,0	-	-	67°56'	70°53'	73° 1'	74°39'	76°59'	78°38'	79°51'	81°11'
2,5	-	-	69°58'	72°36'	74°30'	75°57'	78° 4'	79°32'	80°37'	81°51'
3,0	-	-	-	73°57'	75°40'	76°59'	78°54'	80°14'	81°15'	82°22'
3,5	-	-	-	75° 3'	76°37'	77°50'	79°35'	80°50'	81°45'	82°47'
4,0	-	-	-	-	77°25'	78°32'	80°10'	81°19'	82°19'	83° 9'
4,5	-	-	-	-	78° 6'	79° 9'	80°40'	81°45'	82°33'	83°28'
5	-	-	-	-	-	79°40'	81° 6'	82° 6'	82°52'	83°44'
6	-	-	-	-	-	-	81°49'	82°43'	83°25'	84°11'
7	-	-	-	-	-	-	82°24'	83°13'	83°51'	84°33'
8	-	-	-	-	-	-	-	83°38'	84°13'	84°52'
9	-	-	-	-	-	-	-	83°59'	84°31'	85° 8'
10	-	-	-	-	-	-	-	-	84°47'	85°22'

On peut aisément justifier cette expression en considérant l'espérance mathématique de  $\sum x_i$  après dégradation de la qualité :

$$E \left( \sum_1^h x_i \right) = h \mu_1$$

la valeur moyenne h s'obtient en remplaçant  $\sum x_i$  par son espérance mathématique dans l'équation (17) de la limite de contrôle. On a :

$$h \mu_1 = - \frac{\log_e \alpha}{\log_e \mu_1 / \mu_0} + \frac{\mu_1 - \mu_0}{\log_e \mu_1 / \mu_0} h$$

d'où :

$$h = - \frac{\log_e \alpha}{\mu_1 \log_e \mu_1 / \mu_0 - (\mu_1 - \mu_0)}$$

La table VII donne quelques résultats qui montrent que pour de petites valeurs de  $\alpha$  l'emploi des cartes de contrôle par cumul des observations permet de déceler plus rapidement une augmentation du nombre des défauts par unité que la carte standard de Shewart.

Table VII  
Délai moyen pour variables poissonniennes

	$\mu_0$	$\mu$	$\alpha = 0,05$		$\alpha = 0,001$	
			Observat. cumulées	Shewart	Observat. cumulées	Shewart
$\frac{\mu_1}{\mu_0} = 2$ }	0,5	1	15,5	12,5	35,8	52,6
	1	2	7,8	7,0	17,9	60,4
	2	4	3,9	2,7	8,9	19,6
	5	10	1,6	1,8	3,6	7,4
$\frac{\mu_1}{\mu_0} = 3$ }	0,5	1,5	4,6	5,2	10,7	15,2
	1	3	2,3	2,8	5,3	11,9
	2	6	1,2	1,3	2,7	3,9

7.3 - Exemple numérique. Nous reproduisons dans le tableau 4 l'exemple numérique cité par Johnson et Leone [5]. Dans les 10 premiers échantillons on a relevé le nombre des défauts présents sur une certaine surface de bois après polissage. Afin de juger de l'efficacité de la carte de contrôle du nombre de défauts cumulés on a majoré de 1 les chiffres concernant les échantillons 11 à 20.

Tableau 4  
Nombre de défauts après polissage

N° de l'échantillon	Défauts	Défauts cumulés	N° de l'échantillon	Défauts	Défauts cumulés
1	1	1	11	4	14
2	2	3	12	2	16
3	2	5	13	2	18
4	1	6	14	3	21
5	0	6	15	2	23
6	0	6	16	2	25
7	0	6	17	1	26
8	2	8	18	1	27
9	0	8	19	2	29
10	2	10	20	2	31

Le niveau de qualité acceptable est  $\mu_0 = 1$ , pour les échantillons 11 à 20 on a  $\mu_1 = 2$ , si l'on fixe  $\alpha = 0,00135$  qui correspond au risque unilatéral d'une carte de Shewart on lit, dans la table VI

$$d = 6,61, \quad \vartheta = 55^{\circ}16', \quad \text{tg } \vartheta = 1,44.$$

Ces données nous permettent de construire le cache des limites de contrôle représenté sur la carte de contrôle des nombres de défauts cumulés de la figure 12.

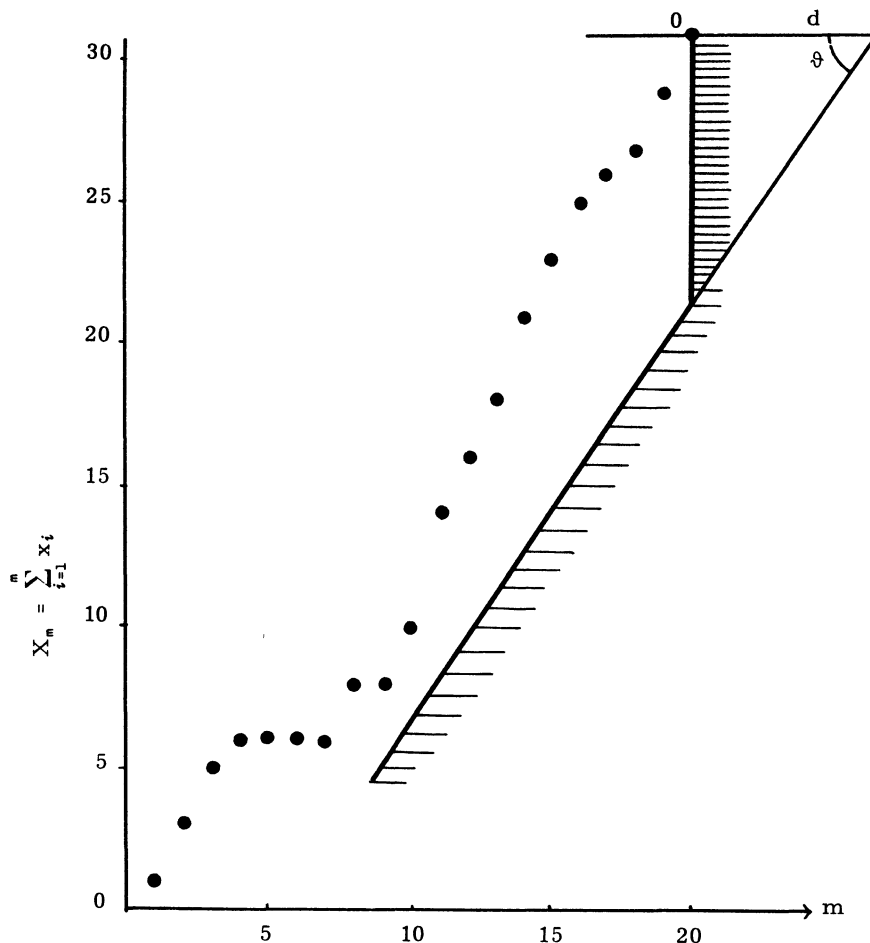


Figure 12 - Carte de contrôle des défauts cumulés après polissage.

Aucun point ne franchit la limite de contrôle, 10 échantillons de la qualité qu'on désire ne pas accepter ne sont pas rejetés par le contrôle. Ce résultat n'a rien de surprenant le calcul du délai moyen  $h$  d'après la formule (20) donne  $h \sim 17$ .

La carte de Shewart appliquée aux données du tableau 4 ne décèle pas davantage l'altération de qualité intervenue à partir du 11ème échantillon.

## 8 - CONTROLE DE VARIABLES SUIVANT UNE LOI BINOMIALE -

8.1 - Base théorique. Johnson et Leone ont appliqué à une variable suivant la loi binomiale la méthode des tests progressifs comme dans les cas précédents.

Soit la variable aléatoire  $x$  qui peut prendre les valeurs 1 et 0 avec les probabilités respectives  $p$  et  $q$  ( $p + q = 1$ ). Ayant tiré successivement  $m$  individus de la population et testant l'hypothèse  $H_1$  ( $p = p_1$ ) contre  $H_0$  ( $p = p_0$ ), le rapport de vraisemblance est :

$$\lambda = \prod_{i=1}^m \frac{p_1^{x_i} q_1^{1-x_i}}{p_0^{x_i} q_0^{1-x_i}}$$

Avec les notations déjà adoptées on acceptera  $H_1$  si :

$$\sum x_i \log \frac{p_1 q_0}{p_0 q_1} + m \log \frac{q_1}{q_0} \geq \log \frac{1 - \beta}{\alpha}$$

Les logarithmes ne sont plus nécessairement des logarithmes népériens comme dans les contrôles précédents.

Deux cas sont à envisager :

1er cas :  $p_1 > p_0$

$$\sum_1^m x_i \geq - \frac{\log \alpha}{\log \frac{p_1 q_0}{p_0 q_1}} + \frac{\log \frac{q_0}{q_1}}{\log \frac{p_1 q_0}{p_0 q_1}} m$$

avec l'approximation déjà faite  $\log(1 - \beta) \sim 0$

2ème cas :  $p_1 \leq p_0$

$$\sum_1^m x_i \leq - \frac{\log \alpha}{\log \frac{p_1 q_0}{p_0 q_1}} + \frac{\log \frac{q_0}{q_1}}{\log \frac{p_1 q_0}{p_0 q_1}} m$$

La limite de contrôle du nombre de défauts cumulés est dans les deux cas une fonction linéaire croissante du nombre  $m$  des objets examinés. Si l'on applique un contrôle bilatéral pour  $p_0$  suivant les inégalités ci-dessus le risque de 1ère espèce est  $2\alpha$ .

Au lieu de considérer les objets tirés un par un de la population si l'on suppose qu'on puise des échantillons successifs de même effectif ou d'effectifs différents on aboutit à la même définition des limites de contrôle si l'on représente par  $X_i$  le nombre des défectueux dans le  $i$ ème échantillon, si l'on remplace  $m$  par  $\sum_1^m N_i$ ,  $N_i$  étant l'effectif du  $i$ ème échantillon.

L'équation de la droite limite de contrôle s'écrit alors

$$\sum_1^m X_i = - \frac{\log \alpha}{\log \frac{p_1 q_0}{p_0 q_1}} + \frac{\log \frac{q_0}{q_1}}{\log \frac{p_1 q_0}{p_0 q_1}} \sum_1^m N_i \quad (21)$$

Les paramètres de la carte de contrôle en  $V$  sont :

$$d = - \frac{\log \alpha}{\log \frac{q_0}{q_1}} \quad (22)$$

$$\text{tg } \vartheta = \frac{\log q_0/q_1}{\log p_1 q_0/p_0 q_1} \quad (23)$$

Dans leur article fondamental, Johnson et Leone ont calculé  $d$  et  $\vartheta$  de la table VIII pour les valeurs usuelles de  $p_0$ ,  $p_1$  et  $\alpha$ .

Table VIII

Limites de contrôle pour des variables binomiales

a) Valeurs de  $\vartheta$  (indépendantes de  $\alpha$ )

$p_0$	$p_1$				$p_0$	$p_1$				
	0,025	0,05	0,075	0,10		0,15	0,20	0,25	0,30	0,35
0,005	0°43'	1° 8'	1°30'	1°51'	0,10	7° 3'	8°16'	9°25'	10°33'	11°39'
0,01	0°56'	1°26'	1°52'	2°17'	0,12	7°40'	8°56'	10° 8'	11°18'	12°26'
0,015	1° 7'	1°40'	2° 9'	2°36'	0,14	8°15'	9°34'	10°49'	12° 0'	13°10'
0,02	1°17'	1°53'	2°24'	2°53'	0,16	-	10°10'	11°27'	12°40'	13°52'
0,025	-	2° 4'	2°37'	3° 8'	0,18	-	10°45'	12° 3'	13°18'	14°31'
0,03	-	2°15'	2°49'	3°21'	0,20	-	-	12°39'	13°55'	15° 9'
0,035	-	2°25'	3° 1'	3°34'	0,25	-	-	-	15°21'	16°38'
0,04	-	2°34'	3°12'	3°46'						
0,045	-	2°43'	3°22'	3°58'						
0,05	-	-	3°32'	4° 8'						
0,06	-	-	3°51'	4°29'						
0,07	-	-	4° 9'	4°49'						
0,08	-	-	-	5° 8'						
0,09	-	-	-	5°25'						

b) Valeurs de  $d$

$p_0$	$p_1$	$\alpha = 0,05$	$\alpha = 0,025$	$\alpha = 0,01$	$\alpha = 0,005$	$\alpha = 0,00135$	$\alpha = 0,001$	$\alpha = 0,0005$
0,02	0,05	96,3	119	148	170	212	222	244
0,04	0,05	286	352	440	506	631	659	726
0,04	0,075	80,7	99,3	124	143	178	186	205
0,06	0,10	186	229	286	329	411	429	472
0,08	0,10	136	168	209	241	300	314	346
0,10	0,15	52,3	64,4	80,4	92,5	115	121	133
0,15	0,20	49,4	60,8	76,0	87,4	109	114	125
0,15	0,25	23,9	29,5	36,8	42,3	52,8	55,2	60,7
0,20	0,25	46,4	57,2	71,4	82,1	102	107	118
0,20	0,30	22,4	27,6	34,5	39,7	49,5	51,7	56,9
0,25	0,30	43,4	53,5	66,8	86,9	95,8	100	110
0,30	0,35	40,4	49,8	62,1	71,5	89,1	93,2	103

8.2 - Délai moyen après changement du niveau de qualité. Si la proportion des pièces défectueuses passe de  $p_0$  à  $p_1$ , le nombre moyen de pièces à contrôler avant de déceler ce changement est donné par la formule :



$$h = \frac{-\log \alpha}{p_1 \log p_1/p_0 + q_1 \log q_1/q_0} \quad (24)$$

La formule (24) s'obtient aisément en remplaçant dans l'équation (21)  $\sum_1^m X_i$  par son espérance mathématique  $p_1 \sum_1^m N_i$ . Le délai moyen représente le nombre moyen d'articles vérifiés.

8.3 - Exemple numérique. Le tableau 5 contient les données d'un contrôle par nombre d'unités défectueuses dans des échantillons de taille variable [5].

Tableau 5  
Nombre de défectueux

N° de l'échantillon	Taille de l'échantillon $N_i$	Nombre de défectueux $X_i$	$\Sigma N_i$	$\Sigma X_i$
1	900	29	900	29
2	650	20	1550	49
3	750	15	2300	64
4	450	6	2750	70
5	275	5	3025	75
6	700	5	3725	80
7	450	9	4175	89
8	800	8	4975	97
9	1200	3	6175	100
10	1200	6	7375	106
11	600	2	7975	108
12	1300	4	9275	112
13	600	2	9875	114

On prend comme niveau de qualité moyen  $p_0 = 0,01$ , l'on désire un contrôle bilatéral pour  $p_1 = 0,02$  et  $p_1' = 0,005$  assorti, d'un risque de lère espèce  $\alpha = 0,005$  pour chacune des hypothèses  $p_1$  et  $p_1'$  soit un risque total  $2\alpha = 0,01$ .

Des formules (21) et (22) on déduit les éléments qui permettent de contruire le masque de contrôle. On a :

- pour  $p_1 = 0,02$ ,  $\alpha = 0,005$

$$d = -\frac{\log 0,005}{\log (0,99/0,98)} = 522$$

$$\text{tg } \vartheta = \frac{\log (0,99/0,98)}{\log (0,02 \times 0,99/0,01 \times 0,98)} = 0,0144$$

- pour  $p'_1 = 0,005$ ,  $\alpha = 0,005$

$$d' = \frac{\log 0,005}{\log (0,99/0,995)} = - 1055$$

$$\operatorname{tg} \vartheta' = \frac{\log (0,99/0,995)}{\log (0,005 \times 0,99/0,01 \times 0,995)} = 0,0072$$

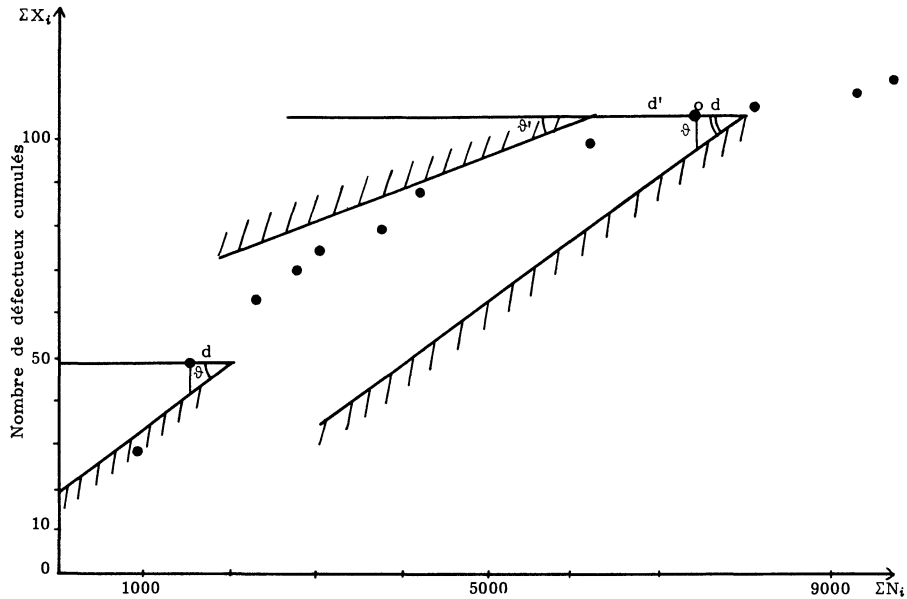


Figure 13 - Carte de contrôle du nombre de défectueux cumulés.

Les données du tableau 5 sont représentées sur la figure 13 sur laquelle sont tracées les limites de contrôle du masque pour surveillance de la variation de la qualité dans les deux sens.

On constate que la dégradation de la qualité au niveau 2 % de défectueux est signalée dès le second échantillon. Il aurait fallu reprendre le cumul des observations à partir de cet échantillon qui justifiait une intervention sur le processus. Nous voyons d'autre part que le 10ème point montre qu'on ne peut pas accepter le niveau de qualité à 0,5 % de défectueux, le chemin des points représentatifs coupe la limite de contrôle  $d'$ ,  $\vartheta'$ .

## 9 - CONCLUSION -

Les travaux de N. L. Johnson et F. C. Leone apportent aux cartes de contrôle cumulatives une importante justification théorique qui permet de situer des limites de contrôle rationnelles eu égard à l'objectif qui se fixe l'utilisateur. Malgré cette base solide, nous ne pensons pas que les

nouvelles cartes de contrôle doivent éliminer les cartes de contrôle classiques pour la surveillance de la qualité en cours de fabrication. Si elles présentent l'avantage d'une efficacité plus grande, elles sont d'une utilisation plus compliquée. Les cartes de contrôle de Shewart facilement installées auprès de chaque machine, d'une interprétation immédiate permettent à l'ouvrier de suivre la qualité de son travail et de s'intégrer dans la politique qualité de son atelier. Cela constitue un avantage psychologique considérable qui doit entraîner l'adhésion du personnel en vue de la création du climat de la bonne qualité dans l'entreprise.

Les cartes par observations cumulées pourraient probablement être réservées au chef d'atelier qui dispose du temps nécessaire pour les analyser attentivement et en tirer des enseignements sur la marche des machines.

Les cartes de contrôle par cumul des observations sont récentes, elles n'ont pas encore été suffisamment répandues pour qu'on puisse juger de leurs avantages pratiques. Il serait bon qu'elles soient largement expérimentées dans l'industrie afin de dégager la politique de leur emploi, leur exacte valeur pratique et leur adaptation aux buts qu'on pourrait raisonnablement leur assigner. Cette expérience fait encore défaut.

#### REFERENCES

- [1] BARNARD G. A. - "Cumulative Charts and Stochastic Processes" Journal of the Royal Statistical Society - Série B - 1959 - 21 - 2, p. 239/271.
- [2] FREUND R. A. - "Graphical Process Control" Industrial Quality Control, 1962 - XVIII - 7, p. 15/22.
- [3] GOLDSMITH P. L. and WHITFIELDS D. H. - "Average Run Lengths in Cumulative Chart Quality Control Schemes" Technometrics - Feb. 1961 - III - 1 - p. 11/20.
- [4] JOHNSON N. L. - "A simple theoretical Approach to cumulative sum charts" Journal of the American Statistical Association, Déc. 1961 - 56 - 296 p. 835/840.
- [5] JOHNSON N. L. and LEONE F. C. - "Cumulative Sum Control Charts. Mathematical Principles Applied to their Construction and Use". Industrial Quality Control - 1962 - XVIII - 12 - p. 15/21  
XIX - 1 - p. 29/36  
XIX - 2 - p. 22/28
- [6] KEMP K. W. - "The average run Length of the Cumulative Sum Chart when a V Mask is used". Journal of the Royal Statistical Society - Serie B - 1961 - 23 - 1, p. 149/153.
- [7] PAGE E. S. - "Cumulative Sum Charts" Technometrics - Feb. 1961 - III - 1 - p. 1/9.

- [8] PAGE E. S. - "Cumulative Sum Schemes using Gauging".  
Technometrics -Feb. 1962 - IV - 1 - p. 97/107.
- [9] TRUAX H. M. - "Cumulative Sum Charts and Their Application to the  
Chemical Industry.  
Industrial Quality Control - XVIII - 6 - Déc. 1961 - p. 18/25.