

# REVUE DE STATISTIQUE APPLIQUÉE

L. PROUZA

## Sur la théorie linéaire des régulateurs automatiques

*Revue de statistique appliquée*, tome 13, n° 2 (1965), p. 95-100

[http://www.numdam.org/item?id=RSA\\_1965\\_\\_13\\_2\\_95\\_0](http://www.numdam.org/item?id=RSA_1965__13_2_95_0)

© Société française de statistique, 1965, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « *Revue de statistique appliquée* » (<http://www.sfds.asso.fr/publicat/rsa.htm>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

# SUR LA THÉORIE LINÉAIRE DES RÉGULATEURS AUTOMATIQUES

L. PROUZA

On considère une machine sur laquelle sont fabriquée dans des intervalles de temps discrets des produits ayant une caractéristique de qualité mesurable. Les variations de cette caractéristique pendant la production ont des causes systématiques (déterminées) et aléatoires. Les causes déterminées peuvent être éliminées par la régulation de la machine.

Dans cet article, on considère un régulateur automatique linéaire, effectuant le filtrage optimal (selon le critère d'erreur quadratique minimum) d'un "bruit blanc" à l'entrée et de l'élimination dans un nombre fini de pas d'une perturbation déterminée de la forme d'un "saut" (régulateur du premier type) ou d'un "saut de vitesse" (régulateur du second type).

Il est démontré pour ces deux formes de perturbation et pour le critère d'erreur quadratique minimum que le régulateur du premier type est pratiquement toujours meilleur que le régulateur du second type. Cette conclusion a une importance pratique parce que le régulateur du premier type peut être effectivement réalisé de façon assez simple.

## 1. REGULATEUR AUTOMATIQUE LINEAIRE

Considérons le schéma de la figure 1. Le bloc avec fonction de transfert 1 représente la machine idéalisée, sur laquelle sont fabriqués des produits ayant une caractéristique mesurable dont la valeur est représentée par  $\eta$ , dans des intervalles de temps de longueur 1. Le bloc avec la fonction de transfert  $z^{-\delta}$  ( $\delta > 0$ ) représente le retard nécessaire pour passer le produit à l'instrument de mesure et pour le mesurer. La valeur mesurée est comparée avec la valeur normale, qui peut être supposée nulle, sans perte de généralité. L'opération de mesure est représentée par le différentiel à droite sur la figure 1. Le résultat de la mesure avance sur le filtre avec la fonction de transfert  $F(z)$  avec un retard  $\varepsilon > 0$ . Le signal du filtre sert à commander le changement de position de l'organe d'exécution de la machine. Ce changement doit compenser des perturbations aléatoires (bruits), qui dans la figure 1 sont considérés comme une suite stationnaire  $\{\xi(l)\}$ , ( $l = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ).

Nous considérons symboliquement la compensation comme soustraction sur le différentiel à gauche dans la figure 1, compte tenu de la linéarité de tout le schéma. Dans ce qui suit, nous considérons :

$$\delta + \varepsilon = 1 \quad (1)$$

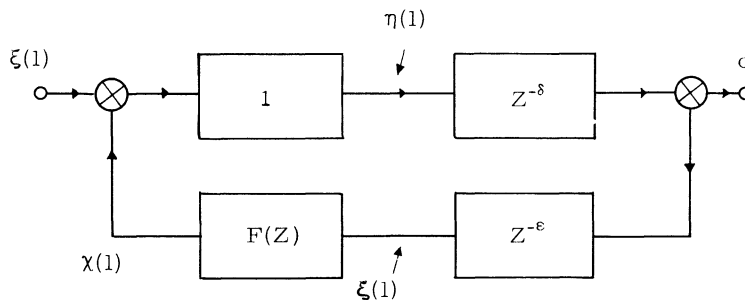


Fig 1

D'après le figure 1, il est évident que pour chaque n

$$\eta(n) = \xi(n) - \chi(n), \quad (2)$$

$$\zeta(n) = \eta(n - 1), \quad (3)$$

$$\chi(n) = f [\eta(n - 1), \eta(n - 2), \dots] \quad (4)$$

où f est la combinaison linéaire sur la suite entre parenthèse.

Nous demandons que le réglage soit optimal selon Kolmogorov-Wiener, c'est-à-dire :

$$E [\eta^2(n)] = E [(\xi(n) - \chi(n))^2] = \min. \quad (5)$$

Il est clair que pour former  $\chi(n)$  nous pouvons employer les termes jusqu'à  $\xi(n - 1)$ . Nous allons supposer.

$$\chi(n) = a_1 \xi(n - 1) + a_2 \xi(n - 2) + \dots \quad (6)$$

Les formules générales pour déterminer la fonction de transfert  $F(z)$  du filtre dans le feedback sont mentionnées dans (L2).

## 2. REGULATEURS MODIFIES

On suppose maintenant que la perturbation à l'entrée contient, en plus du bruit aléatoire stationnaire, une autre composante déterminée, et l'optimisation selon (5) se fait à conditions supplémentaires, compte tenu de cette composante.

Dans (L2), on considère le cas où à l'entrée le bruit "blanc" s'additionne avec une perturbation de la forme "saut" J (où J est réel et différent de zéro). Le régulateur doit éliminer l'influence du saut J dans N pas ( $N \geq 1$ ), quel que soit le moment où le saut apparaît. Dans (L2), on examine des propriétés de ce régulateur optimal, que nous appellerons le régulateur du premier type.

La perturbation en forme de saut correspond approximativement dans la pratique à un changement du matériel usiné.

En plus de ce genre de perturbation, il peut aussi apparaître dans la pratique une perturbation provenant par exemple d'une usure graduelle et lente de l'outil. Une telle perturbation est approximativement une fonction linéaire du temps.

Considérons le régulateur optimal selon le critère (5) avec des conditions supplémentaires qui respectent l'influence de la perturbation, croissant linéairement avec le temps, que nous appellerons le régulateur du second type.

Alors, supposons que, outre la régulation optimale de la suite "blanche", le régulateur enlève dans N pas ( $N > 1$ ), l'influence du "saut de vitesse" K, quelle que soit la valeur de n à laquelle le saut est apparu.

Si alors nous posons :

$$\varphi(l) = \xi(l) \quad \text{pour} \quad l < n. \quad (7)$$

$$\varphi(l) = \xi(l) + K(l - n) \quad \text{pour} \quad l \geq n,$$

on doit avoir :

$$E[\eta_\varphi(l)] = E[\eta_\xi(l)] = 0 \quad \text{pour} \quad l \geq n + N \quad (8)$$

où

$$\{\eta_\xi(l)\} \quad \text{et} \quad \{\eta_\varphi(l)\}$$

représentant respectivement les suites de la sortie, réglées avec des perturbations d'entrée  $\{\xi(l)\}$  et  $\{\varphi(l)\}$

En effet, jusqu'au moment n, le signal à l'entrée est seulement  $\{\xi(l)\}$ , une suite "blanche", pour laquelle  $E[\eta_\xi(l)] = 0$ . Au moment n, la perturbation "saut de vitesse" est apparue. Depuis ce moment, le signal à l'entrée est de la forme  $\varphi(l) = \xi(l) + K(l - n)$ . Nous postulons que l'espérance math.  $E[\eta_\varphi(l)]$  du signal à la sortie soit zéro après N pas ; ce qui donne la condition (8).

On voit facilement que des équations (7) et (8), il résulte

$$\sum_{k=1}^N a_k = 1, \quad \sum_{k=1}^N ka_k = 0, \quad (9)$$

$$a_k = 0 \quad \text{pour} \quad k > N.$$

Nous cherchons alors le minimum (5) pour le bruit blanc à l'entrée avec les conditions supplémentaires (9).

Théorème 2.1 : Pour que l'expression (5) soit minimale sous les conditions (9) et le bruit blanc à l'entrée, il est nécessaire et suffisant que

$$a_k = \frac{4}{N} - \frac{6(k-1)}{N(N-1)} \quad \text{pour} \quad k = 1, 2, \dots, N \quad (10)$$

Démonstration :

On démontre facilement que le système des valeurs (10) satisfait le système des équations :

$$\begin{aligned} a_1 + a_2 + \dots + a_N &= 1 \\ a_1 + 2a_2 + \dots + Na_N &= 0 \\ 2a_1 &- \lambda + \mu = 0 \\ 2a_2 &- \lambda + 2\mu = 0 \\ &\vdots \\ 2a_N &- \lambda + N\mu = 0. \end{aligned} \quad (11)$$

On en déduit que la condition (10) est nécessaire, la condition suffisante résulte de l'interprétation géométrique.

Théorème 2.2 : Pour le régulateur, avec la suite des poids (10), on en déduit pour l'entrée blanche :

$$E [\eta^2(l)] = E [\xi^2(l)] \cdot \left\{ 1 + \frac{1}{N-1} \left( 4 + \frac{2}{N} \right) \right\}. \quad (12)$$

### 3. COMPARAISON DE DEUX REGULATEURS MODIFIES

Pour comparer les deux types de régulateurs considérés, il est surtout important de se rappeler que plus N devient grand, plus l'installation devient compliquée et par cela même plus chère et plus déréglable. Comme on l'a mentionné dans (L2), on peut difficilement considérer N plus grand que 10. Pour des calculs dans le système binaire, les valeurs N = 2, 4, 8, sont avantageuses.

Par la suite, nous marquerons de l'indice I les grandeurs, appartenant au premier type du régulateur, celles du second type seront marquées par l'indice II.

Si la perturbation systématique à l'entrée est de la forme "saut", les deux types de régulateur enlèvent son influence après N pas.

Dans l'état stationnaire (les transitoires étant disparus), nous devons pour ce cas considérer seulement l'influence du bruit blanc à l'entrée, c'est-à-dire, nous comparons les formules (3.6) de (L1) et (L2). Comme on peut le voir, pour chaque N, le second type de régulateur est plus mauvais que le premier.

Si la perturbation à l'entrée est de la forme du "saut de vitesse", le second type de régulateur enlève son influence après N pas. Dans l'état stationnaire, nous nous intéressons pour comparaison à nouveau à la formule (12). Le premier type de régulateur n'enlève pas l'influence de cette perturbation. A la sortie après N pas apparaît l'erreur constante :

$$\Psi = K \frac{N+1}{2}, \quad (13)$$

comme il est facile de la démontrer.

Pour la comparaison des régulateurs, nous choisirons, comme on le fait dans des situations analogues, le critère

$$\sigma_{\xi}^2 \cdot \frac{N+1}{N} + K^2 \frac{(N+1)^2}{4} = \sigma_{\xi}^2 \left[ \frac{N+1}{N} + \left( \frac{K}{\sigma_{\xi}} \right)^2 \cdot \frac{(N+1)^2}{4} \right] = \sigma_{\xi}^2 \cdot \varepsilon^2 \quad (14)$$

Pour une valeur donnée du rapport  $K/\sigma_{\xi}$ , l'expression (14) est minimum par rapport à N (N étant considéré comme continu) lorsque N satisfait à l'équation :

$$N^2 \cdot (N+1) = \frac{2\sigma_{\xi}^2}{K^2} \quad (15)$$

comme il est facile de le démontrer.

La solution peut être trouvée par exemple par la méthode d'itérations :

$$N_{k+1} = \sqrt{\frac{20\frac{\sigma_\xi^2}{K}}{K^2(N_k + 1)}}, \quad (k = 1, 2, \dots). \quad (16)$$

Nous comparons alors le critère (14) avec (12). Une comparaison d'orientation est faite de la façon suivante : on cherche d'abord les valeurs  $K/\sigma_\xi$ , telles que  $\varepsilon^2$  soit minimum pour  $N_I = 2, 4, 8$  ; ensuite on détermine  $N_{II}$ , tel que l'expression entre parenthèses dans (12) prenne la valeur la plus petite.

Le résultat de la comparaison figure dans la table 1 :

TABLE 1

$N_I$	$\sigma_\xi/K$	$\varepsilon_{\min}^2$	$N_{II}$	(12) (parenthèse)
2	2,45	1,87	8	1,61
4	6,32	1,41	16	1,28
8	17,0	1,19	32	1,13

On voit que dans le domaine de la table 1, le second type de régulateur est meilleur que le premier seulement pour  $N$  environ quatre fois plus grand (et le schéma est en conséquence plus compliqué).

Si maintenant pour  $N_I$  donné, on augmente  $\sigma_\xi/K$  par rapport aux valeurs de la table I, le régulateur du premier type ne sera plus optimal pour ce  $N_I$ , mais selon (14),  $\varepsilon^2$  va diminuer. Pour compenser cette baisse par le régulateur du second type, nous devrions encore augmenter  $N_{II}$  selon (12).

Le régulateur du premier type reste alors toujours meilleur que celui du second type, pour le critère choisi.

## CONCLUSION

Des considérations précédentes, il résulte qu'un régulateur linéaire simple du premier type est plus avantageux qu'un régulateur linéaire du second type, y compris le cas d'une perturbation déterminée d'entrée de la forme "saut de vitesse", si à l'entrée agit encore une perturbation de la forme de bruit "blanc".

Parce que nous savons que l'erreur aléatoire à la sortie croît très vite avec l'ordre d'extrapolation, on peut s'attendre même pour les régulateurs linéaires du type supérieur, qu'ils soient moins bons que le régulateur simple du premier type. L'accroissement de l'erreur systématique à la sortie, étant donné un trend de degré supérieur, n'est pas important au point de vue pratique, parce que la machine réglée doit avoir un procédé qui la fait stopper automatiquement, si la grandeur à la sortie s'écarte des tolérances (dans la théorie linéaire, on ne peut pas prendre ce facteur en considération dans les calculs).

## BIBLIOGRAPHIE

- (L1) PROUZA L. - Quelques propriétés de deux simples filtres discrets (en tchèque), Stroje na zpracovani informaci, Sbornik VI, 1958, p. 71/82.
- (L2) PROUZA L. - Sur la théorie linéaire des régulateurs automatiques (en russe). Aplikace Matematiky, F. 5, 1960, n° 3, p. 196/201.