

# REVUE DE STATISTIQUE APPLIQUÉE

M. GIRAULT

## **Première initiation aux processus de Markov**

*Revue de statistique appliquée*, tome 12, n° 3 (1964), p. 5-14

[http://www.numdam.org/item?id=RSA\\_1964\\_\\_12\\_3\\_5\\_0](http://www.numdam.org/item?id=RSA_1964__12_3_5_0)

© Société française de statistique, 1964, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « *Revue de statistique appliquée* » (<http://www.sfds.asso.fr/publicat/rsa.htm>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

# PREMIÈRE INITIATION AUX PROCESSUS DE MARKOV

M. GIRAULT

Professeur à l'Institut de Statistique (Paris)

Markov a publié en 1907, sous le titre "*Cas remarquable d'épreuves dépendantes*", une étude d'un modèle d'épreuves aléatoires liées en probabilité. Ce modèle est particulièrement intéressant :

- du point de vue théorique : par ses propriétés remarquables (ergodicité) ;

- du point de vue pratique : plus général que les suites d'épreuves indépendantes, ce modèle reste pourtant relativement simple et peut effectivement être appliqué dans des domaines variés.

## 1. DEFINITION ET NOTATIONS

Un "système" évolue dans le temps et peut prendre un nombre *fini* d'états. Pour fixer les idées, supposons qu'il y ait 3 états possibles A, B, C.

On observe le système sur une suite croissante discrète d'instants :

$$t_0 < t_1 < t_2 \dots < t_n$$

où il prend les états notés :

$$E_0 E_1 \dots E_n \dots$$

Cette suite d'états  $\{E_n\}$  est aléatoire ; à chaque suite finie est attachée une probabilité.

La définition en probabilité de la suite  $\{E_n\}$  se fait de la façon suivante :

a) Etat initial :  $E_0$  .

$E_0$  est A, B, ou C avec les proba :  $a_0, b_0, c_0$

b) Loi d'évolution : Si l'on connaît :  $E_0, E_1, E_2 \dots E_n$  la loi de  $E_{n+1}$  dépend de l'état pris par  $E_n$  mais ne dépend ni de  $n$ , ni des états antérieurs  $E_0 \dots E_{n-1}$ .

Si  $\{E_n = A\}$  :  $E_{n+1}$  prend les états A B C  
avec les proba.  $p_{aa} p_{ab} p_{ac}$

ces probabilités réalisent  $p_{aa} + p_{ab} + p_{ac} = 1$

Si  $\{E_n = B\}$  :  $E_{n+1}$  prend les états : A B ou C  
 avec les probabilités :  $p_{ba}$   $p_{bb}$   $p_{bc}$

$$p_{ba} + p_{bb} + p_{bc} = 1$$

Enfin, si  $\{E_n = C\}$  :  $E_{n+1}$  prend les états : A B ou C  
 avec les probabilités :  $p_{ca}$   $p_{cb}$   $p_{cc}$

$$p_{ca} + p_{cb} + p_{cc} = 1$$

Ces trois lois de probabilité définissent l'évolution du système.

On peut résumer ces données dans un tableau carré des 9 nombres :

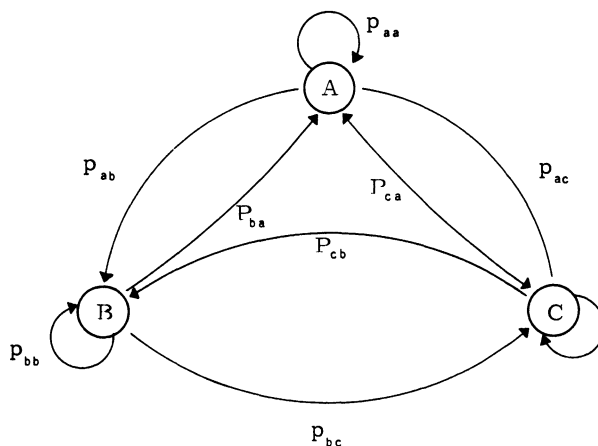
$$p_{ij} \text{ où } i = (A, B, C) \\ j = (A, B, C)$$

$p_{ac}$  par exemple est la probabilité de passer de A à C en une épreuve.

$$M = \begin{bmatrix} p_{aa} & p_{ba} & p_{ca} \\ p_{ab} & p_{bb} & p_{cb} \\ p_{ac} & p_{bc} & p_{cc} \end{bmatrix}$$

M est dite *matrice des probabilités conditionnelles*  
 ou " " " " de passage

Autre schématisation des règles d'évolution du système.



### Réalisation concrète

On dispose de 3 urnes notées (A), (B), (C). Chaque urne contient 3 types de boules notées A, B, C, mais dans des proportions différentes :

Composition de (A)

boules : A B C  
 proportions :  $p_{aa}$   $p_{ab}$   $p_{ac}$

avec  $p_{aa} + p_{ab} + p_{ac} = 1$ .

Composition de (B)

proportions :  $p_{ba}$   $p_{bb}$   $p_{bc}$

Composition de (C)

proportions :  $p_{ca}$   $p_{cb}$   $p_{cc}$

Règles opératoires

Une première épreuve particulière fixe l'état initial ;

A ou B ou C suivant les probabilités  $a_o$ ,  $b_o$ ,  $c_o$ .

Par exemple : B a été obtenu. On tire alors une boule de l'urne (B) et l'on obtient par exemple A.

On tire une boule de l'urne (A) etc. A chaque étape, la dernière boule tirée fixe l'urne dans laquelle va s'effectuer le tirage suivant. Chaque boule tirée est naturellement remise dans son urne.

2. ETUDE PROBABILISTE

Loi de  $E_1$  :

$E_1$  peut prendre les états A, B ou C désignons par  $a_1$   $b_1$   $c_1$  les probabilités correspondantes.

$$a_1 = \text{Prob. } \{E_1 = A\} = \text{Prob de réaliser l'une des suites } \begin{cases} AA \\ BA \\ CA \end{cases}$$

d'où 
$$a_1 = a_o p_{aa} + b_o p_{ba} + c_o p_{ca} \tag{2-1}$$

de même  $b_1 = \text{prob de réaliser l'une des suites } \begin{cases} AB \\ BB \\ CB \end{cases}$

$$b_1 = a_o p_{ab} + b_o p_{bb} + c_o p_{cb} \tag{2-2}$$

et 
$$c_1 = a_o p_{ac} + b_o p_{bc} + c_o p_{cc}$$

Ces trois relations se résument dans le tableau suivant.

		$a_o$		$b_o$		$c_o$
$a_1$				$p_{aa}$	$p_{ba}$	$p_{ca}$
$b_1$				$p_{ab}$	$p_{bb}$	$p_{cb}$
$c_1$				$p_{ac}$	$p_{bc}$	$p_{cc}$

Les règles de calcul sont les suivantes : par exemple :  
 $b_i$  = somme des  $p_{ib}$  de la ligne en face de  $b_1$  affectés des coefficients  $a_o$ ,  $b_o$ ,  $c_o$  (relation 2-2).

on note :

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} & & \\ & M & \\ & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ b_0 \\ c_0 \end{bmatrix}$$

Soit enfin, en posant :

$$P_0 = \begin{bmatrix} a_0 \\ b_0 \\ c_0 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad P = \begin{bmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{bmatrix}$$

$$P_1 = MP_0 \tag{2-4}$$

M est une matrice (3 × 3) - (3 lignes - 3 colonnes)  
 P<sub>0</sub> et P<sub>1</sub> sont des matrices (3 × 1)

Loi de E<sub>2</sub>

$$a_2 = \text{prob} \{E_2 = A\}$$

$$\text{Soit } P_2 \text{ le vecteur de composantes } b_2 = \text{''} = B$$

$$c_2 = \text{''} = C$$

a) Expression de P<sub>2</sub> en fonction de P<sub>1</sub>

état à l'instant (1)	Proba	état à l'instant (2)	Proba
A	a <sub>1</sub>	A	a <sub>2</sub> = a <sub>1</sub> p <sub>aa</sub> + b <sub>1</sub> p <sub>ba</sub> + c <sub>1</sub> p <sub>ca</sub>
B	b <sub>1</sub>	B	b <sub>2</sub> = a <sub>1</sub> p <sub>ab</sub> + b <sub>1</sub> p <sub>bb</sub> + c <sub>1</sub> p <sub>cb</sub>
C	c <sub>1</sub>	C	c <sub>2</sub> = a <sub>1</sub> p <sub>ac</sub> + b <sub>1</sub> p <sub>bc</sub> + c <sub>1</sub> p <sub>cc</sub>

d'où :

$$P_2 = MP_1 \text{ et plus généralement } P_{n+1} = MP_n$$

b) Expression en fonction de P<sub>0</sub>

$$P_2 = MP_1 \text{ et } P_1 = MP_0 \quad \text{d'où } P_2 = M(MP_0)$$

mais on peut exprimer directement le passage de P<sub>0</sub> à P<sub>2</sub>, c'est-à-dire expliciter la matrice (notée M<sup>2</sup>) qui, appliquée à P<sub>0</sub> équivaut à deux transformations successives par M. M<sup>2</sup> est telle que, quel que soit P, M<sup>2</sup>p = M(MP) donc M<sup>2</sup> = M.M (équivalence opératoire).

état à l'instant (0)	Proba	état à l'instant (1)	état à l'instant (2)	Proba
A	a <sub>0</sub>	A	A	a <sub>2</sub> = a <sub>0</sub> p <sub>aa}^{(2)} + b<sub>0</sub> p<sub>ba}^{(2)} + c<sub>0</sub> p<sub>ca}^{(2)}</sub></sub></sub>
B	b <sub>0</sub>	B	B	b <sub>2</sub> = a <sub>0</sub> p <sub>ab}^{(2)} + b<sub>0</sub> p<sub>bb}^{(2)} + c<sub>0</sub> p<sub>cb}^{(2)}</sub></sub></sub>
C	c <sub>0</sub>	C	C	c <sub>2</sub> = a <sub>0</sub> p <sub>ac}^{(2)} + b<sub>0</sub> p<sub>bc}^{(2)} + c<sub>0</sub> p<sub>cc}^{(2)}</sub></sub></sub>

où  $p_{ab}^{(2)}$  par exemple est la probabilité de passer de A à B en deux étapes (de l'instant 0 à l'instant 2 ou plus généralement de l'instant n à l'instant n + 2).

$$\text{donc } M^2 = \begin{bmatrix} p_{aa}^{(2)} & p_{ba}^{(2)} & p_{ca}^{(2)} \\ p_{ab}^{(2)} & & \\ p_{ac}^{(2)} & & \end{bmatrix} = M \cdot M$$

et  $p_{ab}^{(2)}$  par exemple vaut :  $p_{aa} p_{ab} + p_{ab} p_{bb} + p_{ac} p_{cb}$ .

$$p_{ab}^{(2)} = \text{Produit scalaire } \begin{bmatrix} p_{ab} & p_{cb} & p_{cb} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} p_{aa} \\ p_{ab} \\ p_{ac} \end{bmatrix}$$

ligne (b) de M                      colonne (a) de M

	(A)	(B)	(C)						
(A)	$p_{aa}^{(2)}$	$p_{ba}^{(2)}$	$p_{ca}^{(2)}$	=	[	]			
(B)	$p_{ab}^{(2)}$	$p_{bb}^{(2)}$	$p_{cb}^{(2)}$				×	[	]
(C)	$p_{ac}^{(2)}$	$p_{bc}^{(2)}$	$p_{cc}^{(2)}$						
	$M^2$			M	M				

élément  $p_{ij}$  = produit scalaire : ligne j de M x col. i de M. Telle est la règle de calcul du produit de deux matrices.

Loi de  $P_n$ . Les résultats précédents se généralisent à un rang quelconque :

$$P_n = MP_{n-1} = M \cdot MP_{n-2} = \dots = \underbrace{M \cdot M \dots MP_0}_{n \text{ fois}}$$

mais  $M \cdot M = M^2$  calculée à partir de M suivant la règle précédente (ligne x colonne).

$$MM^2 = M^2 \cdot M = M^3 \text{ calculée à partir de M et de } M^2$$

d'où :

$$M^h M^k = \underbrace{MM \dots M}_{h \text{ fois}} \cdot \underbrace{M \cdot M \dots M}_{k \text{ fois}} = M^{h+k} = M^k M^h$$

enfin :

$$P_n = M^n P_0$$

la matrice

$$M^n = \begin{bmatrix} p_{aa}^{(n)} & p_{ba}^{(n)} & p_{ca}^{(n)} \\ p_{ab}^{(n)} & p_{bb}^{(n)} & p_{cb}^{(n)} \\ p_{ac}^{(n)} & p_{bc}^{(n)} & p_{cc}^{(n)} \end{bmatrix}$$

= matrice des probabilités de passage en n étapes.

$$p_{ab}^{(n)} \text{ par exemple} = \text{Prob} \{E_{r+n} = B\} \text{ si } \{E_r = A\}$$

Conclusion : L'évolution est complètement décrite par la donnée de M :

- la loi "à priori" à l'instant n est  $P_n = M^n P_0$ .
- les probabilités conditionnelles de  $E_{t+n}$  connaissant  $E_t$  sont les éléments de  $M^n$ .

### 3. LOI LIMITE POUR $n = \infty$

Si M a tous ses éléments  $> 0$ , la matrice M tend pour  $n \rightarrow \infty$  vers une matrice limite (notons-la  $M^\infty$ ), où toutes les colonnes sont *identiques* :

$$\text{on a } M^\infty = \begin{bmatrix} a & a & a \\ b & b & b \\ c & c & c \end{bmatrix}$$

avec  $a > 0, b > 0, c > 0, a + b + c = 1$

Conséquence :

$$P^\infty = M^\infty P_0 = \begin{bmatrix} a & a & a \\ b & b & b \\ c & c & c \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$$

d'où :

$$p^\infty = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = P$$

donc pour n assez grand, le vecteur  $P$  est voisin du vecteur  $\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$  vecteur *indépendant de  $P_0$  et indépendant de n.*

L'évolution vers cette loi limite a un caractère exponentiel, c'est dire qu'on s'en approche *très vite.*

Exemple numérique :

$$M = \begin{bmatrix} 0,5 & 0,5 & 0 \\ 0,5 & 0 & 1 \\ 0 & 0,5 & 0 \end{bmatrix}$$

$$M^2 = \begin{bmatrix} 0,5 & 0,25 & 0,5 \\ 0,25 & 0,75 & 0 \\ 0,25 & 0 & 0,5 \end{bmatrix}$$

$$M^8 = \begin{bmatrix} 0,415 & 0,364 & 0,446 \\ 0,364 & 0,496 & 0,280 \\ 0,221 & 0,14 & 0,274 \end{bmatrix}$$

$$M^{16} = \begin{bmatrix} 0,40 & 0,39 & 0,40 \\ 0,39 & 0,41 & 0,39 \\ 0,21 & 0,20 & 0,21 \end{bmatrix}$$

$$M^\infty = \begin{bmatrix} 0,4 & 0,4 & 0,4 \\ 0,4 & 0,4 & 0,4 \\ 0,2 & 0,2 & 0,2 \end{bmatrix}$$

Le régime limite est stable

Supposons que pour  $n$  assez grand, (disons  $n > N$ ) on ait :

$$M^n \neq M$$

et par suite :

$$P^n \neq P$$

Mais  $P^{n+1} = MP^n$  et  $P^{n+1} \neq P$  puisque  $n + 1 > N$ .

D'une façon plus précise :  $P$  est tel que  $P = MP$

En effet :

$$P^{n+1} = MP^n \tag{1}$$

faisons tendre  $n$  vers l'infini :  $P^n$  et  $P^{n+1}$  tendent vers  $P$  en réalisant sans cesse la relation (1). Cette relation est donc réalisée à la limite et :

$$P = MP \tag{2}$$

Si, à l'instant  $n$  la loi des états est  $P$  ; aux instants  $(n + 1)$ ,  $(n + 2)$ ... elle sera encore  $P$  : on dit que le système est en *régime stable*.

Ainsi dans l'exemple numérique précédent :

$$\begin{bmatrix} 0,4 \\ 0,4 \\ 0,2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,5 & 0,6 & 0 \\ 0,5 & 0 & 1 \\ 0 & 0,5 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0,4 \\ 0,4 \\ 0,2 \end{bmatrix}$$

La relation (2) permet d'exprimer directement  $P$ , loi limite en fonction de  $M$  et de calculer effectivement  $P$  lorsque la matrice  $M$  est simple.

Les composantes  $a$ ,  $b$ ,  $c$  de  $P$  sont en effet une solution du système d'équations linéaires.

$$(M - I) \cdot P = 0 \quad \text{soit} \quad \begin{cases} (P_{aa} - 1) a + P_{ba} b + P_{ca} c = 0 \\ P_{ab} a + (P_{ba} - 1) b + P_{cb} c = 0 \\ P_{ac} a + P_{cb} b + (P_{cc} - 1) c = 0 \end{cases}$$

On dit que  $P$  est un vecteur propre de la matrice  $M$ .

Discussion. Le type d'évolution décrit en (3) n'est pas le seul possible. Il est le plus simple ; on le désigne sous le nom de "cas positivement régulier". Il est certainement réalisé si  $M$  ne contient aucun élément nul. L'exemple numérique montre que cette condition (suffisante) n'est pas nécessaire. On démontre que la condition nécessaire et suffisante pour qu'on soit dans le cas positivement régulier est qu'il existe un entier  $k$  tel que  $M^k$  ne contienne aucun élément nul. Les singularités sont donc liées à l'existence et à la place des zéros dans  $M$ . On aura une idée des particularités qui peuvent se présenter en étudiant les évolutions définies par les matrices suivantes :



$$\begin{bmatrix} 0,6 & 0 & 0 \\ 0,4 & 0,2 & 0,5 \\ 0 & 0,8 & 0,5 \end{bmatrix} ; \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} ; \begin{bmatrix} 0,5 & 0 & 0 \\ 0,3 & 0 & 1 \\ 0,2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

#### 4. EXTENSIONS

Le modèle présenté ci-dessus est le modèle fondamental de Markov. Il présente les particularités suivantes :

a) C'est un *processus discret* : le système est observé sur une suite *discrète* d'instants  $t_0 < t_1 < t_2 \dots < t_n \dots$

b) L'ensemble des états est *fini*.

c) Le processus est homogène dans le temps. La matrice des probabilités conditionnelles est *indépendantes du temps* ; en d'autres termes, la loi de  $E_{n+1}$  connaissant  $E_0, E_1 \dots E_n$  dépend de l'état pris par  $E_n$  mais non de  $n$ . On obtiendra un modèle plus général en supposant que la matrice  $M_{t_n}^{t_{n+1}}$  des probabilités de passage de  $E_n$  à  $E_{n+1}$  dépend de  $(t_n)$ . Ce cas est d'un intérêt limité car il ne présente pas de propriétés générales simples. Par contre il est intéressant de remplacer les conditions (a) et (b) par des hypothèses plus larges.

Processus à ensemble dénombrable d'états ; les principales propriétés énoncées en (2) et (3) s'étendent au cas où  $\epsilon$ , ensemble des états, est dénombrable (ensemble des entiers naturels par exemple). Naturellement, il faut utiliser des matrices à une infinité de dimensions et l'étude théorique est de ce fait plus délicate).

Processus permanent : une autre extension consiste à observer le système *en permanence*, c'est-à-dire à étudier  $E_{(t)}$ , pour  $t$  variant sur *l'échelle continue* du temps. L'étude théorique des modèles permanents généraux est difficile. Il existe par contre des exemples simples de processus permanents : les processus de Markoc-Laplace et les processus poissoniens par exemple.

#### 5. EXEMPLE D'APPLICATION

Pour terminer cette rapide présentation des processus de Markov, nous voudrions montrer sur un exemple le type d'application à laquelle ils donnent lieu.

A un poste on a besoin en permanence d'une machine. Celle-ci peut tomber en panne ; dans ce cas elle est retirée et envoyée en fin de journée à l'atelier de réparation et rapportée le lendemain soir en état de marche. On dispose d'une deuxième machine qui est mise en service dès que la première est retirée. Les deux machines sont identiques et également susceptibles de tomber en panne. Le nombre de pannes par jour est aléatoire, défini par la loi de  $x$  suivante(\*)

-----  
 (\*) On suppose en fait que les pannes successives sont décrites par un processus ponctuel de Poisson uniforme, de fréquence journalière  $m = 0,5$ .

$$P_0 = \text{Proba aucune panne} = 0,6$$

$$P_1 = \text{Proba 1 " } = 0,3$$

$$\pi_2 = \text{Proba 2 " } = 0,1$$

(Le nombre de pannes ne peut pas dépasser 2 car alors le poste est arrêté).

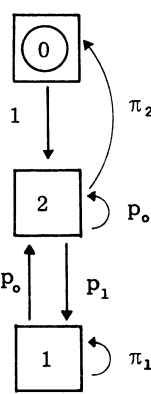
En début de journée, le système peut être dans l'un des trois états suivants :

- (0) les deux machines sont en réparations ;
- (1) une machine fonctionne, l'autre est en réparation ;
- (2) les deux machines sont en état de marche.

L'évolution aléatoire du système est décrite par la matrice suivante :

Matrice des probabilités  
de passage  
instant n

		états		
		0	1	2
instants (n + 1)	états			
	0	0	0	$\pi_2$
	1	0	$\pi_1$	$P_1$
2	1	$P_0$	$P_0$	



où  $\pi_1 = P_1 + \pi_2 = 0,4$

### Résolution

Si l'on désigne par  $A_0$ ,  $A_1$ ,  $A_2$  les probabilités d'être dans les états (0) ; (1) ; et (2) en régime stable, ces probabilités réalisent :

$$\begin{bmatrix} A_0 \\ A_1 \\ A_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0,1 \\ 0 & 0,4 & 0,3 \\ 1 & 0,6 & 0,6 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} A \\ A \\ A \end{bmatrix}$$

d'où :

$$A_0 = 1/16 \qquad A_1 = 5/16 \qquad A_2 = 10/16$$

On peut en déduire l'espérance mathématique  $V$  du temps perdu par manque de machine pendant une journée.

Si au début de la journée l'état est (0) - temps perdu = 1

" " " (1) - esp. math. temps perdu = 0,16

" " " (2) - esp. math. temps perdu = 0,03

d'où :

$$V = 1/16 + 0,16 \cdot 5/16 + 0,03 \cdot 10/16 = 2,1/16 \quad 1/8$$

Cela permet d'établir le bilan économique de l'organisation pour savoir si c'est bien deux machines qu'il faut avoir pour un poste (ou une seule ? ou trois ? ...) compte tenu d'une part du coût de la, ou des machines supplémentaires et, d'autre part, du temps perdu par le poste, d'autant plus important qu'il y a peu de machines.